Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Рошанзамир-Никоу, Х. Гоударзи, Изотонический осциллятор Паули с аномальным магнитным моментом в присутствии эффекта Ааронова–Бома: подход, основанный на преобразовании Лапласа, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 330–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:06:37

© 2016 г. М. Рошанзамир-Никоу*, Х. Гударзи*

ИЗОТОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПАУЛИ С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ПРИСУТСТВИИ ЭФФЕКТА ААРОНОВА–БОМА: ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Сильное магнитное поле значительно воздействует на собственный магнитный момент фермионов. В квантовой электродинамике показано, что аномальный магнитный момент электрона возникает кинематически, в то время как в случае адронов (протонов) он является результатом динамического взаимодействия с внешним магнитным полем. С учетом аномального магнитного момента фермиона найдено точное выражение для энергии связанного состояния и соответствующие собственные функции гамильтониана двумерного нерелятивистского гармонического осциллятора со спином $1/2$ и центростремительным барьером (известного как изотонический осциллятор), включающего член Ааронова–Бома в присутствии сильного магнитного поля. При вычислениях использовано преобразование Лапласа. Обнаружено, что сингулярное решение вносит вклад в фазу волновой функции в начале координат и фаза зависит от спина и магнитного потока.

Ключевые слова: двумерная система, уравнение Паули, эффект Ааронова–Бома, аномальный магнитный момент, изотонический осциллятор, преобразование Лапласа.

DOI: 10.4213/tmf8949

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная (2D) физика привлекла внимание исследователей в начале 1980-х годов в основном благодаря значительным экспериментальным открытиям новых явлений в физике конденсированных сред. Найденные экспериментально эффекты были очень скоро связаны с релятивистскими квантовыми теориями. Таким образом, изучение релятивистских и нерелятивистских энергетических уровней заряженных 2D-фермионов может быть чрезвычайно важным. Одним из самых интересных 2D-явлений является эффект Ааронова–Бома [1], который связан с прохождением

*Department of Physics, School of Sciences, Urmia University, Urmia, Iran.
E-mail: m.roshanzamir@urmia.ac.ir, h.goudarzi@urmia.ac.ir, goudarzia@phys.msu.ru

заряженных частиц сквозь замкнутый контур, пронизываемый магнитным потоком. Этот эффект был предметом значительного внимания с теоретической и экспериментальной точек зрения [2] и анализировался в многочисленных работах в рамках нерелятивистской и релятивистской физики (см., например, работы [3], [4]). В работе [5] обсуждается значимость электромагнитных потенциалов в квантовой теории с использованием нерелятивистского бесспинового уравнения Шредингера. В этом случае благодаря взаимодействию Зеемана спина с трубкой тока необходимость использования потенциала с дельта-функцией понятна: он измеряется при конечном радиусе и, следовательно, может стремиться к нулю. Таким образом, можно использовать некоторые решения, которые являются сингулярными в начале координат. Если применять этот метод для изучения влияния спина в рассеянии Ааронова–Бома, то интересно рассмотреть случай, когда спин воздействует на макроскопические свойства системы фермионов со спином $1/2$, переносящих поток.

Описание воздействия спина в нерелятивистской квантовой механике опирается на уравнение Паули. Влияние аномального магнитного момента фермионов на его взаимодействие с сильным внешним магнитным полем составляет предмет физики высоких энергий. Анализ точных энергетических спектров нерелятивистских и релятивистских частиц может быть очень важным во многих областях теоретической физики, но его можно провести только с использованием небольшого числа потенциалов, таких как псевдогармонический потенциал [6], кулоновский потенциал [7], потенциал гармонического осциллятора [8] и т. д. Следовательно, поиски новых семейств таких потенциалов бесспорно важны. Наиболее интересной системой в этой категории является гармонический осциллятор, который в классической физике представляет собой изохронное колебание, а в квантовой – равноотстоящие друг от друга энергетические уровни [9]. Потенциал изотонического осциллятора, состоящего из гармонического осциллятора и центростремительного барьера, имеет большое значение в квантовой оптике [10], теории когерентных состояний [11], при анализе изохронных осцилляторов [12].

Изотонический осциллятор задается следующим потенциалом [13] (см. рис. 1):

$$V_{\text{isotonic}}(r) = P^2 r^2 + N^2 r^{-2}, \quad P^2 = \frac{1}{2} \omega^2, \quad N^2 = \frac{1}{2} G. \quad (1)$$

Этот потенциал важен, потому что он связан с суперсимметричной квантовой механикой [14]. Его двумерная версия является суперинтегрируемой и соответствует так называемой системе Смородинского–Винтерница [15], а центростремительный член связывает его с системой Каложеро–Мозера [16].

В последние годы подход, опирающийся на преобразование Лапласа, можно считать практически новым формализмом, он позволяет применять мощное интегральное преобразование при анализе дифференциальных уравнений квантовой механики [17], когда дифференциальное уравнение второго порядка можно свести к уравнению первого порядка. Такой метод был использован Шредингером в его первой статье, посвященной квантово-механической модели атома водорода [18], и затем Свейнсоном с соавторами [19], которые изучали рекуррентные соотношения между радиальными волновыми функциями атома водорода.

Целью настоящей работы является решение радиального 2D-уравнения Паули для изотонического потенциала при наличии аномального магнитного момента фер-

Рис. 1. Изотонический потенциал $V_{\text{isotonic}}(r)$ и соответствующие волновые функции $f^{(in)}(r)$ и $f^{(out)}(r)$ (при $r > 0$) для $G = 0.75$, $\mathcal{M} = 1$, $n = 2$, $m = 2$ и $\varrho = 0.8$ при $\omega = 0.1$ (а), $\omega = 0.5$ (б) и $\omega = 1.0$ (в) для областей входа и выхода.

мионов и поля Ааронова–Бома с помощью преобразования Лапласа. Работа построена следующим образом. Подход, использующий преобразование Лапласа, кратко вводится в разделе 2. Точные связанные состояния радиального 2D-уравнения Паули для изотонического осциллятора, на который воздействует аномальный магнитный момент в присутствии поля Ааронова–Бома, энергетические спектры и соответствующие волновые функции даются в разделе 3. Наконец, раздел 4 посвящен выводам.

2. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть функция $F(t)$ задана при $t > 0$. Преобразование Лапласа функции $F(t)$, обозначаемое как $\mathcal{L}\{F(t)\}$, определяется следующим образом [20]:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt. \quad (2)$$

Считается, что преобразование Лапласа функции $F(t)$ существует, если приведенный выше интеграл сходится для некоторого значения s , иначе оно не существует. Функция называется кусочно-непрерывной на интервале $\alpha < t < \beta$, если интервал может быть разбит на конечное число интервалов, на каждом из которых функция является непрерывной и имеет конечные правые и левые пределы. Если существуют действительные константы $M > 0$ и γ такие, что $|F(t)| < Me^{\gamma t}$ для достаточно больших t , то говорят, что $F(t)$ является функцией экспоненциального порядка γ при $t \rightarrow \infty$. Для существования преобразования Лапласа при всех $s > \gamma$ достаточно, чтобы функция $F(t)$ была кусочно-непрерывной на каждом конечном интервале $0 \leq t \leq N$ и являлась функцией экспоненциального порядка γ для $t > N$.

Если $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} &= s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F^{(1)}(0) - \dots - F^{(n-1)}(0), \\ \mathcal{L}\{t^n F(t)\} &= (-1)^n f^{(n)}(s), \end{aligned} \quad (3)$$

где индекс (n) обозначает n -ю производную по t и s .

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Считая, что магнитное поле Ааронова–Бома $\mathcal{H}$ перпендикулярно плоскости, можно заключить, что поток

$$\phi = -e \int_0^\infty \mathcal{H}(r) r dr$$

является конечным и ненулевым. Здесь поток, который переносится каждой частицей внутри цилиндра с радиусом R , берется в виде

$$e\mathcal{H}(r) = -\frac{\varrho}{R} \delta(r - R), \quad (4)$$

и это означает, что соответствующая форма калибровочного потенциала в кулоновской калибровке записывается как

$$eA_i = \begin{cases} \varrho \frac{\epsilon_{ij} r_j}{r^2}, & r > R, \\ 0, & r < R, \end{cases} \quad (5)$$

где ϱ , ϵ_{ij} и r_j суть соответственно конечный ненулевой параметр потока, тензор Леви-Чивита и радиус-вектор в двух измерениях.

Рассмотрим квантово-механическую систему, состоящую из частицы с нерелятивистским спином $1/2$ и массой $\mathcal{M}$, движущейся с импульсом $\vec{p}$ в электромагнитном поле, которая испытывает воздействие со стороны изотонического осциллятора во вспомогательном поле Ааронова–Бома, и с аномальным магнитным моментом в двух измерениях. Эта система в естественных единицах ($\hbar = 1$) описывается уравнением Паули

$$\left(\frac{1}{2\mathcal{M}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + V_{\text{isotonic}}(r) + \mu \sigma_z \mathcal{H} \right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}), \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули, а $\boldsymbol{\pi} = (-i\nabla - (e/c)\mathbf{A})$ и μ суть обобщенный импульс и аномальный магнитный момент фермионов соответственно. С помощью формул (4) и (5) уравнение (6) записывается в полярных координатах следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{(\varrho \theta(r-R))^2}{r^2} + \frac{2\varrho \theta(r-R)}{r^2} L_z - \right. \\ \left. - \mathcal{M}((\omega^2 r^2 + Gr^{-2}) - 2\mu \mathcal{H}) + \mathcal{K}^2 + e\mathcal{H}\sigma_z \right) \psi(r, \varphi) = 0, \quad (7)$$

где $\mathcal{K}^2 = 2\mathcal{M}E$ и $\theta(x)$ – единичная ступенька. Записывая полную волновую функцию как $\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f_+(r) \\ f_-(r) \end{pmatrix} e^{im\varphi}$, сводим уравнение (7) к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + \varrho \theta(r-R))^2}{r^2} - \right. \\ \left. - \mathcal{M}((\omega^2 r^2 + Gr^{-2}) - 2\mu \mathcal{H}) + \mathcal{K}^2 - \frac{\varrho \varsigma}{R} \delta(r-R) \right) f_{\varsigma}(r) = 0, \quad (8)$$

в котором $\varsigma = \pm$ представляет ориентацию спина. Уравнение (8) дает следующий набор уравнений в двух областях входящего и выходящего магнитных потоков:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \mathcal{M}((\omega^2 r^2 + Gr^{-2}) - 2\mu \mathcal{H}) + \mathcal{K}^2 - \frac{(m + \varrho)^2}{r^2} \right) f_{\varsigma}(r) = 0, \quad r > R, \quad (9)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \mathcal{M}((\omega^2 r^2 + Gr^{-2}) - 2\mu \mathcal{H}) + \mathcal{K}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f_{\varsigma}(r) = 0, \quad r < R. \quad (10)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение в подходящем виде для применения преобразования Лапласа, мы записываем радиальную волновую функцию как $f_{\varsigma}(r) = u^{-\gamma/2} \Phi(u)$, где $u = r^2$, так что уравнение (9) приобретает вид

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} - (\gamma - 1) \frac{d}{du} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\gamma^2 u^{-1} + \mathcal{K} - \mathcal{M}(\omega^2 u - Gu^{-1} - 2\mu \mathcal{H}) - (m + \varrho)^2 u^{-1}) \right] \Phi(u) = 0. \quad (11)$$

Из физических соображений волновые функции в пределе $u \rightarrow \infty$ должны быть конечны, таким образом, необходимо положить $\gamma = \sqrt{\mathcal{M}G + (m + \varrho)^2}$.

Используя преобразование Лапласа (2), из уравнения (11) получаем неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка для $f(s)$:

$$\left(s^2 - \frac{\mathcal{M}\omega^2}{4}\right) \frac{df(s)}{ds} + \left(\left(\xi + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{K}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{M}\mu\mathcal{H}\right) f(s) = 0, \quad (12)$$

где $\xi = \gamma - 1/2$. Его решение имеет вид

$$f(s) = \mathcal{N}_1 \left(s + \frac{\omega\sqrt{\mathcal{M}}}{2}\right)^{-\frac{\mathcal{T}^2}{4\omega\sqrt{\mathcal{M}}} - \frac{1}{2}(\xi + \frac{3}{2})} \left(s - \frac{\omega\sqrt{\mathcal{M}}}{2}\right)^{\frac{\mathcal{T}^2}{4\omega\sqrt{\mathcal{M}}} - \frac{1}{2}(\xi + \frac{3}{2})}, \quad (13)$$

где $\mathcal{N}_1$ – нормировочная константа и $\mathcal{T}^2 = \mathcal{K}^2 + 2\mathcal{M}\mu\mathcal{H}$. Заметим, что выражение

$$\left(\frac{s - \omega\sqrt{\mathcal{M}}/2}{s + \omega\sqrt{\mathcal{M}}/2}\right)^{\frac{\mathcal{T}^2}{4\omega\sqrt{\mathcal{M}}} - \frac{1}{2}(\xi + \frac{3}{2})}$$

является многозначной функцией, а волновые функции должны быть однозначными; таким образом, мы имеем условие

$$\frac{\mathcal{T}^2}{4\omega\sqrt{\mathcal{M}}} - \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{3}{2}\right) = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Учитывая это условие и разлагая в ряд решение (13), мы получаем

$$f(s) = \mathcal{N}_2 \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{(n-j)! j!} (\omega\sqrt{\mathcal{M}})^j \left(s + \frac{\omega\sqrt{\mathcal{M}}}{2}\right)^{-(\xi + 3/2 + j)}. \quad (15)$$

Совершая обратное преобразование Лапласа, получаем решение уравнения (11):

$$\Phi(u) = \mathcal{N}_3 u^{(\xi+1)/2} e^{-u\omega\sqrt{\mathcal{M}}/2} \mathbb{K}(-n, \xi + 3/2, u), \quad (16)$$

где $\mathbb{K}(-n, \varrho, u)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [21] и $\mathcal{N}_3$ – константа. Отсюда получаем компоненты радиальных волновых функций изотонического осциллятора при воздействии вспомогательного поля Ааронова–Бома в присутствии аномального магнитного момента для двух областей в терминах вырожденных гипергеометрических функций: при $r > R$

$$f_{\zeta}^{(\text{out})}(r) = \mathcal{N}_{\text{out}} e^{(-\omega\sqrt{\mathcal{M}}/2)r^2} r^{\sqrt{G\mathcal{M} + (m+\varrho)^2} + 1/2} \mathbb{K}(-n, \sqrt{G\mathcal{M} + (m+\varrho)^2} + 1, r^2),$$

при $r < R$

$$f_{\zeta}^{(\text{in})}(r) = \mathcal{N}_{\text{in}} e^{(-\omega\sqrt{\mathcal{M}}/2)r^2} r^{(\sqrt{G\mathcal{M} + m^2} + 1/2)} \mathbb{K}(-n, \sqrt{G\mathcal{M} + m^2} + 1, r^2).$$

Фазовый сдвиг между вышеприведенными волновыми функциями можно увидеть на рис. 1.

Чтобы изучить роль дельта-функции Дирака, используем условия непрерывности при $r = R$:

$$f_{\zeta}^{(\text{out})}(R + \epsilon) = f_{\zeta}^{(\text{in})}(R - \epsilon), \quad R \frac{df_{\zeta}(r)}{dr} \Big|_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \varrho_{\zeta} f_{\zeta}(r), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (17)$$

что позволяет после некоторых вычислений написать

$$\begin{aligned} f_{\zeta}(r) = & \mathcal{N}_{\text{in}} e^{(-\omega \sqrt{\mathcal{M}/2})r^2} \left\{ R^{\sqrt{G\mathcal{M}+m^2}-\sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2}} \times \right. \\ & \times \frac{\sqrt{G\mathcal{M}+m^2} + \frac{1}{2} + \varrho_{\zeta} + \frac{2n}{\sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1}} R^2}{\sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2} + \frac{1}{2} + \varrho_{\zeta} + \frac{2n}{\sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1}} R^2} \Big\} \times \\ & \times r^{\sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2}+1/2} \mathbb{K}(-n, \sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2}+1, r^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где поведение вырожденной гипергеометрической функции Куммера и ее производной рассматривается в низшем порядке по R :

$$\mathbb{K}(\alpha, \beta; r^2) \Big|_{r=R} \approx 1, \quad \frac{d}{dr} \mathbb{K}(\alpha, \beta; r^2) \Big|_{r=R} = \frac{2\alpha}{\beta} R.$$

В результате можно получить, что при использовании подхода с преобразованием Лапласа сингулярное решение вносит вклад, если наложить ограничение $R \rightarrow 0$ ($R^2 \approx 0$), в котором оба из условий

$$\sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2} = -\sqrt{G\mathcal{M}+m^2} - \varrho_{\zeta}, \quad \sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2} < 1$$

выполняются автоматически. Результаты согласуются с полученными в работе [5], где показано, что фаза зависит от спина и магнитного потока. Нормировочная константа N_{out} может быть вычислена в явном виде. Используя условие нормировки $\int_0^{\infty} |R_n(r)|^2 dr = 1$, легко можно получить, что

$$\mathcal{N}_{\text{out}} = \frac{(\omega \sqrt{\mathcal{M}})^{(\xi+3/2)/2}}{\Gamma(\xi+3/2)} \left(\frac{2\Gamma(n+\xi+3/2)}{n!} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Соответствующие энергетические спектры получаются из уравнения (14):

$$E_{n,m}^{(\text{out})} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\mathcal{M}}} (2n + \sqrt{G\mathcal{M}+(m+\varrho)^2} + 1) - \mu \mathcal{H}, \quad (20)$$

где ω обозначает угловую частоту осциллятора, а константа G равна $\epsilon(\epsilon+1)$. Заметим, что эта константа должна быть больше $-1/4$, а ϵ может быть любым действительным числом.

Зависимости внешних энергетических уровней от параметра магнитного потока и аномального магнитного момента изображены на рис. 2 и 3.

Рис. 2. Зависимость энергии $E_{m,n}^{(\text{out})}$ от параметра ϱ магнитного потока при $\omega = 10$, $n = 3$, $G = 6$, $\mathcal{M} = 18$, $\mathcal{H} = 1$ и $\mu = 0.5$ для различных $m = 0, 1, 2, 3$.

Рис. 3. Зависимость энергии $E_{m,n}^{(\text{out})}$ от параметра ϱ магнитного потока при $\omega = 10$, $n = 3$, $G = 6$, $\mathcal{M} = 18$, $\mathcal{H} = 1$ и $m = 2$ для различных $\mu = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$.

Следует заметить, что радиальную волновую функцию во внутренней области можно легко получить подстановкой $\varrho = 0$:

$$f_{\zeta}^{(\text{in})}(r) = \frac{(\omega\sqrt{\mathcal{M}})^{(\sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1})/2}}{\Gamma(\sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1})} \left(\frac{2\Gamma(n + \sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1})}{n!} \right)^{1/2} \times \\ \times e^{(-\omega\sqrt{\mathcal{M}}/2)r^2} r^{\sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1}/2} \mathbb{K}(-n, \sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1}, r^2). \quad (21)$$

Соответствующие собственные значения энергии равны

$$E_{n,m}^{(\text{in})} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\mathcal{M}}} (2n + \sqrt{G\mathcal{M}+m^2+1}) - \mu\mathcal{H}. \quad (22)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрено двумерное уравнение Паули для изотонического осциллятора с аномальным магнитным моментом в присутствии поля Ааронова–Бома. Решения этого уравнения для связанных состояний при наличии внешнего сильного магнитного поля изучены в рамках подхода, использующего преобразование Лапласа. Волновые функции выражены в терминах вырожденных гипергеометрических функций Куммера. Притягательным примером в классе точно решаемых гамильтонианов является гамильтониан изотонического осциллятора, представляющего собой обобщение трехмерного гармонического осциллятора. Интересной чертой этого гамильтониана является существование сингулярности, которая совпадает с сингулярностью гамильтониана гармонического осциллятора, содержащего особенность в виде пика.

Обнаружено влияние квантовых чисел вращения $m \neq 0$ на энергетические состояния, приводящее к расщеплению энергетических уровней под влиянием внешнего магнитного поля. Поток Ааронова–Бома вызывает перекрытие энергетических состояний с $m \neq 0$ при большой интенсивности потока. Показано, что в присутствии потока Ааронова–Бома вырождение частично снимается для состояний с $m > 0$. Качественный вид изотонического потенциала и соответствующих входящих и исходящих волновых функций изображен на рис. 1 для $G = 0.75$, $\mathcal{M} = 1$, $n = 2$, $m = 2$ и $\varrho = 0.8$ при различных угловых частотах. Волновые функции как функции от r все сильнее сжимаются (при $r > 0$) по мере того, как угловые частоты увеличиваются, что показано на рис. 1. Очевидно, что в отсутствии потока Ааронова–Бома, при $\varrho = 0$, энергетический спектр (22) превращается в дискретный спектр изотонического потенциала. При $\varrho \neq 0$ положение энергетических уровней зависит от магнитного потока.

Энергетический спектр содержит дополнительный интересный член $G\mathcal{M} + (m + \varrho)^2$, имеющий аналогию с квантовым дефектом [22], который с точностью до постоянного множителя совпадает со сдвигом фазы рассеяния. Вклад параметра ϱ в энергетические состояния показан на рис. 2 для $\omega = 10$, $n = 3$, $G = 6$, $\mathcal{M} = 18$, $\mathcal{H} = 1$ и $\mu = 0.5$ при $m = 0, 1, 2, 3$. Влияние аномального магнитного момента на энергетические уровни в случае $m = 2$ для $\mu = 0.25, 0.50, 0.75, 1$ показано на рис. 3; мы можем видеть линейную зависимость энергетических состояний от аномальных магнитных моментов.

Подведем итог. Решение, сингулярное в начале координат, вносит вклад в волновые функции и зависимость фазы от спина и магнитного потока. Мы полагаем, что применение подхода с преобразованием Лапласа к подобным системам является надежным и эффективным при решении задач со сложными потенциалами в рамках нерелятивистского подхода.

Список литературы

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [2] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov–Bohm Effect, Lecture Notes in Physics*, **340**, Springer, Berlin, 1989.
- [3] W. C. Henneberger, *Phys. Rev. A.*, **22**:4 (1980), 1383–1388.
- [4] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:5 (1990), 503–506.
- [5] C. R. Hagen, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:18 (1991), 3119–3149.

- [6] S. Ikhdair, R. Sever, *J. Mol. Struct.: Theochem*, **806**:1–3 (2007), 155–158.
- [7] S.-H. Dong, Z.-Q. Ma, *Phys. Lett. A*, **312**:1–2 (2003), 78–83.
- [8] R. Dutt, A. Gangopadhyaya, C. Rasinariu, U. Sukhatme, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:19 (2001), 4129–4142, arXiv: hep-th/0011096.
- [9] Y. Weissman, J. Jortner, *Phys. Lett. A*, **70**:3 (1979), 177–179.
- [10] J.-S. Wang, T.-K. Liu, M.-S. Zhan, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **2**:6 (2000), 758–763.
- [11] K. Thirulogasanthar, N. Saad, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **37**:16 (2004), 4567–4577, arXiv: math-ph/0403009.
- [12] O. A. Chalykh, A. P. Veselov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 1 (2005), 179–183, arXiv: math-ph/0409062.
- [13] M. Roshanzamir-Nikou, H. Goudarzi, *Phys. Scr.*, **89**:1 (2014), 015001, 11 pp.
- [14] J. Casahorrán, *Phys. A*, **217**:3 (1995), 429–439.
- [15] C. Grosche, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, *Fortschr. Phys.*, **43**:6 (1995), 523–563.
- [16] E. Corrigan, R. Sasaki, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:33 (2002), 7017–7061.
- [17] G. Doetsch, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1961.
- [18] E. Schrödinger, *Ann. Phys.*, **79**:4 (1926), 361–376.
- [19] R. A. Swainson, G. W. F. Drake, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:1 (1991), 79–94.
- [20] M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum Publ., New York, 1965.
- [21] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
- [22] M. J. Seaton, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, **118** (1958), 504–518.

Поступила в редакцию 20.04.2015,
после доработки 8.06.2015