Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кудрявцев, Нелокальное преобразование Дарбу
двумерного стационарного уравнения Шредингера и его
связь с преобразованием Мутара, *ТМФ*, 2016, том 187,
номер 1, 12–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:27:01

© 2016 г.

А. Г. Кудрявцев*

НЕЛОКАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ЕГО СВЯЗЬ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ МУТАРА

Рассмотрено нелокальное преобразование Дарбу для двумерного стационарного уравнения Шредингера и установлена его связь с преобразованием Мутара. Показано, что преобразование Мутара является частным случаем нелокального преобразования Дарбу. В качестве приложения нелокального преобразования Дарбу получены новые примеры интегрируемых двумерных стационарных операторов Шредингера с гладкими потенциалами.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, нелокальная переменная, уравнение Шредингера.

DOI: 10.4213/tmf8942

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерное стационарное уравнение Шредингера – это модель физических явлений в нерелятивистской квантовой механике [1], акустике [2] и томографии [3]. Случай фиксированной энергии в двумерном уравнении Шредингера представляет интерес в теории интегрируемых нелинейных систем [4], [5] и для многомерной теории рассеяния [6].

Рассмотрим двумерное стационарное уравнение Шредингера в виде

$$(\Delta - u(x, y))Y(x, y) = 0, \quad (1)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Уравнение Шредингера можно связать с уравнением Фоккера–Планка

$$W_{xx} + W_{yy} + \frac{\partial}{\partial x}(2h_x W) + \frac{\partial}{\partial y}(2h_y W) = 0, \quad (2)$$

*Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия.
E-mail: kudryavtsev_a_g@mail.ru

если использовать замену [7]

$$Y(x, y) = W(x, y)e^{h(x, y)}, \quad (3)$$

где u и h удовлетворяют условию

$$u = -\Delta h + h_x^2 + h_y^2. \quad (4)$$

Уравнение Фоккера–Планка (2) можно записать в форме закона сохранения, откуда получим уравнения на потенциал

$$W_x + 2h_x W - Q_y = 0, \quad (5)$$

$$W_y + 2h_y W + Q_x = 0. \quad (6)$$

В статье [8] рассмотрена специальная форма преобразования Дарбу для уравнений (5), (6). Показано, что, поскольку потенциальная переменная Q является нелокальной переменной уравнения Шредингера, она порождает нелокальное преобразование Дарбу для этого уравнения, которое можно использовать для получения новых примеров интегрируемых стационарных операторов Шредингера. В статье [8] исследован простой случай $h = 0$. В настоящей статье рассмотрен случай произвольного h и установлена связь между нелокальным преобразованием Дарбу и преобразованием Мутара [9].

2. НЕЛОКАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И ЕГО СВЯЗЬ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ МУТАРА

Рассмотрим линейный оператор, соответствующий системе уравнений (5), (6):

$$\hat{L}(h(x, y))\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2h_x + \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 2h_y + \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также преобразование Дарбу в виде

$$\hat{L}_D \mathbf{F} = \begin{pmatrix} r_{11} - a_{11} \frac{\partial}{\partial x} - b_{11} \frac{\partial}{\partial y} & r_{12} - a_{12} \frac{\partial}{\partial x} - b_{12} \frac{\partial}{\partial y} \\ r_{21} - a_{21} \frac{\partial}{\partial x} - b_{21} \frac{\partial}{\partial y} & r_{22} - a_{22} \frac{\partial}{\partial x} - b_{22} \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Если линейные операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}_D$ удовлетворяют сплетающему соотношению

$$(\hat{L}(h(x, y) + s(x, y))\hat{L}_D - \hat{L}_D \hat{L}(h(x, y)))\mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

для любого $\mathbf{F} \in \mathcal{F} \supset \text{Ker}(\hat{L}(h))$, где $\text{Ker}(\hat{L}(h)) = \{\mathbf{F}: \hat{L}(h)\mathbf{F} = 0\}$, тогда функция $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \hat{L}_D \mathbf{F}(x, y)$ для всех $\mathbf{F} \in \text{Ker}(\hat{L}(h))$ является решением уравнения $\hat{L}(\tilde{h})\tilde{\mathbf{F}} = 0$, в котором новый потенциал $\tilde{h} = h + s$.

В работе [8] предложено рассматривать уравнение (7) в следующей области:

$$\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{F}: F_{1x} + 2h_x F_1 - F_{2y} = 0\}.$$

Таким образом, $\mathbf{F}$ – это решение одного из двух уравнений системы (5), (6), следовательно, рассматриваемое преобразование – промежуточный вариант между обычным преобразованием Дарбу (когда $\mathbf{F}$ произвольно) и преобразованием из группы симметрии (когда $\mathbf{F}$ – решение системы). Если учесть зависимость между производными F_1 и F_2 , можно получить уравнения относительно s , r_{ij} , a_{ij} , b_{ij} .

Следует отметить, что область $\mathcal{F}_0$ можно понимать не как ограничение на решения уравнения (5), а как ограничение на решения уравнения (6). Так как система уравнений (5), (6) симметрична относительно замены x на y с соответствующей заменой знака при Q , можно использовать эту симметрию в любом получаемом далее выражении.

Как уже упоминалось выше, случай $h = 0$ исследован в статье [8]. Обратимся к ситуации, когда h произвольно. При решении уравнения (7) в области $\mathcal{F}_0$ возникает специальный случай при $s = -2h$, который соответствует равенству $\tilde{h} = -h$. Тогда из уравнения (7) выведем следующее преобразование:

$$\hat{L}_D = e^{2h(x,y)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из формулы (4) после замены $\tilde{h} = -h$ имеем новый потенциал Шредингера:

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + 2\Delta h(x, y). \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$Y_h(x, y) = e^{-h(x,y)}, \quad (10)$$

из формулы (4) следует, что Y_h есть решение уравнения Шредингера с потенциалом u . Таким образом, мы приходим к следующему выражению для потенциала (9):

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) - 2\Delta \ln(Y_h(x, y)), \quad (11)$$

которое соответствует формуле преобразования Мутара для потенциала уравнения Шредингера.

На основе преобразования (8) и соотношения

$$\tilde{Y}(x, y) = \widetilde{W}(x, y) e^{\tilde{h}(x,y)} \quad (12)$$

получим новые решения уравнений Шредингера и Фоккера–Планка:

$$\widetilde{W}(x, y) = e^{2h(x,y)} Q(x, y), \quad (13)$$

$$\tilde{Y}(x, y) = e^{h(x,y)} Q(x, y). \quad (14)$$

Теперь можно выразить величины W , Q и h соответственно через величины Y , $\tilde{Y}$ и Y_h с помощью выражений (3), (10), (13) и подставить их в систему (5), (6):

$$\frac{\partial}{\partial x} (Y_h(x, y) \tilde{Y}(x, y)) + (Y_h(x, y))^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Y(x, y)}{Y_h(x, y)} \right) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (Y_h(x, y) \tilde{Y}(x, y)) - (Y_h(x, y))^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Y(x, y)}{Y_h(x, y)} \right) = 0. \quad (16)$$

Эти формулы совпадают с формулами преобразования Мутара для решения уравнения Шредингера. Таким образом, случай $\tilde{h} = -h$ для нелокального преобразования Дарбу соответствует преобразованию Мутара.

Одним из вполне эффективных способов получения не имеющих особенностей интегрируемых потенциалов для уравнения Шредингера является повторное применение преобразования Мутара [10]. Далее мы приводим выражения для дважды примененного преобразования Мутара в удобной форме.

Рассмотрим интегрируемый потенциал Шредингера u и выберем два решения Y_1, Y_2 соответствующего уравнения Шредингера. Согласно (10) положим $Y_{h1} = Y_1$ и проведем преобразование Мутара, меняя знак h_1 на противоположный. Из выражения (14) следует, что Y_2 преобразуется в $\tilde{Y}_2 = Q_{12}/Y_{h1}$, где Q_{12} , как видно из соотношений (3), (5), (6) и (10), удовлетворяет следующей системе:

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x} Y_1 - Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Q_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y} Y_1 - Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_{12}}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Далее положим $Y_{h2} = \tilde{Y}_2$ и проведем преобразование Мутара, меняя знак h_2 . Из условия (4) для $h = -h_2$, учитывая систему (17), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & u + 4(Q_{12})^{-1} \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) + \\ & + 2(Q_{12})^{-2} \left(\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} Y_1 - Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial y} Y_1 - Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Для несингулярных u, Y_1, Y_2 нетрудно заметить, что особенности функции $\tilde{u}$ в (18) порождены нулями Q_{12} . Заметим, что величина Q_{12} определена в системе (17) с точностью до произвольной константы. В некоторых случаях выбор константы позволяет сделать Q_{12} знакопостоянной.

Система уравнений (15), (16) при выполнении равенства $Y = Y_h$ имеет простое решение $\tilde{Y} = 1/Y_h$. Следовательно, $\tilde{Y} = 1/Y_{h2} = Y_1/Q_{12}$ – пример решения уравнения Шредингера с потенциалом $\tilde{u}$.

Вернемся к уравнению (7). В случае $s \neq -2h$ на основе уравнения (7), рассматриваемого в области $\mathcal{F}_0$, получаем следующее преобразование Дарбу:

$$\hat{L}_D = e^{-s(x,y)} \begin{pmatrix} R_1 - \frac{\partial}{\partial y} & R_2 \\ -s_x - R_2 & -s_y + R_1 - \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$R_1 = \frac{V_1}{V}, \quad R_2 = \frac{V_2}{V}, \quad V = 2s_x(s_x + 2h_x) + 2s_y(s_y + 2h_y),$$

$$V_2 = s_x s_{xx} + 2s_y(s_{xy} + h_{xy}) - s_x(s_{yy} + 2h_{yy}) - (s_x + 2h_x)s_x^2 - (s_y + 2h_y)s_x s_y, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_1 = & (s_x + 2h_x)(-2(s_{xy} + h_{xy}) + (s_y - 2h_y)s_x) + \\ & + (s_y + 2h_y)(s_{xx} - s_{yy} - 2h_{yy} + (s_y - 2h_y)s_y), \end{aligned}$$

где s удовлетворяет системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, которые здесь не приведены для краткости. Эту систему можно найти в работе [11].

Из выражения (19) получим следующее решение уравнения Фоккера–Планка:

$$\widetilde{W} = e^{-s} \left(R_1 W - \frac{\partial W}{\partial y} + R_2 Q \right). \quad (21)$$

Из выражений (3), (12) и (21) можно найти новое решение уравнения Шредингера:

$$\tilde{Y} = (R_1 + h_y)Y - \frac{\partial Y}{\partial y} + e^h R_2 Q, \quad (22)$$

где Q , как следует из соотношений (3), (5), (6) и (10), удовлетворяет системе

$$\frac{\partial Y}{\partial x} Y_h - Y \frac{\partial Y_h}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} Y_h - Y \frac{\partial Y_h}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Таким образом, преобразование Дарбу (22) – это нелокальное преобразование, так как потенциальная переменная Q является нелокальной переменной, связанной с Y системой уравнений (23), (24).

3. ПРИЛОЖЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

Как показано в работе [8], если $h = 0$, система уравнений для $B = e^{-s}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & -(2BB_y B_{xy} + BB_x(B_{xx} - B_{yy}) + B_x(B_x^2 + B_y^2))(B_{xx} + B_{yy}) + \\ & + B(B_x^2 + B_y^2) \frac{\partial}{\partial x} (B_{xx} + B_{yy}) = 0, \\ & -(2BB_x B_{xy} - BB_y(B_{xx} - B_{yy}) + B_y(B_x^2 + B_y^2))(B_{xx} + B_{yy}) + \\ & + B(B_x^2 + B_y^2) \frac{\partial}{\partial y} (B_{xx} + B_{yy}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Если B является решением уравнений (25), тогда $1/B$ и CB , где C – произвольная константа, – также решения этой системы. Очевидно, что любое решение уравнения Лапласа $\Delta B = 0$ является решением системы (25).

Систему уравнений (25) можно проинтегрировать. В случае, когда ΔB не равно нулю, получим

$$(B^2 - K)(B_{xx} + B_{yy}) - 2B(B_x^2 + B_y^2) = 0, \quad (26)$$

либо в другой форме

$$\frac{B^4 \Delta(1/B)}{\Delta B} = -K, \quad (27)$$

где K – произвольная константа. Нетрудно заметить, что если B является решением уравнения (27), в котором $K = K_B$, то $1/B$ есть решение этого уравнения при $K = 1/K_B$.

Как следует из условия (4), начальный потенциал u уравнения Шредингера, соответствующий случаю $h = 0$, равен нулю. Новый потенциал, соответствующий случаю $s = -\ln B$, определяется следующим образом:

$$\tilde{u} = \frac{\Delta B}{B}. \quad (28)$$

Заметим, что B – это пример решения уравнения Шредингера с новым потенциалом $\tilde{u}$. Далее, если B_L – решение уравнения Лапласа, то согласно уравнению (28) $\tilde{u} = 0$. Полагая $B = 1/B_L$, получим нетривиальный потенциал

$$\tilde{u} = 2(B_L)^{-2} \left(\left(\frac{\partial B_L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_L}{\partial y} \right)^2 \right),$$

но потенциалы такого вида имеют особенности. Заметим, что только что приведенная формула совпадает с выражением (11), определяющим преобразование Мутара для потенциала в случае $u = 0$, $Y_h = B_L$.

Рассмотрим анзац для B вида

$$B(x, y) = F(x^2 + y^2),$$

который приводит к следующему решению уравнения (27):

$$B_r(x, y) = -\frac{\sqrt{K}((x^2 + y^2)^{C_1} - C_2)}{(x^2 + y^2)^{C_1} + C_2}, \quad (29)$$

где C_1, C_2 – произвольные константы. Решение B_r с учетом формулы (28) позволяет получить выражение

$$\tilde{u} = -8 \frac{C_2 C_1^2 (x^2 + y^2)^{C_1 - 1}}{((x^2 + y^2)^{C_1} + C_2)^2}. \quad (30)$$

Этот интегрируемый потенциал не имеет особенностей, если выполняются неравенства $C_1 \geq 1$, $C_2 > 0$. Случаи $C_1 = 1, \dots, 4$ содержатся в семействах рациональных потенциалов, изученных в работе [8].

В качестве примера рассмотрим случай $C_1 = 3/2$, $C_2 = 1$. Имеем

$$B = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} - 1}{(x^2 + y^2)^{3/2} + 1}. \quad (31)$$

Выберем два решения уравнения Лапласа

$$Y_{L1} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y_{L2} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Из системы (23), (24) при $Y_h = 1$ выведем для $Y = Y_{L1}$ и $Y = Y_{L2}$ следующие соотношения:

$$Q_{L1} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C_{L1}, \quad Q_{L2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + C_{L2},$$

где C_{L1}, C_{L2} – произвольные константы. При $h = 0$ согласно выражениям (22), (31) для $Y = Y_{L1}$, $Q = Q_{L1}$ и $Y = Y_{L2}$, $Q = Q_{L2}$ верны равенства

$$\tilde{Y}_{L1} = \frac{-2xy(7(x^2 + y^2)^{3/2} + 1)}{(x^2 + y^2)^2((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)} + \frac{C_{L1}x(5(x^2 + y^2)^{3/2} - 1)}{(x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)}, \quad (32)$$

$$\tilde{Y}_{L2} = \frac{(x^2 - y^2)(7(x^2 + y^2)^{3/2} + 1)}{(x^2 + y^2)^2((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)} + \frac{C_{L2}x(5(x^2 + y^2)^{3/2} - 1)}{(x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)}. \quad (33)$$

Данные функции являются примерами решений уравнения Шредингера с интегрируемым потенциалом

$$\tilde{u} = -18 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)^2}. \quad (34)$$

Применим теперь преобразование Мутара к уравнению Шредингера с потенциалом (34). Используя это преобразование однократно, придем к сингулярному интегрируемому потенциалу. Чтобы получить несингулярный интегрируемый потенциал уравнения Шредингера, применим преобразование Мутара дважды. Выберем потенциал u , удовлетворяющий уравнению (34), и два решения Y_1, Y_2 уравнения Шредингера вида (32), (33) при условии, что $C_{L1} = C_{L2} = 0$. Из уравнения (17) следует, что

$$Q_{12} = \frac{49(x^2 + y^2)^{3/2} + 1}{2(x^2 + y^2)^2((x^2 + y^2)^{3/2} + 1)} + \frac{C}{2}, \quad (35)$$

где C – произвольная константа. Из уравнения (18) имеем

$$\tilde{u} = \frac{-2r(441 + 9C^2r^8 + 2Cr(392r^6 + 49r^3 + 8))}{(Cr^4(r^3 + 1) + 49r^3 + 1)^2}, \quad (36)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Этот интегрируемый потенциал не имеет особенностей, если выполняется неравенство $C \geq 0$. Ниже приведен пример решения уравнения Шредингера с потенциалом вида (36):

$$\tilde{Y} = \frac{Y_1}{Q_{12}} = \frac{-4xy(7(x^2 + y^2)^{3/2} + 1)}{C(x^2 + y^2)^2((x^2 + y^2)^{3/2} + 1) + 49(x^2 + y^2)^{3/2} + 1}. \quad (37)$$

Решения упомянутых в разделе 2 уравнений относительно s можно получить не только при $h = 0$. Например, положим $h(x, y) = H(y)$ и применим следующий анзац: $s(x, y) = -2H(y) + S(x)$. Это позволяет привести уравнения по s к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$S_x S_{xxx} - S_{xx}^2 - S_x^4 = 0. \quad (38)$$

Решение уравнения (38) имеет вид

$$S(x) = \ln\left(\frac{e^{C_1 x} - C_2}{e^{C_1} + C_2}\right) + C_3, \quad (39)$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые константы.

Таким образом, для любого интегрируемого потенциала

$$u_H = -\frac{d^2 H(y)}{dy^2} + \left(\frac{dH(y)}{dy}\right)^2 \quad (40)$$

мы приходим к интегрируемому потенциалу вида

$$\tilde{u}_H = u_H + 2\frac{d^2 H(y)}{dy^2} + \frac{2C_2 C_1^2 e^{C_1 x}}{(e^{C_1 x} - C_2)^2}. \quad (41)$$

Положим $H(y) = -\ln(\sin(y))$ и выберем решение, имеющее вид (39): $S(x) = \ln(\text{th}(p(x - x_0)))$, где p, x_0 – константы. В этом случае начальный интегрируемый потенциал равен $u_H = -1$, а потенциал

$$\tilde{u}_H = -1 + 2(\sin(y))^{-2} + 2p^2(\text{sh}(p(x - x_0)))^{-2} \quad (42)$$

имеет особенности. Чтобы получить интегрируемый потенциал уравнения Шредингера без особенностей на основе потенциала (42), применим преобразование Мутара. Для решения $\sin(x)$ уравнения Шредингера с потенциалом $u_H = -1$ с помощью формул (23), (24) выпишем, что $Q = C - \cos(y)\cos(x)$, где C – константа. Из выражения (22) следует решение уравнения Шредингера для потенциала вида (42):

$$\tilde{Y}_p = \frac{(p(C - \cos(y)\cos(x)) - \cos(y)\sin(x)\text{th}(p(x - x_0)))}{\sin(y)\text{th}(p(x - x_0))}. \quad (43)$$

Положим $Y_h = \tilde{Y}_p$ и применим к потенциалу (42) преобразование Мутара. Полученный интегрируемый потенциал имеет вид

$$\tilde{u}_H = -1 + \frac{2(f_1(\text{ch}(p(x - x_0)))^{-2} + f_2 + f_3\text{th}(p(x - x_0)))}{(p(C - \cos(y)\cos(x)) - \cos(y)\sin(x)\text{th}(p(x - x_0)))^2}, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -p^2(p^2 + 1)(C - \cos(y)\cos(x))^2 + p^2C^2 - (p^2 + 1)\cos(y)^2 - \sin(x)^2, \\ f_2 &= -2p^2C\cos(y)\cos(x) + 1 + (p^2 - 1)\cos(x)^2 + (p^2 + 1)\cos(y)^2, \\ f_3 &= 2p\sin(x)(\cos(x) - C\cos(y)). \end{aligned}$$

Данный потенциал не имеет особенностей при $p > 0, C > 1/p + 1$. Функция $1/\tilde{Y}_p$ – пример решения уравнения Шредингера с потенциалом вида (44).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

За последние несколько десятилетий были получены значимые результаты в теории нелинейных уравнений в частных производных и линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Преобразование Дарбу оказалось полезным инструментом для решения одномерного уравнения Шредингера [12]. В работах [13], [14] были рассмотрены некоторые обобщения преобразования Дарбу для двумерных моделей, в частности операторы второго порядка в частных производных. Примеры двумерных интегрируемых моделей были получены при рассмотрении обобщенных преобразований Дарбу (в частности, в работах [15], [16]). Примеры интегрируемых двумерных стационарных операторов Шредингера с гладкими рациональными потенциалами, убывающими на бесконечности, были получены в статье [10] на основе применения преобразования Мутара. В последние годы с помощью расширения пространств симметрий дифференциального уравнения и включения нелокальных переменных существенные результаты были получены в теории групп симметрий дифференциальных уравнений [17], [18]. В настоящей статье рассмотрено включение нелокальных переменных в преобразование Дарбу для двумерного стационарного уравнения Шредингера.

В работе [8] исследовано уравнение Фоккера–Планка, соответствующее двумерному стационарному уравнению Шредингера. Уравнение Фоккера–Планка можно переписать в виде закона сохранения, что приводит к системе двух уравнений относительно потенциала. Для этих уравнений введен определенный вид преобразования Дарбу, при котором потенциальная переменная является нелокальной переменной, порождающей нелокальное преобразование Дарбу уравнения Шредингера. В [8] показано, что нелокальное преобразование Дарбу – полезный инструмент для получения интегрируемых двумерных стационарных операторов Шредингера, выбор которых ограничен случаем $h = 0$. В настоящей работе рассмотрен случай произвольного h , а также найдена связь между нелокальным преобразованием Дарбу и преобразованием Мутара. Выяснилось, что при $\tilde{h} = -h$ нелокальное преобразование Дарбу является преобразованием Мутара. С помощью нелокального преобразования Дарбу были получены новые примеры интегрируемых двумерных стационарных операторов Шредингера с гладкими потенциалами.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [2] P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [3] A. C. Kak, M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, Classics in Applied Mathematics, **33**, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [4] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788.
- [5] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, *УМН*, **65**:3(393) (2010), 195–196.
- [6] П. Г. Гриневич, *УМН*, **55**:6(336) (2000), 3–70.
- [7] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation*, Springer Series in Synergetics, **18**, Springer, Berlin, 1989.
- [8] A. G. Kudryavtsev, *Phys. Lett. A*, **377**:38 (2013), 2477–2480, arXiv: 1211.5685.
- [9] T. Moutard, *J. École Polyt.*, **45** (1878), 1–11.
- [10] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 188–207, arXiv: 0801.3225.
- [11] A. G. Kudryavtsev, *The nonlocal Darboux transformation of the 2D stationary Schrödinger equation and its relation to the Moutard transformation*, arXiv: 1303.5858.
- [12] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [13] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **201**:2–3 (1995), 103–110, arXiv: hep-th/9404120.
- [14] M. V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:43 (2004), 10363–10374, arXiv: hep-th/0405241.
- [15] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:50 (2012), 503001, 62 pp.
- [16] M. S. Bardavelidze, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **377**:3–4 (2013), 195–199, arXiv: 1211.1461.
- [17] И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Нов. достиж.*, **34**, 1989, 3–83.
- [18] G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **168**, Springer, New York, 2010.

Поступила в редакцию 30.03.2015