Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ковалевский, О классификации магнитных и сверхтекучих состояний равновесия в магнетиках со спином $s = 1$, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 3, 456–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:15:14

© 2016 г.

М. Ю. Ковалевский*

О КЛАССИФИКАЦИИ МАГНИТНЫХ И СВЕРХТЕКУЧИХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МАГНЕТИКАХ СО СПИНОМ $s = 1$

На основе метода квазисредних дана классификация магнитных и сверхтекучих состояний равновесия в магнетиках со спином $s = 1$. Предположение об остаточной симметрии вырожденных состояний и трансформационные свойства операторов параметра порядка при преобразованиях, порождаемых аддитивными интегралами движения, приводят, при некоторых упрощениях, к линейным алгебраическим уравнениям классификации для равновесных средних параметров порядка. Рассмотрены различные случаи нарушения магнитной $SO(3)$ - или $SU(3)$ -симметрии. Получены решения для векторного и тензорного параметров порядка в частных случаях вида параметров генератора остаточной симметрии. Изучены состояния равновесия магнетиков, в которых одновременно нарушены фазовая и магнитная симметрии. Найдены решения уравнений классификации сверхтекучих состояний равновесия. Установлены связи между параметрами генератора остаточной симметрии, для которых реализуется термодинамическое сосуществование ненулевых равновесных средних параметров порядка.

Ключевые слова: спин, квадрупольная матрица, параметр порядка, симметрия, квазисредние.

DOI: 10.4213/tmf8944

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно исследуются квантовые системы, структурные элементы которых (частицы, кластеры, молекулы) обладают спином $s > 1/2$, – высокоспиновые магнетики. Интерес к этим объектам обусловлен тем, что их изучение позволяет надеяться на открытие новых магнитных состояний и физических свойств таких систем. По сравнению с ферми-системами со структурным элементом среды, равным $s = 1/2$, высокоспиновые магнетики обладают существенными физическими отличиями, для понимания которых важны соображения симметрии. Традиционная физика конденсированного состояния имеет дело с достаточно простыми группами

*Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина. E-mail: mikov51@mail.ru

симметрии, к которым относятся группы трансляций или поворотов в пространстве. Более сложные группы унитарной симметрии $SU(n)$ с $n > 2$ использовались в физике высоких энергий и теории поля для классификации адронов. В физике конденсированного состояния такие группы симметрии оказались необходимы при описании холодных ферми- и бозе-газов, высокотемпературных сверхпроводников, магнетиков и низкоразмерных полупроводников [1]–[10].

В работах [11]–[18] исследованы состояния равновесия магнетиков со спином $s = 1$ и рассмотрены модели гамильтонианов, отвечающие различным фазовым состояниям. На основе феноменологического подхода проанализированы фазовые состояния магнетиков и предсказаны новые магнитные состояния. В работах [19], [20] приведена классификация сверхтекучих состояний равновесия для чистых квантовых состояний в магнетиках со спином $s = 1$. Работы [21], [22] посвящены исследованию сверхтекучих состояний равновесия на основе модельного вида обменной энергии как функции нематического параметра порядка. Вопросы сосуществования явлений ферромагнетизма и бозе-конденсации рассмотрены в статье [23].

При исследовании высокоспиновых магнетиков возникают две существенно различные проблемы. Одна из них – создание достаточно устойчивых магнитных микроскопических структур со спиновым моментом $s > 1/2$. Другая проблема, которой посвящена настоящая работа, – это изучение среды с максимально возможной магнитной $SU(2s + 1)$ -симметрией. Традиционная физика магнетизма предполагает, что изменение значений спина структурных элементов среды проявляется только в изменении величины модуля этого вектора. Качественная картина, описывающая состояния равновесия и динамики, при этом не меняется.

При макроскопическом описании магнетиков со спином $s \geq 1$ необходимо учесть следующие факторы. Так как магнетизм – квантовое явление, описание термодинамики высокоспиновых магнетиков требует анализа связи между магнитными степенями свободы и физическими состояниями. Каждое из чистых или смешанных квантовых состояний имеет свой набор динамических величин, которым необходимо придать соответствующий физический смысл. Смешанные состояния, в свою очередь, подразделяются на нормальные и вырожденные состояния (состояния со спонтанно нарушенной симметрией). Другой фактор – это возможное наличие $SU(2s + 1)$ -симметрии обменного взаимодействия, которая играет решающую роль в формировании состояния равновесия и структуре динамических уравнений высокоспиновых магнетиков. Третий важный момент – характер нарушенной симметрии в магнетиках со спином $s \geq 1$, который определяется свойствами параметра порядка. В магнитных средах со спином $s = 1/2$ параметр порядка – векторная величина, которая меняет знак при операции обращения времени. Описание вырожденных состояний равновесия высокоспиновых магнетиков предполагает, что параметры порядка могут быть векторными или тензорными величинами с различными трансформационными свойствами по отношению к операции обращения времени. Для таких систем появляются параметры порядка, которые не изменяются в результате операции обращения времени, что порождает новые физические свойства изучаемых сред. Параметры порядка или определенные функции от них являются дополнительными магнитными степенями свободы, которые характеризуют термодинамику вырожденных состояний.

Предварительный анализ высокоспиновых магнетиков показывает, что увеличение спинового момента приводит к новым фундаментальным отличиям таких магнетиков от традиционных, т. е. обладающих спином $s = 1/2$, а именно:

- к появлению магнитных степеней свободы, инвариантных относительно обращения времени, которые характеризуют макроскопические состояния многочастичных систем;
- к новым свойствам $SU(2s + 1)$ -симметрии нормальных состояний равновесия и условиям нарушения этой симметрии для вырожденных состояний равновесия;
- к новым возможностям описания неравновесных процессов, связанным с подгруппами группы $SU(2s + 1)$ -симметрии.

Задача классификации вырожденных состояний равновесия магнетиков со спином $s = 1$ может быть решена на основе представления о квазисредних [24] с учетом остаточной (ненарушенной) симметрии таких состояний. С помощью такого подхода классифицированы сверхтекучие фазы ^3He [25], [26] и фазы с d -спариванием [27]. В этом подходе не используется конкретный вид обменной энергии, но учитываются трансформационные свойства параметра порядка относительно преобразований, порождаемых аддитивными интегралами движения. Генератор остаточной симметрии представляет собой линейную комбинацию аддитивных интегралов движения, в отношении которых симметрия состояния равновесия нарушена. Соответствующие коэффициенты при этих интегралах движения в общем случае не являются независимыми. Они позволяют классифицировать вырожденные состояния равновесия в предположении, что равновесное значение параметра порядка не равно нулю.

В соответствии с подходом работы [26] для параметра порядка получаются линейные дифференциальные уравнения, которые при некоторых упрощениях сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Допустимые значения коэффициентов генератора остаточной симметрии могут иметь как непрерывный (оси магнитной анизотропии), так и дискретный характер. Последние трактуются как квантовые числа, которые различают квантовые состояния (см., например, инертные фазы ^3He [25], [26]). Таким образом, классификация вырожденных состояний равновесия осуществляется по допустимым параметрам генератора ненарушенной симметрии с учетом того, что структурные постоянные алгебры квантовых скобок аддитивных интегралов движения с операторами параметра порядка принимают ненулевые значения.

Структура настоящей работы такова. В разделе 2 рассмотрены свойства симметрии гамильтониана и алгебра квантовых скобок Пуассона аддитивных интегралов движения. В разделе 3 изучаются нормальные состояния равновесия магнетиков со спином $s = 1$ с $SO(3)$ - и $SU(3)$ -симметрией. В разделе 4 обсуждается спонтанное нарушение магнитной симметрии состояний равновесия и рассмотрены типы состояний равновесия, связанные с магнитными параметрами порядка. Раздел 5 посвящен классификации состояний равновесия со спонтанно нарушенной магнитной $SO(3)$ - и $SU(3)$ -симметрией. Получены уравнения классификации для векторного и нематического параметров порядка и даны их решения. В разделе 6 изучаются состояния равновесия, для которых нарушены фазовая и магнитная симметрии. Выписаны решения уравнений классификации сверхтекучих состояний равновесия для скалярного, векторного и тензорного параметров порядка.

2. СИММЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА И АДДИТИВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В случае магнетиков с $SU(3)$ -симметричным обменным гамильтонианом набор аддитивных интегралов движения имеет вид

$$\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{N}}, \hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}), \quad a = 0, k, 4, \alpha\beta,$$

где

$$[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{N}}] = 0, \quad [\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{P}}_i] = 0, \quad [\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}] = 0, \quad (2.1)$$

и содержит гамильтониан $\hat{\hat{H}}$, оператор числа частиц $\hat{\hat{N}}$, импульса $\hat{\hat{P}}_k$ ($k = 1, 2, 3$ – пространственные индексы) и матричный оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ [3], который определяется соотношением

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \int d^3x \left(\hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\gamma^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\gamma(\mathbf{x}) \right) = \int d^3x \hat{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

где $\alpha, \beta = x, y, z$ – спиновые индексы. Оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ представляет собой генератор $SU(3)$ -симметрии гамильтониана. Он удовлетворяет равенствам $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} = \hat{\hat{G}}_{\beta\alpha}^+$, $\hat{\hat{G}}_{\alpha\alpha} = 0$ и связан с эрмитовыми операторами спина и квадрупольной матрицы соотношением

$$\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \equiv \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\hat{S}}_\gamma. \quad (2.3)$$

Операторы вторичного квантования мы обозначили как $\hat{\hat{A}}$, чтобы отличать их от конечномерных матриц. Аддитивные интегралы движения

$$\hat{\hat{N}} = \int d^3x \hat{n}(\mathbf{x}), \quad \hat{\hat{P}}_k = \int d^3x \hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \quad \hat{\hat{S}}_\alpha = \int d^3x \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} = \int d^3x \hat{q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

и соответствующие им плотности в терминах полевых бозе-операторов имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{n}(\mathbf{x}) &= \hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \{ \nabla_k \hat{\psi}_\beta^+(\mathbf{x}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \hat{\psi}_\beta^+(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) \}, \\ \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}) &= \hat{\psi}_\mu^+(\mathbf{x}) (\hat{s}_\alpha)_{\mu\nu} \hat{\psi}_\nu(\mathbf{x}), \quad \hat{q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_\mu^+(\mathbf{x}) (\hat{q}_{\alpha\beta})_{\mu\nu} \hat{\psi}_\nu(\mathbf{x}), \\ (\hat{s}_\alpha)_{\mu\nu} &\equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}, \quad (\hat{q}_{\alpha\beta})_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Учитывая канонические коммутационные соотношения для бозе-операторов

$$[\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta] = 0, \quad [\hat{\psi}_\alpha^+, \hat{\psi}_\beta^+] = 0 \quad (2.6)$$

и принимая во внимание определения (2.2), (2.4), (2.5), найдем квантовые скобки Пуассона:

$$[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}] = \hat{\hat{G}}_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \hat{\hat{G}}_{\mu\beta} \delta_{\alpha\nu}. \quad (2.7)$$

Остальные коммутаторы интегралов движения обращаются в ноль. Из выражений (2.3), (2.7) для операторов спина и квадрупольной матрицы следуют соотношения

$$\begin{aligned} i[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{S}}_\beta] &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\hat{S}}_\gamma, & i[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{Q}}_{\gamma\rho}] &= -\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} \hat{\hat{Q}}_{\lambda\rho} - \varepsilon_{\alpha\rho\lambda} \hat{\hat{Q}}_{\lambda\gamma}, \\ i[\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{Q}}_{\gamma\rho}] &= -\frac{1}{4} \hat{\hat{S}}_\lambda (\varepsilon_{\lambda\beta\gamma} \delta_{\alpha\rho} + \varepsilon_{\lambda\beta\rho} \delta_{\alpha\gamma} + \varepsilon_{\lambda\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\lambda\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В частном случае $SO(3)$ -симметрии набор магнитных интегралов движения содержит только оператор спина, а оператор квадрупольной матрицы отсутствует.

Рассмотрим преобразование обращения времени $t \rightarrow t' = -t$ для магнетиков со спином $s = 1$. Обращению времени соответствует преобразование полевого оператора $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t}$ в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \rightarrow \hat{\psi}'_\alpha(\mathbf{x}, t') = T_{\alpha\beta} \hat{\psi}^*_\beta(\mathbf{x}, t),$$

где $T_{\alpha\beta}$ – комплексная матрица размера 3×3 , действующая на спиновые индексы. Звездочка служит для обозначения операции комплексного сопряжения. Эта операция зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве, а именно, если выбран определенный базис, в нем операция комплексного сопряжения определяется формулой

$$\langle n|\psi^*|n'\rangle = \langle n|\psi|n'\rangle^*. \quad (2.9)$$

Так как операторы $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\psi}^+(\mathbf{x}, t)$ и $\hat{\psi}'(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\psi}'^+(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям, они связаны унитарным оператором $\hat{U}_T$, действующим в гильбертовом пространстве:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}'_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \hat{U}_T \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) \hat{U}_T^+ = T_{\alpha\beta} \hat{\psi}^*_\beta(\mathbf{x}, -t), \\ \hat{\psi}'^{+\alpha}(\mathbf{x}, t) &= \hat{U}_T \hat{\psi}^{+\alpha}(\mathbf{x}, t) \hat{U}_T^+ = T_{\beta\alpha}^* \hat{\psi}^{*\alpha}(\mathbf{x}, -t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условие (2.6) сохранения канонического вида квантовых скобок полевых операторов приводит к равенству

$$T_{\alpha\beta} T_{\gamma\beta}^* = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (2.11)$$

Учитывая, что при обращении времени оператор спина меняет знак, для матрицы $T_{\alpha\beta}$ получим соотношение

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T_{\gamma\lambda} T_{\beta\rho}^* = \varepsilon_{\alpha\rho\lambda}. \quad (2.12)$$

Оператор квадрупольной матрицы при обращении времени не изменяется, поэтому приходим к равенству

$$T_{\alpha\lambda} T_{\beta\sigma}^* + T_{\beta\lambda} T_{\alpha\sigma}^* = \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\lambda}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.11)–(2.13) определяют вид унитарной матрицы обращения времени для физических систем со спином $s = 1$. Зная выражения (2.5) для операторов плотности аддитивных интегралов движения в терминах полевых бозе-операторов и используя соотношения (2.10)–(2.13), легко установить справедливость формулы

$$\hat{U}_T \hat{\zeta}_a(\mathbf{x}) \hat{U}_T^+ = \varepsilon_a \hat{\zeta}_a^*(\mathbf{x}). \quad (2.14)$$

Здесь величина $\varepsilon_a \equiv \delta_{a,0} - \delta_{a,k} + \delta_{a,4} - \delta_{a,\alpha} + \delta_{a,\alpha\beta}$ представляет собой временную сигнатуру операторов плотности $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})$.

3. НОРМАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим нормальные состояния равновесия магнитной среды, частицы которой имеют спин $s = 1$, и сформулируем их свойства симметрии. В такой магнитной среде возможны состояния равновесия, которые обладают $SO(3)$ - или $SU(3)$ -симметрией и описываются статистическим оператором Гиббса

$$\hat{w}(Y) = e^{\Omega - Y_a \hat{\gamma}_a}. \quad (3.1)$$

В случае $SO(3)$ -симметрии термодинамические силы Y_a , сопряженные аддитивным интегралам движения, включают в себя температуру $T = Y_0^{-1}$, макроскопическую скорость $v_k = -Y_k/Y_0$, химический потенциал $\mu = -Y_4/Y_0$ и эффективное магнитное поле $-Y_\alpha/Y_0 \equiv h_\alpha$. Термодинамический потенциал Ω определяется условием нормировки статистического оператора Гиббса $\text{Sp } \hat{w} = 1$, где операция взятия следа в гильбертовом пространстве обозначена как Sp , чтобы отличать ее от аналогичной операции для конечномерных матриц. Гамильтониан и нормальное состояние равновесия удовлетворяют соотношениям магнитной симметрии

$$[\hat{H}, \hat{S}_\alpha] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{S}_\alpha(\mathbf{Y})] = 0. \quad (3.2)$$

Здесь оператор обобщенного спинового момента $\hat{S}_\alpha(\mathbf{Y})$ определен равенствами

$$\hat{S}_\alpha(\mathbf{Y}) \equiv \hat{S}_\alpha + S_\alpha(\mathbf{Y}), \quad S_\alpha(\mathbf{Y}) \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \frac{\partial}{\partial Y_\gamma}.$$

Он действует как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве термодинамических сил $\mathbf{Y}$. Для него справедливы коммутационные соотношения

$$i[\hat{S}_\alpha(\mathbf{Y}), \hat{S}_\beta(\mathbf{Y})] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma(\mathbf{Y}), \quad i[S_\alpha(\mathbf{Y}), Y_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\gamma. \quad (3.3)$$

Совпадение свойств магнитной $SO(3)$ -симметрии гамильтониана и нормального состояния равновесия следует понимать в смысле соотношений (3.2). Формулы (3.2), (3.3) показывают, что состояние равновесия инвариантно относительно унитарных преобразований спинового поворота $\hat{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) \equiv e^{i\boldsymbol{\theta}_\alpha \hat{S}_\alpha(\mathbf{Y})}$:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) \hat{w} \hat{U}^+(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) = \hat{w},$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – параметр преобразований. Помимо соотношения симметрии (3.2), для состояния равновесия (3.1) мы имеем инвариантность относительно фазовых преобразований, а также свойства пространственной однородности и изотропии:

$$[\hat{w}, \hat{N}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{P}_k] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{L}_i(\mathbf{Y})] = 0. \quad (3.4)$$

Здесь обобщенный оператор орбитального момента определяется равенствами

$$\hat{L}_i(\mathbf{Y}) \equiv \hat{L}_i + L_i(\mathbf{Y}), \quad \hat{L}_i = \varepsilon_{ikl} \int d^3x x_k \hat{\pi}_l(\mathbf{x}), \quad L_i(\mathbf{Y}) \equiv -i\varepsilon_{ikl} Y_k \frac{\partial}{\partial Y_l}.$$

Соотношения симметрии (3.2), (3.4) для состояния равновесия аналогичны соотношениям симметрии, характерным для магнетиков со спином $s = 1/2$.

Рассмотрим плотность термодинамического потенциала

$$\omega(Y) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{V} = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \text{Sp } e^{-Y_a \hat{\gamma}_a}. \quad (3.5)$$

Следствием определения (3.5) является равенство $\zeta_a = \text{Sp } \hat{w}(Y) \hat{\zeta}_a(\mathbf{x}) = \partial \omega(Y) / \partial Y_a$, связывающее термодинамические силы и равновесные значения плотностей аддитивных интегралов движения. При преобразовании Галилея

$$\hat{U}_{\mathbf{u}} = e^{-i u_i} \int d^3 x x_i m \hat{N}(\mathbf{x})$$

имеют место трансформационные свойства аддитивных интегралов движения

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{H} \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ &= \hat{H} + \hat{P}_i u_i + \frac{1}{2} m u^2 \hat{N}, & \hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{P}_i \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ &= \hat{P}_i + u_i \hat{N}, \\ \hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{N} \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ &= \hat{N}, & \hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{S}_{\alpha} \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ &= \hat{S}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \hat{w}(Y') &= \hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{w}(Y) \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ = e^{\Omega - Y'_a \hat{\gamma}_a}, \\ Y'_0 &= Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y'_4 = Y_4 + Y_k u_k m + \frac{1}{2} Y_0 u^2 m, \quad Y'_{\alpha} = Y_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где m – масса частицы и u_i – параметр преобразования. Из соотношений (3.6) следует, что термодинамический потенциал является функцией следующих скалярных инвариантов: $\omega(Y) = \omega(Y_0, Y_4 - Y_k^2/2Y_0, Y_{\alpha}^2)$. В состоянии равновесия спин $s_{\alpha} = \text{Sp } \hat{w} \hat{s}_{\alpha}$ коллинеарен вектору Y_{α} и его величина в терминах плотности термодинамического потенциала имеет вид $s_{\alpha} = 2Y_{\alpha} \partial \omega(Y) / \partial Y^2$. Если плотность спинового момента в состоянии равновесия стремится к нулю, $s_{\alpha} \rightarrow 0$ при $\mathbf{Y} \rightarrow 0$, состояние отвечает $SO(3)$ -симметрии парамагнетика и аналогично парамагнитному состоянию со спином $s = 1/2$. Случай, при котором $s_{\alpha} \neq 0$ при $\mathbf{Y} \rightarrow 0$, соответствует вырожденным состояниям равновесия и рассмотрен в следующем разделе.

Рассмотрим нормальные состояния равновесия с $SU(3)$ -симметрией, которые описываются статистическим оператором Гиббса

$$\hat{w} = \exp(\Omega - Y_0 \hat{H} - Y_k \hat{P}_k - Y_4 \hat{N} - Z_{\alpha\beta} \hat{G}_{\beta\alpha}). \quad (3.7)$$

В силу эрмитовости этого оператора термодинамические силы $Z_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношению $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}^*$. Введем термодинамические параметры, сопряженные оператору спина и квадрупольной матрице, с помощью равенств

$$Z_{\alpha\beta} \hat{G}_{\beta\alpha} \equiv Y_{\alpha} \hat{S}_{\alpha} + Y_{\alpha\beta} \hat{Q}_{\alpha\beta}, \quad Y_{\alpha\beta} \equiv \frac{Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\alpha}}{2}, \quad Y_{\alpha} \equiv i \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} Z_{\beta\gamma}.$$

Так как $\hat{G}_{\alpha\alpha} = 0$, без ограничения общности положим $Z_{\alpha\alpha} = Y_{\alpha\alpha} = 0$. Фазовая и пространственная симметрия нормальных состояний равновесия (3.7) по-прежнему имеют вид (3.4). Условию магнитной симметрии состояния равновесия можно придать вид, аналогичный соотношению (3.2):

$$[\hat{w}, \hat{G}_{\alpha\beta}(\hat{Z})] = 0. \quad (3.8)$$

Здесь введен оператор

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(\hat{Z}) = \hat{G}_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}(\hat{Z}), \quad G_{\alpha\beta}(\hat{Z}) \equiv Z_{\alpha\lambda} \frac{\partial}{\partial Z_{\beta\lambda}} - Z_{\lambda\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{\lambda\alpha}}, \quad (3.9)$$

который действует в гильбертовом пространстве и в пространстве термодинамических функций $\hat{Z}$. Формулы (3.8), (3.9) описывают $SU(3)$ -симметрию нормальных магнитных состояний равновесия. Для операторов (3.9) справедливы коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [\hat{G}_{\alpha\beta}(\hat{Z}), \hat{G}_{\mu\nu}(\hat{Z})] &= \hat{G}_{\alpha\nu}(\hat{Z})\delta_{\beta\mu} - \hat{G}_{\mu\beta}(\hat{Z})\delta_{\alpha\nu}, \\ [G_{\alpha\beta}(\hat{Z}), Z_{\mu\nu}] &= Z_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - Z_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Нормальные состояния равновесия (3.7) характеризуются тем, что симметрия гамильтониана (2.1) и симметрия состояния равновесия (3.4), (3.8) совпадают.

Равновесное значение матрицы $g_{\alpha\beta} = \text{Sp } \hat{w} \hat{g}_{\alpha\beta}$ представимо в терминах термодинамического потенциала: $g_{\alpha\beta} = \partial\omega/\partial Z_{\beta\alpha}$. Если $g_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ при $Z_{\alpha\beta} \rightarrow 0$, то этот случай отвечает $SU(3)$ -симметричному парамагнитному состоянию среды. Если же при $Z_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ матрица $g_{\alpha\beta} \neq 0$, этот случай отвечает вырожденным равновесным состояниям. Их анализ мы проведем в следующем разделе. Учитывая формулы (3.6) и соотношение $\hat{U}_{\mathbf{u}} \hat{Q}_{\alpha\beta} \hat{U}_{\mathbf{u}}^+ = \hat{Q}_{\alpha\beta}$, получим, что термодинамический потенциал нормальных состояний равновесия магнетиков со спином $s = 1$ (3.7) с $SU(3)$ -симметрией является функцией скалярных термодинамических параметров $\omega = \omega(Y_0, Y_4 - Y_k^2/2Y_0, Z_2, Z_3)$, где $Z_2 \equiv \text{tr } \hat{Z}^2$, $Z_3 \equiv \text{tr } \hat{Z}^3$. Плотности магнитных степеней свободы в состоянии равновесия представимы в виде

$$\begin{aligned} s_{\alpha} &= \frac{\partial\omega}{\partial Y_{\alpha}} = 4 \frac{\partial\omega}{\partial Z_2} Y_{\alpha} - 6 \frac{\partial\omega}{\partial Z_3} Y_{\alpha\beta} Y_{\beta}, \\ q_{\alpha\beta} &= \frac{\partial\omega}{\partial Y_{\alpha\beta}} = 2 \frac{\partial\omega}{\partial Z_2} Y_{\alpha\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial Z_3} (3(\hat{Y}^2)_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} Y_2 - 3Y_{\alpha} Y_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} Y_{\gamma}^2), \end{aligned}$$

где $Y_2 \equiv \text{tr } \hat{Y}^2$. Термодинамические силы полностью определяют равновесные значения плотности спина и квадрупольной матрицы. Согласно формуле (3.8) состояние равновесия (3.7) инвариантно относительно однородных унитарных преобразований $\hat{U}(\hat{\theta}, \hat{Y}) = e^{i\theta_{\alpha\beta} \hat{G}_{\beta\alpha}(\hat{Y})}$:

$$\hat{U}(\hat{\theta}, \hat{Y}) \hat{w} \hat{U}^+(\hat{\theta}, \hat{Y}) = \hat{w}.$$

Из унитарности оператора $\hat{U}(\hat{\theta}, \hat{Y})$ вытекает, что параметры $\theta_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям $\theta_{\alpha\beta}^* = \theta_{\beta\alpha}$.

4. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И ВЫРОЖДЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим вырожденные состояния равновесия магнетиков со спином $s = 1$, для которых статистический оператор Гиббса имеет вид

$$\hat{w}(Y, \xi) = e^{\Omega - Y_a \hat{\gamma}_a - \nu \hat{F}(\xi)}. \quad (4.1)$$

Согласно концепции квазисредних [24], [26] бесконечно малый оператор $\hat{\hat{F}}$ нарушает свойства симметрии, заданные соотношениями (3.2), (3.4) и (3.8). Он обладает симметрией исследуемой фазы и снимает вырождение состояния равновесия. Источник в распределении Гиббса представляет собой линейный функционал от оператора параметра порядка:

$$\hat{\hat{F}} = \int d^3x (f_a(\mathbf{x}, \xi) \hat{\hat{\Delta}}_a(\mathbf{x}) + \text{э.с.}). \quad (4.2)$$

Здесь $f_a(\mathbf{x}, \xi)$ – некоторая функция от координат и дополнительных термодинамических параметров ξ , сопряженная равновесному значению параметра порядка

$$\Delta_a(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \xi)) = \langle \hat{\hat{\Delta}}_a(\mathbf{x}) \rangle.$$

Равновесное среднее (квазисреднее) в состоянии с нарушенной симметрией определяется формулой

$$\langle \hat{a}(\mathbf{x}) \rangle \equiv \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Sp } \hat{w} \hat{a}(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$ – произвольный квазилокальный оператор. При предельных переходах $V \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$ зависимость от величин ξ в квазисредних сохраняется.

Заметим, что состояния со спонтанно нарушенной симметрией возможны в магнетиках, которые имеют несколько магнитных подрешеток. В этом случае у операторов магнитных величин появляется индекс магнитной подрешетки (n), например, $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}^{(n)}$. Вместо коммутационных соотношений (2.7) в многоподрешеточном случае для генераторов $SU(3)$ -симметрии получим равенство

$$[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}^{(n)}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}^{(m)}] = (\hat{\hat{G}}_{\alpha\nu}^{(n)} \delta_{\beta\mu} - \hat{\hat{G}}_{\mu\beta}^{(n)} \delta_{\alpha\nu}) \delta_{mn}. \quad (4.4)$$

Свойство $SO(3)$ -симметрии гамильтониана записывается как $[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{S}}_\alpha] = 0$, где оператор $\hat{\hat{S}}_\alpha \equiv \sum_m \hat{\hat{S}}_\alpha^{(m)}$ имеет физический смысл полного спинного момента. В случае $SU(3)$ -симметрии гамильтониана в формуле (2.1) оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}$ теперь следует понимать как оператор $\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta} \equiv \sum_m \hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}^{(m)}$. Определим оператор параметра порядка соотношением

$$\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv d_m \hat{\hat{g}}_{\alpha\beta}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

где d_m – некоторые постоянные, которые одновременно не обращаются в ноль или единицу. Из выражений (2.7), (4.5) вытекает равенство

$$[\hat{\hat{G}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{\Delta}}_{\mu\nu}(\mathbf{x})] = \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\nu}(\mathbf{x}) \delta_{\beta\mu} - \hat{\hat{\Delta}}_{\mu\beta}(\mathbf{x}) \delta_{\alpha\nu}. \quad (4.6)$$

Учитывая явный вид (4.5), получим соотношение

$$i[\hat{\hat{P}}_k, \hat{\hat{\Delta}}_a(\mathbf{x})] = -\nabla_k \hat{\hat{\Delta}}_a(\mathbf{x}).$$

Выделим в операторе параметра порядка его симметричную и антисимметричную части с помощью соотношения

$$\hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{\Delta}}_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{x}) + \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\hat{\Delta}}_\gamma(\mathbf{x}). \quad (4.7)$$

Векторный параметр порядка аналогичен параметру порядка для магнетиков со спином $s = 1/2$. Симметричная и бесследовая матрица представляет собой нематический параметр порядка. Учитывая связь (4.7), из выражений (2.3), (4.6) получим соотношения

$$\begin{aligned} i[\hat{\bar{S}}_\lambda, \hat{\Delta}_{\mu\nu}^{(s)}(\mathbf{x})] &= \hat{\Delta}_{\alpha\nu}^{(s)}(\mathbf{x})\varepsilon_{\alpha\mu\lambda} + \hat{\Delta}_{\alpha\mu}^{(s)}(\mathbf{x})\varepsilon_{\alpha\nu\lambda}, & i[\hat{\bar{S}}_\alpha, \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x})] &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Delta}_\gamma(\mathbf{x}), \\ i[\hat{\bar{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\Delta}_\gamma(\mathbf{x})] &= -\varepsilon_{\alpha\gamma\sigma}\hat{\Delta}_{\sigma\beta}^{(s)}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\beta\gamma\sigma}\hat{\Delta}_{\sigma\alpha}^{(s)}(\mathbf{x}), \\ i[\hat{\bar{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\Delta}_{\mu\nu}^{(s)}(\mathbf{x})] &= \frac{\hat{\Delta}_\sigma(\mathbf{x})}{4}(\varepsilon_{\mu\beta\sigma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu} + \varepsilon_{\nu\beta\sigma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определение источника как функционала от оператора параметра порядка (4.5) позволяет описать различный характер нарушения симметрии состояния равновесия магнетиков. Учитывая соотношения (2.5), (2.14), из определений (4.5), (4.7) получим трансформационные свойства векторного и нематического операторов параметра порядка при операции обращения времени:

$$\hat{U}_T \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{U}_T^+ = -\hat{\Delta}_\alpha^*(\mathbf{x}), \quad \hat{U}_T \hat{\Delta}_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{x}) \hat{U}_T^+ = \hat{\Delta}_{\alpha\beta}^{(s)*}(\mathbf{x}).$$

Исследуем вырожденные состояния равновесия, в которых спонтанно нарушена $SO(3)$ - или $SU(3)$ -симметрия состояния равновесия:

$$[\hat{w}, \hat{\bar{S}}_\alpha(\mathbf{Y})] \neq 0, \quad [\hat{w}, \hat{\bar{G}}_{\alpha\beta}(\hat{Z})] \neq 0. \quad (4.9)$$

Эти соотношения следует понимать в смысле предельного перехода (4.3). При этом полагаем, что фазовая инвариантность и трансляционная симметрия сохраняются:

$$[\hat{w}, \hat{\bar{N}}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{\bar{P}}_k] = 0.$$

Учитывая трансляционную инвариантность состояния равновесия, видим, что равновесные средние параметра порядка не зависят от координаты. Термодинамический потенциал вырожденных состояний является функцией от термодинамических сил и дополнительных параметров ξ .

Рассмотрим конкретный вид источников, нарушающих симметрию состояния равновесия. Изучим сначала источник, нарушающий магнитную симметрию состояния равновесия с векторным параметром порядка:

$$\hat{\bar{F}}_1(\boldsymbol{\theta}) = \int d^3x (\xi_\alpha \hat{\bar{U}}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\bar{U}}^+(\boldsymbol{\theta}) + \text{э.с.}), \quad (4.10)$$

где $\hat{\bar{U}}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \hat{\bar{U}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})|_{\mathbf{Y}=0}$. Постоянный комплексный вектор $\xi \equiv \xi_1 + i\xi_2$ фиксирует декартову систему координат в спиновом пространстве. Из соотношений (4.8) следует закон преобразования векторного оператора параметра порядка:

$$\hat{\bar{U}}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\bar{U}}^+(\boldsymbol{\theta}) = R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

Ортогональная матрица поворота $R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta})$ связана с параметром $\boldsymbol{\theta}$ спинового поворота соотношением $R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \equiv (e^{\varepsilon\boldsymbol{\theta}})_{\alpha\beta}$, где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\theta_\gamma \equiv (\varepsilon\boldsymbol{\theta})_{\alpha\beta}$. Структура источника (4.10) с учетом равенства (4.11) приобретает вид

$$\hat{\bar{F}}_1(\hat{R}) = \int d^3x (\xi_\alpha R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}) + \text{э.с.}) \quad (4.12)$$

и соответствует двухосному характеру нарушения симметрии. Статистический оператор Гиббса является функцией термодинамических параметров и ортогональной матрицы поворота. Физические свойства таких состояний аналогичны свойствам рассмотренных ранее магнетиков с полным спонтанным нарушением симметрии для систем со спином $s = 1/2$ [28], [29].

Рассмотрим источник с действительным вектором $\xi \equiv \xi_1$:

$$\hat{F}_2(\mathbf{n}) = \int d^3x \xi_{1\alpha} \hat{U}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{1\alpha}(\mathbf{x}) \hat{U}^+(\boldsymbol{\theta}) = \int d^3x n_\beta(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{1\beta}(\mathbf{x}). \quad (4.13)$$

Статистический оператор Гиббса $\hat{w}(\mathbf{Y}, \mathbf{n})$ в этом случае дополнительно зависит от единичного вектора спиновой анизотропии $n_\beta(\boldsymbol{\theta}) \equiv \xi_{1\alpha} R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta})$ (вектора антиферромагнетизма). Плотность термодинамического потенциала статистического оператора Гиббса (4.1) с источником (4.13) является функцией двух скалярных инвариантов:

$$\omega = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\Omega_\nu}{V} = \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{n}) = \omega(Y^2, \mathbf{Y}\mathbf{n}).$$

Общая ситуация, когда $\mathbf{n} \neq 0$ и $\mathbf{Y} \neq 0$, характеризует ферромагнитное упорядочение. Частный случай $\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{Y} = 0$ при $\lim_{\mathbf{Y} \rightarrow 0} \partial\omega/\partial\mathbf{Y}\mathbf{n} \rightarrow 0$ соответствует антиферромагнитному упорядочению. Если $\lim_{\mathbf{Y} \rightarrow 0} \partial\omega/\partial\mathbf{Y}\mathbf{n} \neq 0$, при $\mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{Y} = 0$ реализуется ферромагнитное упорядочение. Структура источников (4.10) и (4.13) реализуется для магнетиков со спином $s = 1/2$ и $s = 1$.

Рассмотрим источник, нарушающий симметрию состояния равновесия с нематическим параметром порядка:

$$\hat{F}_3(\boldsymbol{\theta}) = \int d^3x \xi_{\alpha\beta} \hat{U}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{\beta\alpha}^{(s)}(\mathbf{x}) \hat{U}^+(\boldsymbol{\theta}).$$

Действительная матрица $\xi_{\alpha\beta}$ симметрична и ее след равен нулю: $\xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\alpha}$, $\xi_{\alpha\alpha} = 0$. Она фиксирует анизотропию магнитных степеней свободы в состоянии равновесия. Унитарное преобразование поворота в спиновом пространстве преобразует нематический оператор параметра порядка следующим образом:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{x}) \hat{U}^+(\boldsymbol{\theta}) = R_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\theta}) R_{\beta\gamma}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{\lambda\gamma}^{(s)}(\mathbf{x}).$$

Поэтому источник принимает вид

$$\hat{F}_3(\hat{w}) = \int d^3x \xi_{\beta\alpha} R_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\theta}) R_{\beta\gamma}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{\lambda\gamma}^{(s)}(\mathbf{x}) = \int d^3x w_{\gamma\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Delta}_{\lambda\gamma}^{(s)}(\mathbf{x}), \quad (4.14)$$

где $w_{\gamma\lambda}(\boldsymbol{\theta})$ – действительная и симметричная матрица. Равновесный статистический оператор Гиббса зависит дополнительно от симметричной матрицы $\hat{w}(\hat{Y}, \hat{w})$. Такой характер нарушения симметрии соответствует состоянию спинового нематика.

Рассмотрим, наконец, спонтанное нарушение симметрии с неэрмитовым оператором параметра порядка (4.7). Источник в гиббсовской экспоненте в силу соотношения (4.6) принимает вид

$$\hat{F}_4(\hat{a}) = \int d^3x (\xi_{\alpha\beta} \hat{U}(\hat{\theta}) \hat{\Delta}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \hat{U}^+(\hat{\theta}) + \text{э.с.}) = \int d^3x (a_{\alpha\beta}(\hat{\theta}) \hat{\Delta}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) + \text{э.с.}), \quad (4.15)$$

где $\hat{\xi}^+ = \hat{\xi}$, $\hat{a}(\hat{\theta}) \equiv \hat{D}(\hat{\theta})\hat{\xi}\hat{D}^{-1}(\hat{\theta})$ и $\hat{D}(\hat{\theta}) \equiv e^{-i\hat{\theta}}$. Источники вида (4.14) и (4.15) возможны для магнетиков со спином $s = 1$. Для магнетиков со спином $s = 1/2$ это нарушение симметрии не реализуется. Такие состояния дополнительно характеризуются эрмитовой матрицей $a_{\alpha\beta}(\hat{\theta})$ и описывают в общем случае двухосное нарушение симметрии в спиновом пространстве. Таким образом, источники (4.10), (4.13)–(4.15) отвечают четырем различным способам нарушения симметрии состояния равновесия в магнетиках со спином $s = 1$.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ МАГНИТНЫХ СОСТОЯНИЙ

При решении задачи классификации состояний равновесия со спонтанно нарушенной симметрией мы будем следовать подходу, изложенному в работе [26]. Для простоты рассмотрим эту задачу в случае, когда термодинамические силы $\mathbf{Y} = 0$ и $\hat{Z} = 0$. При этом в силу соотношений (2.14), (4.5), (4.10) справедливы равенства

$$\text{Sp } \hat{w}_{(1,2,4)} \hat{\Delta}_\alpha \neq 0, \quad \text{Sp } \hat{w}_{(3)} \hat{\Delta}_\alpha = 0, \quad \text{Sp } \hat{w}_{(1,2,3,4)} \hat{\Delta}_{\mu\nu}^{(s)} \neq 0, \quad (5.1)$$

где введено обозначение $\hat{w}_{(n)} \equiv \hat{w}(\hat{F}_{(n)})$, $n = 1, 2, 3, 4$. Условие ненарушенной (остаточной) симметрии состояния равновесия определим соотношением

$$[\hat{w}, \hat{T}(\xi)] = 0. \quad (5.2)$$

Здесь генератор остаточной симметрии $\hat{T}(\xi)$ является линейной комбинацией интегралов движения, в отношении которых симметрия нарушена, ξ – параметры генератора. Если гамильтониан обладает $SO(3)$ -симметрией, а состояние равновесия – нет, генератор остаточной одноосной симметрии имеет вид

$$\hat{T}(\mathbf{b}) \equiv b_\alpha \hat{S}_\alpha. \quad (5.3)$$

Вектор b_α в выражении (5.3) характеризует одноосную анизотропию в спиновом пространстве. Равенства

$$\text{Sp}[\hat{w}_{(n)}, \hat{T}(\mathbf{b})] \hat{\Delta}_\alpha = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}_{(n)}, \hat{T}(\mathbf{b})] \hat{\Delta}_{\mu\nu}^{(s)} = 0 \quad (5.4)$$

определяют параметры порядка в состоянии равновесия и область допустимых значений параметра генератора ненарушенной симметрии b_α . Заметим, что статистический оператор Гиббса $\hat{w}_{(3)}$ не обладает остаточной одноосной симметрией состояния равновесия, так как векторы $\xi_{1\alpha}$ и $\xi_{2\alpha}$ неколлинеарны. Используя явный вид генератора (5.3) и формулы (4.8), (5.4), получим уравнения для векторного и немагнитического параметров порядка

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma \Delta_\beta = 0, \quad b_\sigma (\varepsilon_{\sigma\mu\alpha} \Delta_{\alpha\nu}^{(s)} + \varepsilon_{\sigma\nu\alpha} \Delta_{\alpha\mu}^{(s)}) = 0. \quad (5.5)$$

Из первого уравнения в (5.5) следует коллинеарность векторов параметра генератора ненарушенной симметрии и параметра порядка в состоянии равновесия $\hat{w}_{(1,2,4)}$: $\Delta_\alpha = |\Delta| b_\alpha / b$. Введем суперматрицу соотношением

$$D_{\alpha\lambda}^{\mu\nu}(\mathbf{b}) \equiv b_\sigma (\varepsilon_{\sigma\mu\alpha} \delta_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\sigma\nu\alpha} \delta_{\lambda\mu})$$

и преобразуем второе уравнение в (5.5). Для этого перейдем от двойного суммирования к однократному и представим последнее уравнение в виде

$$D_a^b(\mathbf{b})\Delta_a = 0, \quad (5.6)$$

где индексы a, b принимают значения $1, \dots, 9$. Связь между a, b и индексами, встречавшимися ранее, имеет следующий вид: $11 \equiv 1, 12 \equiv 2, 13 \equiv 3, 21 \equiv 4, 22 \equiv 5, 31 \equiv 6, 32 \equiv 7, 33 \equiv 8, 33 \equiv 9$. В силу симметрии и бесследовости нематического параметра порядка линейные однородные уравнения для пяти его независимых компонент $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_6$ имеют вид, аналогичный (5.6). Нетрудно найти явный вид матрицы $D_a^b(\mathbf{b})$ размера 5×5 и показать, что $\det \hat{D}(\mathbf{b}) = 0$. Решение уравнения (5.5) для нематического параметра порядка существует при произвольном направлении вектора b_α и имеет вид

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(s)} = \Delta_1 \frac{b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta} b^2/3}{b^2}.$$

Рассмотрим генератор остаточной симметрии, отвечающий $SU(3)$ -симметрии гамильтониана:

$$\hat{\hat{T}}(\mathbf{b}, \hat{d}) = b_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta} \hat{\hat{Q}}_{\beta\alpha}. \quad (5.7)$$

В силу эрмитовости этого оператора вектор b_α и матрица $d_{\alpha\beta}$ действительны. Согласно выражению (5.2) имеют место соотношения

$$\text{Sp}[\hat{\hat{w}}_{(n)}, \hat{\hat{T}}(\mathbf{b}, \hat{d})] \hat{\hat{\Delta}}_\alpha = 0, \quad \text{Sp}[\hat{\hat{w}}_{(n)}, \hat{\hat{T}}(\mathbf{b}, \hat{d})] \hat{\hat{\Delta}}_{\mu\nu}^{(s)} = 0. \quad (5.8)$$

Учитывая явный вид генератора ненарушенной симметрии и соотношения (4.8), получим систему уравнений классификации для векторного и нематического параметров порядка:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(b_\beta \Delta_\gamma + 2d_{\beta\sigma} \Delta_\gamma^{(s)}) &= 0, \\ \varepsilon_{\alpha\beta\mu}(d_{\alpha\nu} \Delta_\beta - 2\Delta_{\alpha\nu}^{(s)} b_\beta) + \varepsilon_{\alpha\beta\nu}(d_{\alpha\mu} \Delta_\beta - 2\Delta_{\alpha\mu}^{(s)} b_\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Эти уравнения позволяют определить допустимые значения параметров генератора ненарушенной симметрии, а также найти условия сосуществования векторного и тензорного параметров порядка. Можно показать, что решение с ненулевыми параметрами порядка существует при любых значениях вектора b_α и матрицы $d_{\alpha\beta}$, но в силу громоздкости данного решения мы его приводить не будем.

Рассмотрим некоторые частные случаи решения системы уравнений (5.9). Для состояний $\hat{\hat{w}}_{(3)}$ получим уравнения, определяющие магнитную структуру нематического параметра порядка:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_{\beta\sigma} \Delta_\gamma^{(s)} = 0, \quad (\varepsilon_{\alpha\beta\mu} \Delta_{\alpha\nu}^{(s)} + \varepsilon_{\alpha\beta\nu} \Delta_{\alpha\mu}^{(s)}) b_\beta = 0. \quad (5.10)$$

Введем ортонормированный репер, построенный на векторах

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_\beta n_\gamma = l_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta l_\gamma = m_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\beta m_\gamma = n_\alpha.$$

Рассмотрим первое уравнение в (5.10), полагая матрицу $d_{\alpha\beta}$ одноосной: $d_{\alpha\beta} = d(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$. Будем искать решение для нематического параметра порядка

в виде $\Delta_{\alpha\beta}^{(s)} = \Delta_1(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$, где единичный вектор анизотропии e_α мы разложим по ортонормированному реперу:

$$e_\alpha = Am_\alpha + Bn_\alpha + Cl_\alpha.$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (5.10), получим следующее соотношение: $(\mathbf{m}\mathbf{e})\mathbf{m} \times \mathbf{e} = 0$. Отсюда следуют два решения для направления вектора e_α : $\mathbf{m}||\mathbf{e}$ и $e_\alpha = Bn_\alpha + Cl_\alpha$, $B^2 + C^2 = 1$. Рассмотрим второе уравнение в (5.10). Из него следует равенство $e_\nu(\mathbf{e} \times \mathbf{b})_\mu + e_\mu(\mathbf{e} \times \mathbf{b})_\nu = 0$, откуда получим соотношение $\mathbf{b}||\mathbf{e}$. Для согласования решений уравнений (5.10) требуется выполнение равенства $\mathbf{b} = \mathbf{m}$ для первого решения и равенства $\mathbf{b} = (B\mathbf{n} + C\mathbf{l})/\sqrt{B^2 + C^2}$ для второго.

Рассмотрим случай двухосной матрицы

$$d_{\alpha\beta} = d_1\left(m_\alpha m_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right) + d_2\left(n_\alpha n_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right),$$

где $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_1 \neq d_2$. Найдем решение для нематического параметра порядка в виде одноосной матрицы. Из первого уравнения (5.10) получим два решения для оси анизотропии нематического параметра порядка: $e_\alpha = m_\alpha$ и $e_\alpha = n_\alpha$. Рассмотрим двухосные решения для параметра порядка:

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(s)} = \Delta_1^{(s)}\left(e_\alpha^{(1)}e_\beta^{(1)} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right) + \Delta_2^{(s)}\left(e_\alpha^{(2)}e_\beta^{(2)} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\right).$$

Оси анизотропии разложим по ортонормированному реперу:

$$e_\alpha^{(1)} = A^{(1)}m_\alpha + B^{(1)}n_\alpha + C^{(1)}l_\alpha, \quad e_\alpha^{(2)} = A^{(2)}m_\alpha + B^{(2)}n_\alpha + C^{(2)}l_\alpha.$$

Здесь коэффициенты $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$ удовлетворяют соотношениям

$$(A^{(1,2)})^2 + (B^{(1,2)})^2 + (C^{(1,2)})^2 = 1, \quad A^{(1)}A^{(2)} + B^{(1)}B^{(2)} + C^{(1)}C^{(2)} = 1.$$

Приведем решения для осей анизотропии нематического параметра порядка:

$$e_\alpha^{(1)} = B^{(1)}n_\alpha + \sqrt{1 - B^{(1)2}}l_\alpha, \quad e_\alpha^{(2)} = B^{(2)}n_\alpha + \sqrt{1 - B^{(2)2}}l_\alpha, \quad (5.11)$$

$$\Delta_1^{(s)}B^{(1)}\sqrt{1 - B^{(1)2}} = \Delta_2^{(s)}B^{(2)}\sqrt{1 - B^{(2)2}};$$

$$e_\alpha^{(1)} = l_\alpha, \quad e_\alpha^{(2)} = m_\alpha. \quad (5.12)$$

Два других решения можно получить на основе решения (5.11) с помощью подстановки $A^{(1,2)} \rightarrow B^{(1,2)} \rightarrow C^{(1,2)} \rightarrow A^{(1,2)}$. Легко видеть, что согласованность уравнений (5.10) в случае двухосной матрицы $d_{\alpha\beta}$ при $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_1 - \Delta_2 \neq 0$ возможна только при $b_\alpha \equiv 0$.

6. СВЕРХТЕКУЧИЕ ПАРАМЕТРЫ ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ КЛАССИФИКАЦИИ

Выбор параметра порядка связан с конкретной природой вырождения конденсированной среды. Обычно полагают, что операторы параметра порядка линейны или билинейны по операторам рождения или уничтожения частиц. В настоящем разделе мы дадим такое определение сверхтекучих операторов параметра порядка для

магнетиков со спином $s = 1$, которое приводит к формированию алгебры с аддитивными интегралами движения. Сверхтекучие параметры порядка систем со спином $s = 1$ в терминах полевых бозе-операторов определим формулами

$$\hat{\Delta}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}) - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}\hat{\Delta}(\mathbf{x}). \quad (6.1)$$

Рассмотрим алгебру квантовых скобок Пуассона для аддитивных интегралов движения с операторами параметра порядка, определенными равенствами (6.1). Для векторного оператора параметра порядка найдем, что

$$\begin{aligned} [\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x})] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Delta}_\gamma(\mathbf{x}), & [\hat{N}, \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x})] &= -\hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}), \\ [\hat{Q}_{\mu\nu}, \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x})] &= -\frac{\delta_{\mu\beta}\hat{\Delta}_\nu(\mathbf{x})}{2} - \frac{\delta_{\nu\beta}\hat{\Delta}_\mu(\mathbf{x})}{2} + \frac{\delta_{\mu\nu}\hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x})}{3}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для скалярного оператора параметра порядка имеем

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}(\mathbf{x})] = -2\hat{\Delta}(\mathbf{x}), \quad [\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}(\mathbf{x})] = 0, \quad [\hat{Q}_{\mu\nu}, \hat{\Delta}(\mathbf{x})] = -2\hat{\Delta}_{\mu\nu}(\mathbf{x}). \quad (6.3)$$

Для тензорного оператора параметра порядка получим

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] &= -2\hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), & [\hat{S}_\gamma, \hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] &= i\varepsilon_{\gamma\alpha\rho}\hat{\Delta}_{\rho\beta}(\mathbf{x}) + i\varepsilon_{\gamma\beta\rho}\hat{\Delta}_{\rho\alpha}(\mathbf{x}), \\ [\hat{Q}_{\mu\nu}, \hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})] &= -\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\mu}\hat{\Delta}_{\beta\nu}(\mathbf{x}) + \delta_{\mu\beta}\hat{\Delta}_{\alpha\nu}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\nu}\hat{\Delta}_{\beta\mu}(\mathbf{x}) + \delta_{\nu\beta}\hat{\Delta}_{\alpha\mu}(\mathbf{x})) - \\ &- \frac{1}{3}\left(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\nu\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\right)\hat{\Delta}(\mathbf{x}) + \frac{2}{3}(\delta_{\mu\nu}\hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\beta}\hat{\Delta}_{\mu\nu}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (6.4)$$

В общем случае нарушения фазовой и магнитной симметрии представим источник в виде $\hat{\hat{F}} = \hat{\hat{F}}_1 + \hat{\hat{F}}_2 + \hat{\hat{F}}_3$, где

$$\begin{aligned} \hat{\hat{F}}_1 &\equiv \int d^3x (\eta_\alpha(\mathbf{x})\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) + \eta_\alpha^*(\mathbf{x})\hat{\Delta}_\alpha^+(\mathbf{x})), \\ \hat{\hat{F}}_2 &\equiv \int d^3x (\eta(\mathbf{x})\hat{\Delta}(\mathbf{x}) + \eta^*(\mathbf{x})\hat{\Delta}^+(\mathbf{x})), \\ \hat{\hat{F}}_3 &\equiv \int d^3x (\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \eta_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x})\hat{\Delta}_{\alpha\beta}^+(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Каждое из этих слагаемых отвечает своему характеру нарушения симметрии в состоянии равновесия. В частности, источник $\hat{\hat{F}}_3$ описывает состояния равновесия сверхтекучего нематика.

Определим генератор ненарушенной симметрии для изучаемых магнитных и сверхтекучих состояний равенством

$$\hat{\hat{T}}(\xi) \equiv c\hat{\hat{N}} + b_\alpha\hat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}.$$

Так как этот генератор симметрии есть эрмитов оператор, величины $\xi \equiv c, \mathbf{b}, \hat{d}$ являются действительными. Равновесный статистический оператор Гиббса удовлетворяет соотношению (5.2), откуда следует справедливость соотношений

$$\text{Sp}[\hat{w}, \hat{\hat{T}}(\xi)]\hat{\Delta}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}, \hat{\hat{T}}(\xi)]\hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{Sp}[\hat{w}, \hat{\hat{T}}(\xi)]\hat{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0.$$

Далее необходимо рассматривать скалярный и тензорный параметры порядка совместно. Это связано с тем, что алгебра (4.8) и условие ненарушенной симметрии (6.4) “перепутывают” средние значения этих операторов параметра порядка. Анализируя сверхтекучие состояния, следует иметь в виду, что эти параметры порядка могут быть одновременно отличны от нуля. Принимая во внимание формулы (6.2)–(6.4), получим уравнения классификации состояний равновесия для средних значений параметров порядка:

$$\begin{aligned} c\Delta + d_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} &= 0, & c\Delta_\beta - ib_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma + d_{\beta\rho}\Delta_\rho &= 0, \\ -2c\Delta_{\alpha\beta} + ib_\gamma(\varepsilon_{\gamma\alpha\rho}\Delta_{\rho\beta} + \varepsilon_{\gamma\beta\rho}\Delta_{\rho\alpha}) - d_{\alpha\nu}\Delta_{\nu\beta} - d_{\beta\nu}\Delta_{\nu\alpha} - \\ &- \frac{2}{3}d_{\alpha\beta}\Delta + \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}d_{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Мы получили замкнутую систему уравнений для скалярного и тензорного параметров порядка и отдельное уравнение для векторного параметра порядка. Проанализируем некоторые частные случаи этих уравнений.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $b_\alpha = 0$, $d_{\alpha\beta} \neq 0$. Рассмотрим уравнение классификации для векторного параметра порядка. Условие $\Delta_\alpha \neq 0$ приводит к равенству

$$\det |c\delta_{\beta\gamma} - ib_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + d_{\beta\gamma}| = 0, \quad (6.6)$$

которое связывает величины c , $\mathbf{b}$, $\hat{d}$. Из равенства (6.6) следует уравнение

$$6c^3 - 3cd_2 + 2d_3 = 0, \quad (6.7)$$

где $d_2 = \text{tr } \hat{d}^2$, $d_3 = \text{tr } \hat{d}^3$. Пусть эта матрица одноосная: $d_{\alpha\beta} = d(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)$. Тогда $d_2 = 2d^2/3$ и $d_3 = 2d^3/9$. Уравнение (6.7) приобретает вид $3c^3 - cd^2 + 2d^3/9 = 0$ и имеет три решения: $c_1 = -2d/3$ и $c_{2,3} = d/3$. Таким образом, мы получили структуру векторного параметра порядка в состоянии равновесия: $\Delta_\alpha^{(1)} = |\Delta|e^{i\varphi}m_\alpha$ – упорядочение типа “легкая ось”, φ – произвольная фаза и $\Delta_\alpha^{(2,3)} = |\Delta|(A_{2,3}n_\alpha + B_{2,3}l_\alpha)$ – упорядочение типа “легкая плоскость”. Здесь $A_{2,3}$, $B_{2,3}$ – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие равенству $A_{2,3}^*A_{2,3} + B_{2,3}^*B_{2,3} = 1$. Пусть матрица $d_{\alpha\beta}$ – двухосная (см. раздел 5). В этом случае

$$d_2 = \frac{2(d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2)}{3}, \quad d_3 = \frac{(d_1 - 2d_2)(2d_1 - d_2)(d_1 + d_2)}{9}.$$

Согласно уравнению (6.7) решения кубического уравнения для величины c приобретают вид

$$c_1 = \frac{d_1 + d_2}{3}, \quad c_2 = \frac{d_1 - 2d_2}{3}, \quad c_3 = \frac{d_2 - 2d_1}{3}. \quad (6.8)$$

Из (6.5), (6.8) следуют выражения для векторного параметра порядка:

$$\Delta_\alpha^{(1)} = |\Delta|e^{i\varphi}l_\alpha, \quad \Delta_\alpha^{(2)} = |\Delta|e^{i\varphi}n_\alpha, \quad \Delta_\alpha^{(3)} = |\Delta|e^{i\varphi}m_\alpha.$$

Изучим систему уравнений (6.5) для скалярного и тензорного параметров порядка. Будем искать решение уравнений (6.5) в виде

$$\Delta_{\alpha\beta} = AF_{\alpha\beta}^{(1)} + BF_{\alpha\beta}^{(2)} + CF_{\alpha\beta}^{(3)} + DF_{\alpha\beta}^{(4)} + EF_{\alpha\beta}^{(5)},$$

где матрицы $F_{\alpha\beta}^{(n)}$, $n = 1, \dots, 5$, определяются равенствами

$$F_{\alpha\beta}^{(1)} = m_\alpha m_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}, \quad F_{\alpha\beta}^{(2)} = n_\alpha n_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}, \quad F_{\alpha\beta}^{(3)} = m_\alpha n_\beta + m_\beta n_\alpha, \\ F_{\alpha\beta}^{(4)} = m_\alpha l_\beta + m_\beta l_\alpha, \quad F_{\alpha\beta}^{(5)} = n_\alpha l_\beta + n_\beta l_\alpha,$$

A, B, C, D, E – комплексные числа. Из условия существования ненулевого тензорного параметра порядка получим собственные значения: $c_1 = -2d/3$, $c_2 = d/3$, $c_3 = -d/6$. Отсюда следует, что скалярный и тензорный параметры порядка имеют следующую магнитную структуру:

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(1)} = AF_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad \Delta_{\alpha\beta}^{(2)} = AF_{\alpha\beta}^{(1)} + BF_{\alpha\beta}^{(2)} + EF_{\alpha\beta}^{(5)}, \quad \Delta_{\alpha\beta}^{(3)} = CF_{\alpha\beta}^{(3)} + DF_{\alpha\beta}^{(4)}, \\ \Delta^{(1)} = A, \quad \Delta^{(2)} = -2A + B, \quad \Delta^{(3)} = 0.$$

Для значений $c_1 = -2d/3$ и $c_2 = d/3$ возможно одновременное существование скалярного, векторного и тензорного параметров порядка, не равных нулю.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $b_\alpha = m_\alpha \neq 0$, $d_{\alpha\beta} = 0$. Условие существования ненулевого векторного параметра порядка дает решения

$$c_\pm = \pm b, \quad \Delta_\alpha^{(\pm)} = |\Delta| e^{i\varphi} (n_\alpha \mp i l_\alpha), \\ c = 0, \quad \Delta_\alpha^{(1)} = |\Delta| e^{i\varphi} m_\alpha.$$

Полученный вид параметра порядка аналогичен имеющимся в сверхтекучем ^3He параметрам порядка инертных фаз [25]. Аналогичным образом найдем значения величины c из уравнений для скалярного и тензорного параметров порядка:

$$c_1 = 0, \quad c_{2,3} = \pm \frac{b}{2}, \quad c_{4,5} = \pm b, \\ \Delta_{\alpha\beta}^{(1)} = AF_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad \Delta_{\alpha\beta}^{(2)} = A(F_{\alpha\beta}^{(1)} + 2F_{\alpha\beta}^{(2)} \mp iF_{\alpha\beta}^{(5)}), \quad \Delta_{\alpha\beta}^{(3)} = D(\pm iF_{\alpha\beta}^{(3)} + F_{\alpha\beta}^{(4)}), \\ \Delta^{(1)} = \eta e^{i\varphi} (\eta > 0), \quad \Delta^{(2)} = 0, \quad \Delta^{(3)} = 0.$$

Решению c_1 отвечает “реальная” (“real”) фаза, решения c_4, c_5 совпадают с “аксиальной” (“axial”) фазой [21]. В связи с решениями c_2 и c_3 сделаем следующее замечание. Согласно системе (6.5) и с учетом симметрии и бесследовости тензорного параметра порядка справедливо соотношение

$$c \operatorname{tr} \hat{\Delta}^2 + \operatorname{tr} \hat{d} \hat{\Delta}^2 - \frac{(\operatorname{tr} \hat{d} \hat{\Delta})^2}{3c} = 0.$$

Умножая третье уравнение в (6.5) на $\Delta_{\alpha\beta}^*$, получим равенство

$$-c \operatorname{tr} \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* + i \operatorname{tr} \hat{\varepsilon}(\mathbf{b}) \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* - \operatorname{tr} \hat{d} \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* + \frac{\operatorname{tr} \hat{d} \hat{\Delta} \operatorname{tr} \hat{d} \hat{\Delta}^*}{3c} = 0.$$

Для решения c_2 имеем $c \operatorname{tr} \hat{\Delta}^2 = 0$ и $-c \operatorname{tr} \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* + i \operatorname{tr} \hat{\varepsilon}(\mathbf{b}) \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* = 0$. Видим, что последнее равенство не совпадает с условием Мермина $c \operatorname{tr} \hat{\Delta} \hat{\Delta}^* = 1$, выполнение которого необходимо для “циклического” (“cyclic”) параметра порядка в силу выбранного вида модельного гамильтониана [21].

Из приведенного анализа свойств параметров порядка в состоянии равновесия следует выражение для общего вида генератора ненарушенной симметрии:

$$\widehat{T}(\xi) \equiv c_n \widehat{\hat{N}} + b_\alpha \widehat{\hat{S}}_\alpha + d_{\alpha\beta} \widehat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}.$$

Наряду с осями анизотропии матрицы $d_{\alpha\beta}$ и вектора $\mathbf{b}$ этот оператор является функцией от дискретного набора величин, представимых в терминах скалярных инвариантов этих величин, по которым классифицируются сверхтекучие состояния равновесия. Дискретные значения параметра $c_n(\mathbf{b}, \hat{d})$ нумеруют возможные фазовые состояния равновесия, в которых реализуются одновременно сверхтекучие и магнитные свойства рассматриваемой системы. Алгебра коммутаторов аддитивных интегралов движения и операторов параметра порядка совместно с условием остаточной симметрии в общем случае “перепутывает” уравнения классификации параметров порядка различной тензорной размерности. Найденные решения указывают на существование фазовых состояний, для которых от одного до трех параметров порядка отличны от нуля.

Список литературы

- [1] M. Guidry, L.-A. Wu, Y. Sun, C.-L. Wu, *Phys. Rev. B*, **63**:13 (2001), 134516, 11 pp., arXiv: cond-mat/0012088.
- [2] E. Demler, W. Hanke, S.-C. Zhang, *Rev. Modern Phys.*, **76**:3 (2004), 909–974, arXiv: cond-mat/0405038.
- [3] L. I. Plimak, C. Weiß, R. Walser, W. P. Schleich, *Opt. Commun.*, **264**:2 (2006), 311–320.
- [4] K. Kikoin, M. Kiselev, J. Richer, *Phys. Stat. Sol.*, **6**:9 (2009), 2024–2029.
- [5] A. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P. S. Julianne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M. D. Lukin, A. M. Rey, *Nat. Phys.*, **6** (2010), 289–295.
- [6] Z. Cai, H.-H. Hung, L. Wang, D. Zheng, C. Wu, *Phys. Rev. B*, **88**:12 (2013), 125108, 7 pp.
- [7] X.-W. Guan, M. T. Batchelor, C. Lee, *Rev. Modern Phys.*, **85**:4 (2013), 1633–1691, arXiv: 1301.6446.
- [8] M. A. Gazalilla, A. M. Rey, *Rep. Progr. Phys.*, **77**:12 (2014), 124401, 20 pp., arXiv: 1403.2792.
- [9] M.-S. Chang, Q. Qin, W. Zhang, L. You, M. S. Chapman, *Nat. Phys.*, **1**:2 (2005), 111–116.
- [10] Y. Kawaguchi, M. Ueda, *Phys. Rep.*, **520**:5 (2012), 253–381.
- [11] M. Nauciel-Bloch, G. Sarma, A. Castets, *Phys. Rev. B*, **5**:11 (1972), 4603–4609.
- [12] А. Ф. Андреев, И. А. Гришук, *ЖЭТФ*, **87**:2 (1984), 467–475.
- [13] В. С. Островский, *ЖЭТФ*, **91**:5 (1986), 1690–1701.
- [14] N. Papanicolaou, *Nucl. Phys. B*, **305**:3 (1988), 367–395.
- [15] G. Fáth, J. Sólyom, *Phys. Rev. B*, **51**:6 (1995), 3620–3625.
- [16] J. Bernatska, P. Holod, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:7 (2009), 075401, 14 pp.
- [17] V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, B. A. Ivanov, *Phys. Rev. B*, **87**:22 (2013), 224407, 9 pp., arXiv: 1303.1194.
- [18] М. Ю. Ковалевский, А. В. Глущенко, *ФНТ*, **40**:5 (2014), 560–569.
- [19] C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, T.-L. Ho, *Phys. Rev. A*, **61**:3 (2000), 033607, 5 pp., arXiv: cond-mat/9908018.
- [20] *Phys. Rev. A*, **65**:6 (2002), 063602, 22 pp., arXiv: cond-mat/0203052.
- [21] N. D. Mermin, *Phys. Rev. A*, **9**:2 (1973), 868–872.
- [22] R. Barnett, A. Turner, E. Demler, *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006), 180412, 4 pp., arXiv: cond-mat/0607253.

- [23] C. D. Batista, G. Ortiz, J. E. Gubernatis, *Phys. Rev. B*, **65**:18 (2002), 180402, 4 pp., arXiv: cond-mat/0207073.
- [24] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [25] D. Vollhardt, P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, World Sci., Singapore, 1990.
- [26] М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, М., 2006.
- [27] А. П. Ивашин, М. Ю. Ковалевский, Н. Н. Чеканова, *ФНТ*, **30**:9 (2004), 920–927.
- [28] Д. В. Волков, А. А. Желтухин, Ю. П. Блюх, *ФТТ*, **13**:6 (1971), 1668–1678.
- [29] B. I. Halperin, W. M. Saslow, *Phys. Rev. B*, **16**:5 (1977), 2154–2162.

Поступила в редакцию 8.04.2015,
после доработки 30.06.2015