Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Менникен, А. К. Мотовилов, Операторная интерпретация резонансов, порождаемых 2×2 -матричными гамильтонианами, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 163–181

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:52:38

© 1998 г.

Р. Менникен*, А. К. Мотовилов†

ОПЕРАТОРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗОНАНСОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ (2 × 2)-МАТРИЧНЫМИ ГАМИЛЬТониАНАМИ

Рассматривается аналитическое продолжение трансфер-функции (2×2) -матричного гамильтониана на нефизические листы римановой поверхности энергии. Строится семейство несамосопряженных операторов, спектр каждого из которых воспроизводит определенную часть спектра трансфер-функции, включающую резонансы на нефизических листах, соседних по отношению к физическому листу. Доказываются полнота и базисность систем корневых векторов трансфер-функции, содержащих в том числе и резонансные векторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать гамильтонианы вида

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A_0 & B_{01} \\ B_{10} & A_1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

действующие в ортогональной сумме $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ сепарабельных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$. Предполагается, что компоненты $A_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ и $A_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ — самосопряженные операторы с областями определения $\mathcal{D}(A_0)$ и $\mathcal{D}(A_1)$, соответственно. Операторы связи каналов $B_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$, $i \neq j$, считаются ограниченными операторами, т.е. $B_{ij} \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$, причем $B_{01} = B_{10}^*$. При таких предположениях матрица $\mathbf{H}$ представляет собой самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathbf{H}) = \mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{D}(A_1)$.

Операторы вида (1.1) возникают во многих физических задачах [1–7] обычно как результат разбиения гильбертова пространства $\mathcal{H}$ квантовой системы на два “канальных” подпространства. Одно из них, скажем $\mathcal{H}_0$, может интерпретироваться как пространство “внешних” (например, адронных, как в [1, 2]) степеней свободы. Второе пространство $\mathcal{H}_1$ может ассоциироваться с “внутренней” (например, кварковой [1, 2]) структурой системы.

*Department of Mathematics, University of Regensburg, Regensburg, Germany

†Лаборатория теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

В спектральной теории операторов вида (1.1) важная роль принадлежит так называемым трансфер-функциям

$$M_i(z) = A_i - z + V_i(z), \quad (1.2)$$

где $V_i(z) = -B_{ij}(A_j - z)^{-1}B_{ji}$, $i = 0, 1$, $j \neq i$.

Особая роль трансфер-функций $M_i(z)$ делается понятной уже из того факта, что резольвента оператора (1.1) явно выражается в терминах обратных трансфер-функций $M_0^{-1}(z)$ или $M_1^{-1}(z)$. Во многих случаях изучение спектральных свойств трансфер-функций оказывается более простой задачей, чем непосредственное исследование спектральной задачи для полной матрицы (1.1). Редукция спектральной задачи $\mathbf{H}\Psi = z\Psi$ для “двухканального” гамильтониана $\mathbf{H}$ вида (1.1) к спектральным задачам $M_i(z)\psi^{(i)} = 0$ является известным приемом квантовой физики.

В работах [8, 9] был поставлен следующий вопрос: можно ли ввести оператор H_i , $i = 0, 1$, не зависящий от спектрального параметра z , такой, что равенство $H_i\psi^{(i)} = z\psi^{(i)}$ автоматически влечет за собой равенство $M_i(z)\psi^{(i)} = 0$? Очевидно, что если бы такой оператор был найден, то, обращаясь к хорошо известным утверждениям из спектральной теории линейных операторов, в терминах H_i мы могли бы ответить, например, на вопросы относительно полноты и базисности систем собственных векторов трансфер-функции $M_i(z)$. Строгий ответ на сформулированный вопрос был получен в работах [10, 11] для случая, когда спектры $\sigma(A_0)$ и $\sigma(A_1)$ компонент A_0 и A_1 отделены друг от друга, т.е.

$$\text{dist}\{\sigma(A_0), \sigma(A_1)\} > 0. \quad (1.3)$$

Искомый оператор H_i строился в [10, 11] как решение нелинейного операторного уравнения

$$H_i = A_i + V_i(H_i), \quad i = 0, 1, \quad (1.4)$$

где $V_i(Y_i)$ – операторнозначная функция на пространстве линейных операторов в $\mathcal{H}_i$ такая, что $V_i(Y_i)\psi^{(i)} = V_i(z)\psi^{(i)}$ для любого собственного вектора $\psi^{(i)}$, отвечающего собственному числу z оператора Y_i . Отметим, что ранее уравнения типа (1.4) использовались в статье [12].

Разрешимость уравнения (1.4) была доказана [11] в предположении

$$\|B_{ij}\|_2 < \frac{1}{2} \text{dist}\{\sigma(A_0), \sigma(A_1)\},$$

где $\|B_{ij}\|_2$ – норма Гильберта–Шмидта операторов B_{ij} . При этом выяснилось, что задача построения операторов H_i тесно связана с проблемой поиска инвариантных подпространств матрицы $\mathbf{H}$, допускающих представление в виде графиков некоторых ограниченных операторов $Q_{ji}: \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_j$. Дело в том, что решения H_i , $i = 0, 1$, уравнений (1.4) в работах [10, 11] имеют вид $H_i = A_i + B_{ij}Q_{ji}$, где Q_{ji} – только что упомянутые операторы. Последние удовлетворяют стационарным уравнениям Риккати

$$Q_{ji}A_i - A_jQ_{ji} + Q_{ji}B_{ij}Q_{ji} = B_{ji}, \quad i, j = 0, 1, \quad j \neq i, \quad (1.5)$$

и с этими операторами связано преобразование подобия, приводящее матрицу $\mathbf{H}$ к блочно-диагональному виду $\mathbf{H}' = \text{diag}\{H_0, H_1\}$. При условиях, использовавшихся в [10, 11], Q_{ij} – сжимающие операторы.

Идея блочной диагонализации (2×2) -матричных гамильтонианов в терминах инвариантных подпространств, допускающих представление в виде графиков некоторых операторов, является достаточно известной. В частности, она послужила отправной точкой для ряда работ по физике элементарных частиц [3–5]. Эта идея использовалась в работе [6] при построении инвариантных подпространств для самосопряженных операторов, возникающих в статистической физике. Доказательство разрешимости уравнений (1.5) в [6] проводилось также лишь в случае, когда выполнено условие (1.3) разделения спектров компонент A_0 и A_1 , а нормы операторов связи каналов B_{ij} достаточно малы. В недавней работе [13] существование инвариантных подпространств, являющихся графиками некоторых операторов $Q_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, доказывается для случая произвольных ограниченных операторов B_{ij} . Однако вместо (1.3) в [13] используется существенно иное условие, состоящее в том, что спектр одного из канальных операторов A_i , $i = 0, 1$, должен располагаться строго ниже спектра другого, например $\max \sigma(A_1) < \min \sigma(A_0)$. Вскоре [14] результат работы [13] был перенесен на случай, когда $\max \sigma(A_1) \leq \min \sigma(A_0)$ и операторы B_{ij} могут быть уже неограниченными, но такими, что при $\alpha_0 < \min \sigma(A_0)$ произведение $(A_0 - \alpha_0)^{-1/2} B_{01}$ задает ограниченный оператор. Указанные условия были затем несколько ослаблены в работе [15]. Вместо явных условий на спектры A_i в [15] используется условие на спектр трансфер-функции $M_1(z)$, требующее существования регулярной точки $\beta > \min \sigma(A_1)$ для функции M_1 такой, что $M_1(\beta) \leq \alpha_1 < 0$. Спектральная компонента H_i матрицы $\mathbf{H}$, строящаяся в [13–15], все еще удовлетворяет уравнению (1.4), по крайней мере, в случае, когда A_j при $j \neq i$ является ограниченным оператором.

В данной работе мы исследуем уравнение (1.4) в спектральной ситуации, которая радикально отличается от ситуаций, рассматривавшихся в работах [6, 10, 11, 13–15]. А именно, мы с самого начала предполагаем, что $\sigma(A_0) \cap \sigma(A_1) \neq \emptyset$. Более того, особый интерес для нас представляет как раз случай, когда спектр одного из операторов A_j , скажем A_1 , частично или полностью вложен в непрерывный спектр другого такого оператора, в данном случае A_0 .

Мы предполагаем, что операторы связи каналов B_{ij} таковы, что $M_1(z)$ как операторнозначная функция допускает аналитическое продолжение под разрезом вдоль ветвей абсолютно непрерывного спектра $\sigma_{ac}(A_0)$ оператора A_0 . В разделе 2 дано описание условий на B_{ij} , делающих такое продолжение $M_1(z)$ возможным.

Рассматриваемая задача тесно связана с резонансами, порождаемыми матрицей $\mathbf{H}$. По поводу определения резонансов и истории этого понятия см., например, [16]. Недавний обзор литературы по резонансам может быть найден в [17]. В данной работе под резонансами понимается дискретный спектр трансфер-функции $M_1(z)$ на нефизических листах ее римановой поверхности.

Мы предполагаем, что непрерывный спектр блок-компоненты A_0 состоит из m ($1 \leq m < \infty$) отделенных друг от друга интервалов. Это приводит в разделе 3 к 2^m способам аналитического продолжения трансфер-функции $M_1(z)$ на нефизические листы, соседние по отношению к физическому листу. В результате возникает 2^m вариантов задания функции $V_1(Y)$ и как следствие 2^m различных вариантов уравнения (1.4), которое приобретает теперь вид (3.6) (см. далее). Решениями этого уравнения оказываются

несамосопряженные операторы, спектр которых включает в себя резонансы.

В разделе 4 доказывается теорема о факторизации трансфер-функции $M_1(z)$. Из этой теоремы следует существование областей, окружающих спектр $\sigma(A_1)$ и лежащих частично на нефизических листах, где спектр M_1 представлен в точности спектром соответствующих решений уравнения (3.6). Корневые векторы этих решений являются одновременно таковыми и для M_1 , что позволяет в разделах 5, 6 говорить о полноте и базисности систем корневых векторов трансфер-функции M_1 , отвечающих ее спектру в упомянутых областях, включая резонансы. При доказательстве этих свойств мы опираемся главным образом на соответствующие утверждения о несамосопряженных операторах из монографий [18, 19]. Используемая терминология (базисы Рисса и Бари, базис из подпространств и др.) заимствована из книги [18].

В целом наши результаты напоминают известные утверждения из теории рассеяния Лакса–Филлипса [20] (см. также статьи [21–23]), где резонансам также придается операторная интерпретация (в схеме Лакса–Филлипса резонансы оказываются дискретными точками спектра генератора (полу)группы эволюции, суженной на так называемое трансляционно-инвариантное подпространство).

Из-за недостатка места в ряде случаев мы ограничиваемся лишь формулировками утверждений. Их доказательству, а также более детальному изложению представляемого материала будет посвящена отдельная публикация [24].

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ТРАНСФЕР-ФУНКЦИИ

Трансфер-функция $M_i(z)$, $i = 0, 1$, рассматриваемая на резольвентном множестве $\rho(A_j)$ блок-компоненты A_j , $j \neq i$, представляет собой частный случай голоморфной операторнозначной функции. В этой работе мы используем стандартное определение голоморфности операторнозначной функции по отношению к равномерной операторной топологии [14]. На операторнозначные функции переносятся также и обычные определения спектра и его частей. Ясно, что каждая из трансфер-функций $M_i(z)$, $i = 0, 1$, голоморфна, по крайней мере, на резольвентном множестве $\rho(A_j)$ оператора A_j , $j \neq i$. Поскольку функции $M_i^{-1}(z)$ совпадают с соответствующими блок-компонентами $R_{ii}(z)$ резольвенты $\mathbf{R}(z) = (\mathbf{H} - z)^{-1}$, обе они голоморфны по меньшей мере на множестве $\rho(\mathbf{H})$.

Пусть E_j – спектральная мера блок-компоненты A_j ,

$$A_j = \int_{\sigma(A_j)} \lambda dE_j(\lambda), \quad j = 0, 1, \quad \sigma(A_j) \subset \mathbb{R}.$$

Тогда функция $V_i(z)$ может быть записана в виде

$$V_i(z) = B_{ij} \int_{\sigma(A_j)} dE_j(\mu) \frac{1}{z - \mu} B_{ji}.$$

Удобно ввести величину

$$\mathcal{V}_j(B) = \sup_{\{\delta_k\}} \sum_k \|B_{ij} E_j(\delta_k) B_{ji}\|.$$

Здесь через $\{\delta_k\}$ обозначается конечная или счетная полная система попарно непересекающихся подмножеств спектра $\sigma(A_j)$, измеримых по отношению к E_j (т.е. δ_k являются борелевскими подмножествами $\sigma(A_j)$ такими, что $\delta_k \cap \delta_l = \emptyset$, если $k \neq l$, и $\bigcup_k \delta_k = \sigma(A_j)$). Величина $\mathcal{V}_j(B)$ называется вариацией операторов B_{ij} по отношению к спектральной мере E_j . Нетрудно видеть, что $\|B_{ij}\|^2 \leq \mathcal{V}_j(B) \leq \|B_{ij}\|_2^2$, где $\|B_{ij}\|_2 = \|B_{ji}\|_2$ – норма Гильберта–Шмидта операторов B_{ij} . Равенство $\mathcal{V}_j(B) = \|B_{ij}\|^2$ имеет место, если спектр A_j состоит из единственной точки. Равенство $\mathcal{V}_j(B) = \|B_{ij}\|_2^2$ выполняется, если A_j содержит только простой дискретный спектр. В дальнейшем мы будем предполагать, что, по крайней мере, одна из вариаций $\mathcal{V}_j(B)$ конечна, скажем вариация $\mathcal{V}_0(B)$.

Наряду с “полной” вариацией $\mathcal{V}_j(B)$ мы будем использовать также ее “ограничения”

$$\mathcal{V}_j(B)|_{\Delta} = \sup_{\{\delta_k\}} \sum_k \|B_{ij} E_j(\delta_k \cap \Delta) B_{ji}\|,$$

где Δ – некоторое борелевское подмножество $\sigma(A_j)$. Очевидно, что $\mathcal{V}_j(B)|_{\Delta} \leq \mathcal{V}_j(B)$.

Мы полагаем, что спектр оператора A_1 может пересекаться лишь с непрерывным спектром оператора A_0 и это пересечение реализуется на попарно непересекающихся открытых интервалах $\Delta_k^0 = (\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}) \subset \sigma_c(A_0)$, где $\mu_k^{(1)} < \mu_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $m < \infty$, и $-\infty \leq \mu_1^{(1)}, \mu_m^{(2)} \leq +\infty$. Таким образом, мы считаем, что

$$\Delta_k^0 \cap \sigma(A_1) \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

и

$$\sigma(A_1) \cap \sigma'(A_0) = \emptyset,$$

где

$$\sigma'(A_0) = \sigma(A_0) \setminus \bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0.$$

Пусть по определению $K_B(\mu) = B_{10} E^0(\mu) B_{01}$, где $E^0(\mu) = E_0((-\infty, \mu))$ – спектральная функция оператора A_0 . Будем полагать, что функция $K_B(\mu)$ дифференцируема по μ при всех $\mu \in \Delta_k^0$, $k = 1, 2, \dots, m$, относительно равномерной операторной топологии и $K'_B(\mu) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$. Очевидно, что производная $K'_B(\mu)$ неотрицательна, $K'_B(\mu) \geq 0$, т.к. $K_B(\mu)$ – неубывающая функция. Дифференцируемость $K_B(\mu)$ означает, что непрерывный спектр блок-компоненты A_0 включает в себя на каждом Δ_k^0 , $k = 1, 2, \dots, m$, ветвь абсолютно непрерывного спектра $\sigma_{ac}(A_0)$. Другими словами, для всякого борелевского множества $\delta \subset \Delta_k^0$ и для любого $u_1 \in \mathcal{H}_1$ вектор $E_0(\delta) B_{01} u_1$ является элементом инвариантного подпространства $\mathcal{H}_0^{ac} \subset \mathcal{H}_0$ оператора A_0 , отвечающего спектру $\sigma_{ac}(A_0)$, причем $E_0(\delta) B_{01} u_1 = E_0^{ac}(\delta) B_{01} u_1$, где E_0^{ac} – часть спектральной меры E_0 , отвечающая $\sigma_{ac}(A_0)$. Ясно, что

$$\mathcal{V}_0(B)|_{\Delta_k^0} = \int_{\Delta_k^0} d\mu \|K'_B(\mu)\|.$$

Далее предполагается, что функция $K'_B(\mu)$ непрерывна на замкнутых интервалах $\bar{\Delta}_k^0$ и, более того, она допускает аналитическое продолжение с каждого из этих интервалов в односвязную область, расположенную, например, в $\mathbb{C}^-$. В случае интервала Δ_k^0 мы обозначаем эту область через D_k^- . При этом считается, что граница D_k^- целиком содержит спектральный интервал Δ_k^0 и, кроме того, области D_k^- при разных k не пересекаются друг с другом. Поскольку при $\mu \in \Delta_k^0$ и $\Delta_k^0 \subset \mathbb{R}$ оператор $K'_B(\mu)$ является самосопряженным, функция K'_B допускает аналитическое продолжение с Δ_k^0 также и на область $D_k^+ = \{z: \bar{z} \in D_k^-\}$, симметричную области D_k^- относительно вещественной оси. Для продолжения на $D_k^\pm$ сохраняем обозначение $K'_B(\mu)$. Самосопряженность $K'_B(\mu)$ при $\mu \in \Delta_k^0$ означает, что $[K'_B(\mu)]^* = K'_B(\bar{\mu})$, $\mu \in D_k^\pm$. Будем предполагать, что на концах $\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}$ каждого из спектральных интервалов Δ_k^0 функция K'_B удовлетворяет условию Гельдера $\|K'_B(\mu) - K'_B(\mu_k^{(i)})\| \leq C|\mu - \mu_k^{(i)}|^\gamma$, $i = 1, 2$, $\mu \in D_k^\pm$, с некоторыми положительными постоянными C и γ .

Пусть $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ – мультииндекс с компонентами $l_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots, m$. В дальнейшем будем рассматривать области

$$D_l = \bigcup_{k=1}^m D_k^{l_k},$$

где $D_k^{l_k}$ – области голоморфности функции K'_B , описанные выше.

Пусть $\Gamma_k^{l_k}$ – спрямляемая жорданова кривая в $D_k^{l_k}$, возникающая в результате такой непрерывной деформации интервала Δ_k^0 , что при ее проведении концевые точки этого интервала остаются неподвижными. Подразумевается, что, кроме концов Δ_k^0 , контур $\Gamma_k^{l_k}$ не имеет никаких других точек, общих с множеством $\sigma_c(A_0)$. Через Γ_l , $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, обозначаем объединение контуров $\Gamma_k^{l_k}$,

$$\Gamma_l = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k^{l_k}.$$

Определение вариации $\mathcal{V}_0(B)$ мы распространяем также и на множество $\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l$, вводя модифицированную вариацию

$$\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l) = \mathcal{V}_0(B)|_{\sigma'(A_0)} + \int_{\Gamma_l} |d\mu| \|K'_B(\mu)\|. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что операторы B_{ij} таковы, что найдется контур (или контуры) $\Gamma_l \subset D_l$, для которого величина $\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)$ конечна даже в случае неограниченного множества $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$. Кривые $\Gamma_l \subset D_l$, для которых $\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)$ конечна, называются K_B -ограниченными контурами.

ЛЕММА 2.1. *Аналитическое продолжение трансфер-функции $M_1(z)$ через спектральные интервалы Δ_k^0 в подобласть $D(\Gamma_l) \subset D_l$, ограниченную множеством $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$ и некоторым K_B -ограниченным контуром Γ_l , описывается формулой*

$$M_1(z, \Gamma_l) = A_1 - z + V_1(z, \Gamma_l), \quad (2.2)$$

где

$$V_1(z, \Gamma_l) = \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu) \frac{1}{z - \mu} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma'(A_0)} B_{10} E_0(d\mu) B_{01} \frac{1}{z - \mu} + \int_{\Gamma_l} d\mu K'_B(\mu) \frac{1}{z - \mu}.$$

При $z \in D_k^{l_k} \cap D(\Gamma_l)$ функция $M_1(z, \Gamma_l)$ может быть записана в виде

$$M_1(z, \Gamma_l) = M_1(z) + 2\pi i l_k K'_B(z). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на том, что функция $M_1(z, \Gamma_l)$ голоморфна при $z \in \mathbb{C} \setminus [\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l]$ и совпадает с $M_1(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus [\sigma'(A_0) \cup \overline{D(\Gamma_l)}]$. Равенство (2.3) устанавливается с помощью теоремы о вычетах. $\square$

Формула (2.3) показывает, что трансфер-функция $M_1(z)$ обладает, вообще говоря, многостранным римановым покрытием. Экземпляр комплексной плоскости, где первоначально рассматривается трансфер-функция $M_1(z)$ вместе с резольвентой $\mathbf{R}(z)$, называется физическим листом функции $M_1(z)$. Остальные листы римановой поверхности $M_1(z)$ называются нефизическими листами.

В данной работе мы имеем дело только с нефизическими листами, соседними по отношению к физическому листу, т.е. с теми нефизическими листами, которые склеиваются по берегам интервалов Δ_k^0 при некоторых $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ непосредственно с физическим листом. Мультииндекс $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ может рассматриваться как идентификатор листа [17]. Следует отметить, что некоторые из нефизических листов могут оказаться тождественными. Возможность такого отождествления определяется конкретным видом функции K'_B .

3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ. РЕШЕНИЯ $H_1^{(l)}$

Если операторнозначная функция $T: \sigma'(A_0) \cup \Gamma \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$ удовлетворяет условию Липшица на $\sigma'(A_0)$, непрерывна и ограничена на K_B -ограниченном контуре Γ ,

$$\|T\|_{\infty, \Gamma} = \sup_{\mu \in \sigma'(A_0) \cup \Gamma} \|T(\mu)\| < \infty,$$

то интеграл

$$\int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma} K_B(d\mu) T(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma'(A_0)} B_{10} E_0(d\mu) B_{01} T(\mu) + \int_{\Gamma} d\mu K'_B(\mu) T(\mu) \quad (3.1)$$

существует в смысле равномерной операторной топологии (см. лемму 7.2 в [14]) и

$$\left\| \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma} K_B(d\mu) T(\mu) \right\| \leq \mathcal{V}_0(B, \Gamma) \|T\|_{\infty, \Gamma}. \quad (3.2)$$

В частности, если $T(z)$ – резольвента оператора Y , спектр которого не имеет ни одной общей точки с $\sigma'(A_0) \cup \Gamma$, то с помощью интеграла (3.1) можно ввести оператор

$$V_1(Y, \Gamma) = \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma} K_B(d\mu)(Y - \mu)^{-1}. \quad (3.3)$$

Этот оператор ограничен, $V_1(Y, \Gamma) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$. Благодаря условию (3.2) его норма допускает оценку

$$\|V_1(Y, \Gamma)\| \leq \mathcal{V}_0(B, \Gamma_l) \sup_{\mu \in \sigma'(A_0) \cup \Gamma} \|(Y - \mu)^{-1}\|. \quad (3.4)$$

Согласно определению (3.3) операторнозначная функция $V_1(Y, \Gamma)$ операторной переменной $Y: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ обладает следующим важным для нас свойством. Если $u_1 \in \mathcal{H}_1$ – собственный вектор оператора Y , отвечающий собственному числу z , $Yu_1 = zu_1$, то

$$V_1(Y, \Gamma)u_1 = \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma} K_B(d\mu) \frac{1}{z - \mu} u_1 \equiv V_1(z, \Gamma)u_1. \quad (3.5)$$

Далее мы будем рассматривать уравнение

$$Y = A_1 + V_1(Y, \Gamma). \quad (3.6)$$

Это уравнение обладает следующим свойством. Если некоторый оператор H_1 является решением (3.6) и u_1 – собственный вектор H_1 , отвечающий собственному значению z , $H_1u_1 = zu_1$, то

$$zu_1 = A_1u_1 + V_1(H_1, \Gamma)u_1 = A_1u_1 + V_1(z, \Gamma)u_1. \quad (3.7)$$

Тем самым всякое собственное число z такого оператора H_1 оказывается одновременно собственным числом исходной спектральной задачи $M_1(z, \Gamma)u_1 = 0$ для продолженной трансфер-функции $M_1(z, \Gamma)$, а вектор u_1 – ее собственным вектором. Следовательно, находя решения уравнения (3.6), мы получаем эффективное средство для изучения спектральных свойств непосредственно трансфер-функции $M_1(z, \Gamma)$. Отметим, что в случае, когда спектры операторов A_0 и A_1 не пересекаются, уравнение (3.6) сводится к уравнению Риккати (1.5) [10, 11].

Нередко оказывается удобным записывать уравнение (3.6) в виде

$$X = V_1(A_1 + X, \Gamma), \quad (3.8)$$

где $X = Y - A_1$. Как само уравнение (3.6), так и его вариант (3.8) будут называться в дальнейшем основными уравнениями. Достаточные условия разрешимости этих уравнений описываются в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть контур Γ является K_B -ограниченным и

$$\mathcal{V}_0(B, \Gamma) < \frac{1}{4} d_0^2(\Gamma), \quad (3.9)$$

где $d_0(\Gamma) = \text{dist}\{\sigma(A_1), \sigma'(A_0) \cup \Gamma\}$. Тогда уравнение (3.8) однозначно разрешимо в любом шаре $\mathcal{S}_1(r) \subset \mathbf{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$, включающем операторы $X: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, норма которых подчиняется оценке $\|X\| \leq r$, где число r таково, что

$$r_{\min}(\Gamma) \leq r < r_{\max}(\Gamma), \quad (3.10)$$

здесь

$$\begin{aligned} r_{\min}(\Gamma) &= \frac{1}{2} d_0(\Gamma) - \sqrt{\frac{1}{4} d_0^2(\Gamma) - \mathcal{V}_0(B, \Gamma)}, \\ r_{\max}(\Gamma) &= d_0(\Gamma) - \sqrt{\mathcal{V}_0(B, \Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение X уравнения (3.8) одно и то же для всех r , удовлетворяющих неравенствам (3.10), и принадлежит наименьшему шару $\mathcal{S}_1(r_{\min})$, $\|X\| \leq r_{\min}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(X) = V_1(A_1 + X, \Gamma)$, $X \in \mathcal{S}_1(r)$. Найдем условия, при выполнении которых функция F является сжимающим отображением шара $\mathcal{S}_1(r)$ в себя. Заметим, что в силу (3.10) и (3.11) выполняются неравенства $0 < r < d_0$, где $d_0 = d_0(\Gamma)$. Поэтому спектр оператора $A_1 + X$ не пересекается с множеством $\sigma'(A_0) \cup \Gamma$. Следовательно, при $\mu \in \sigma'(A_0) \cup \Gamma$ резольвента $(A_1 + X - \mu)^{-1}$ является ограниченным оператором в $\mathcal{H}_1$. Из оценки (3.4) вытекает, что

$$\|F(X)\| \leq \mathcal{V}_0(B, \Gamma) \sup_{\mu \in \sigma'(A_0) \cup \Gamma} \|(A_1 + X - \mu)^{-1}\| \leq \mathcal{V}_0(B, \Gamma) \frac{1}{d_0 - r}.$$

С другой стороны, имеем

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \mathcal{V}_0(B, \Gamma) \frac{1}{(d_0 - r)^2} \|Y - X\|.$$

Из этих оценок видно, что шар $\mathcal{S}_1(r)$ отображается функцией F в себя и это отображение является сжатием, если радиус r и вариация $\mathcal{V}_0(B, \Gamma)$ связаны соотношениями

$$\mathcal{V}_0(B, \Gamma) \leq r(d_0 - r), \quad \mathcal{V}_0(B, \Gamma) < (d_0 - r)^2. \quad (3.12)$$

При условии (3.9) неравенства (3.12), рассматриваемые совместно, эквивалентны условию (3.10). Следовательно, если выполнено это условие, то при каждом r , удовлетворяющем (3.10), F действительно является сжимающим отображением шара $\mathcal{S}_1(r)$ в себя. Но это означает, что уравнение (3.8) разрешимо и притом единственным образом во всяком таком шаре. Более того, решение оказывается одним и тем же для всех значений r , удовлетворяющих (3.10). Тем самым это решение принадлежит наименьшему из рассматриваемых шаров, а именно шару $\mathcal{S}_1(r_{\min})$ с радиусом $r_{\min}$, определяемым первой из формул (3.11). $\square$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для некоторого K_B -ограниченного контура $\Gamma \subset D_l$ выполнены условия теоремы 3.1 и пусть X – решение уравнения (3.8), о котором говорится в этой теореме. Тогда X совпадает с аналогичным решением $\tilde{X}$ для любого другого K_B -ограниченного контура $\tilde{\Gamma} \subset D_l$, подчиняющегося оценке $\mathcal{V}_0(B, \tilde{\Gamma}) < \tilde{d}_0^2/4$ при $0 < \tilde{d}_0 = \text{dist}\{\sigma(A_1), \sigma'(A_0) \cup \tilde{\Gamma}\} \leq d_0(\Gamma)$. Более того, это решение удовлетворяет оценке $\|X\| \leq r_0(B)$ с

$$r_0(B) = \inf_{\Gamma_l : \omega(B, \Gamma_l) > 0} r_{\min}(\Gamma_l),$$

где $r_{\min}(\Gamma_l)$ определено в (3.11), а $\omega(B, \Gamma_l) = d_0^2(\Gamma_l) - 4\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)$. При этом $r_0(B)$ не зависит от l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы сводится к подходящей непрерывной деформации контуров. Единственное существенное место – проверка независимости радиуса $r_0(B)$ от мультииндекса l . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный K_B -ограниченный контур

$$\Gamma_l \subset D_l, \quad \Gamma_l = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k^{l_k}.$$

Обозначим через $\Gamma_{l'}$ контур, получающийся из Γ_l в результате замены части кривых $\Gamma_k^{l_k}$ кривыми $\Gamma_k^{(-l_k)} = \{\mu : \bar{\mu} \in \Gamma_k^{l_k}\}$, симметричными кривым $\Gamma_k^{l_k}$ относительно вещественной оси. Ясно, что такие замены дополнительно к контуру Γ_l порождают $2^m - 1$ различных контуров $\Gamma_{l'}$, где $l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_m)$ и $l'_k = \pm l_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Для каждого из таких контуров значение вариации $\mathcal{V}_0(B, \Gamma_{l'})$ одно и то же, $\mathcal{V}_0(B, \Gamma_{l'}) = \mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)$, т.к. при замене Γ_l на $\Gamma_{l'}$ величина

$$\int_{\Gamma_l} |d\mu| \|K'_B(\mu)\|$$

не меняется, но это и означает, что $r_0(B)$ не зависит от l . $\square$

Итак, мы установили, что для данной области голоморфности D_l решения X и H_1 , $H_1 = A_1 + X$, не зависят от K_B -ограниченных контуров $\Gamma_l \subset D_l$, удовлетворяющих условию (3.9). Однако если индекс l изменяется, то X и H_1 могут тоже измениться. По этой причине мы будем дополнять обозначения X и H_1 индексом l и писать соответственно $X^{(l)}$ и $H_1^{(l)}$, $H_1^{(l)} = A_1 + X^{(l)}$. Таким образом, теорема 3.1 гарантирует нам существование 2^m , вообще говоря, различных решений $X^{(l)}$ основного уравнения (3.6), а значит, и существование 2^m соответствующих решений $H_1^{(l)}$ основного уравнения (3.8). Разумеется, (3.6) и (3.8) являются нелинейными уравнениями, и поэтому вполне возможно, что вне шаров $\|X\| < r_{\max}(\Gamma)$ они могут иметь и другие решения, отличные от операторов $X^{(l)}$ и $H_1^{(l)}$, существование которых обеспечено теоремой 3.1. В дальнейшем мы будем иметь дело только с решениями $X^{(l)}$ и $H_1^{(l)}$.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ ТРАНСФЕР-ФУНКЦИИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть Γ_l — K_B -ограниченный контур, удовлетворяющий условию (3.9), а $H_1^{(l)} = A_1 + X^{(l)}$, где $X^{(l)}$ — исследуемое решение основного уравнения (3.6), $\|X^{(l)}\| \leq r_0(B)$. Тогда при $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l)$ трансфер-функция $M_1(z, \Gamma_l)$ допускает факторизацию

$$M_1(z, \Gamma_l) = W_1(z, \Gamma_l)(H_1^{(l)} - z), \quad (4.1)$$

где $W_1(z, \Gamma_l)$ — ограниченный оператор в $\mathcal{H}_1$,

$$W_1(z, \Gamma_l) = I_1 - \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu) \frac{1}{\mu - z} (H_1^{(l)} - \mu)^{-1}. \quad (4.2)$$

Здесь I_1 — тождественный оператор в $\mathcal{H}_1$. При $\text{dist}\{z, \sigma(A_1)\} \leq d_0(\Gamma_l)/2$ оператор $W_1(z, \Gamma_l)$ ограниченно-обратим и

$$\|[W_1(z, \Gamma_l)]^{-1}\| \leq \left(1 - \frac{\nu_0(B, \Gamma_l)}{d_0^2(\Gamma_l)/4}\right)^{-1} < \infty. \quad (4.3)$$

Данное утверждение напоминает известную факторизационную теорему работы [25] (см. также [26]) для самосопряженных операторнозначных функций. Основные результаты статьи [15] были получены как раз на основании этой теоремы. Случай, рассматриваемый в данной статье, выходит за рамки условий работы [25], т.к. трансфер-функция $M_1(z, \Gamma_l)$ не является даже самосопряженной в смысле [25].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l)$ ограниченность оператора $W_1(z, \Gamma_l)$, задаваемого равенством (4.2), очевидна. Чтобы убедиться в факторизации (4.1), заметим, что при $z \notin \sigma'(A_0) \cup \Gamma_l$

$$W_1(z, \Gamma_l)(H_1^{(l)} - z) = H_1^{(l)} - z - \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu) \frac{(H_1^{(l)} - \mu)^{-1}(H_1^{(l)} - z)}{\mu - z}. \quad (4.4)$$

Поскольку $(H_1^{(l)} - \mu)^{-1}(H_1^{(l)} - z) = I_1 + (\mu - z)(H_1^{(l)} - z)^{-1}$, то

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu) \frac{(H_1^{(l)} - \mu)^{-1}(H_1^{(l)} - z)}{\mu - z} = \\ & = \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} \frac{K_B(d\mu)}{\mu - z} + \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu)(H_1^{(l)} - z)^{-1}. \end{aligned}$$

Однако согласно формуле (2.2) имеем

$$\int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu)(\mu - z)^{-1} = A_1 - z - M_1(z, \Gamma_l),$$

тогда как вследствие уравнения (3.6)

$$\int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu)(H_1^{(l)} - z)^{-1} = H_1^{(l)} - A_1.$$

Используя полученные выражения, мы приходим к (4.1).

Далее, докажем, что при условии $\text{dist}\{z, \sigma(A_1)\} \leq d_0(\Gamma_l)/2$ сомножитель $W_1(z, \Gamma_l)$ представляет собой ограниченно-обратимый оператор. В самом деле, при выполнении этого условия $|\mu - z| \geq \text{dist}\{z, \sigma'(A_0) \cup \Gamma_l\} \geq d_0(\Gamma_l)/2$, т.к. $\text{dist}\{\sigma(A_1), \sigma'(A_0) \cup \Gamma_l\} = d_0(\Gamma_l)$. С другой стороны, $H_1^{(l)} = A_1 + X^{(l)}$ и $\|X^{(l)}\| < d_0(\Gamma_l)/2$. Поэтому при $\mu \in \sigma'(A_0) \cup \Gamma_l$ имеем $\|(H_1^{(l)} - \mu)^{-1}\| < 2/d_0(\Gamma_l)$. Таким образом,

$$\left\| \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} K_B(d\mu) \frac{1}{\mu - z} (H_1^{(l)} - \mu)^{-1} \right\| < \frac{\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)}{(d_0(\Gamma_l)/2)^2} < 1. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что оценка (4.3) действительно справедлива. $\square$

Нетрудно найти ряд простых, но полезных связей между некоторыми из операторов $H_1^{(l)}$. Такие связи устанавливаются, в частности, между операторами $H_1^{(l)}$ и $H_1^{(-l)}$, $(-l) = (-l_1, -l_2, \dots, -l_m)$, где l_k ($k = 1, 2, \dots, m$) — компоненты мультииндекса $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$. Согласно нашему соглашению кривая $\Gamma_{(-l)} \subset D_{(-l)}$ представляет собой контур, который получается из контура Γ_l в результате замены его компонент $\Gamma_k^{l_k}$ соответствующими комплексно-сопряженными кривыми $\Gamma_k^{(-l_k)}$.

Следующие далее утверждения даются без доказательства.

ЛЕММА 4.1. Пусть Γ_l — K_B -ограниченный контур, $\Gamma_l \subset D_l$, для которого справедливы условия теоремы 3.1. Тогда для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l)$ выполнено равенство

$$W_1(z, \Gamma_l)(H_1^{(l)} - z) = (H_1^{(-l)*} - z)[W_1(\bar{z}, \Gamma_{(-l)})]^*. \quad (4.6)$$

Поэтому спектр оператора $H_1^{(-l)*}$ совпадает со спектром оператора $H_1^{(l)}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Спектр $\sigma(H_1^{(l)})$ оператора $H_1^{(l)} = A_1 + X^{(l)}$ принадлежит замкнутой $r_0(B)$ -окрестности $\mathcal{O}_{r_0}(A_1)$ спектра оператора A_1 , $\mathcal{O}_{r_0}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}\{z, \sigma(A_1)\} \leq r_0(B)\}$. Если контур $\Gamma_l \subset D_l$ удовлетворяет условию (3.9), то комплексный спектр оператора $H_1^{(l)}$ с необходимостью находится во множестве $D_l \cap \mathcal{O}_{r_0}(A_1)$, тогда как вне D_l спектр $H_1^{(l)}$ чисто вещественный. Множество $\sigma(H_1^{(l)})$ является спектром также и для трансфер-функции $M_1(z, \Gamma_l)$. Более того, спектр этой функции в области $\mathcal{O}_{d_0/2}(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}\{z, \sigma(A_1)\} \leq d_0(\Gamma_l)/2\}$ представляется лишь спектром оператора $H_1^{(l)}$, причем это утверждение верно по отдельности как для точечного, так и для непрерывного спектров.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть две различные области $D_{l'}$ и $D_{l''}$ включают в себя при некотором $k = 1, 2, \dots, m$ одну и ту же подобласть $D_k^{l_k}$, т.е. $l'_k = l''_k = l_k$. Тогда спектры операторов $H_1^{(l')}$ и $H_1^{(l'')}$ в $D_k^{l_k}$ совпадают.

Пусть

$$\Omega^{(l)} = \int_{\sigma'(A_0) \cup \Gamma_l} (H_1^{(-l)*} - \mu)^{-1} K_B(d\mu) (H_1^{(l)} - \mu)^{-1},$$

где, как и ранее, Γ_l обозначает K_B -ограниченный контур, удовлетворяющий неравенству (3.9). Оператор $\Omega^{(l)}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ при фиксированном l не зависит от выбора Γ_l . В то же время $\Omega^{(-l)} = \Omega^{(l)*}$. Норма $\Omega^{(l)}$ подчиняется оценке

$$\|\Omega^{(l)}\| < \frac{\mathcal{V}_0(B, \Gamma_l)}{(d_0(\Gamma_l)/2)^2} < 1. \quad (4.7)$$

Если спектры операторов A_0 и A_1 не пересекаются, то операторы $\Omega^{(l)}$, как, впрочем, и операторы $H_1^{(l)}$, вообще не зависят от l . В этом случае $H_1 = A_1 + B_{01}Q_{01}$, где Q_{01} – сжимающий оператор, $Q_{01}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ (см. теорему 5 из [11], а также [13–15]), причем $\Omega = Q_{01}^* Q_{01}$. Введение в пространстве $\mathcal{H}_1$ нового скалярного произведения $[\cdot, \cdot] = \langle (I_1 + \Omega) \cdot, \cdot \rangle$ превращает H_1 в самосопряженный оператор. Эти утверждения теряют силу для спектральной ситуации, рассматриваемой в настоящей работе, т.к. при $\sigma(A_0) \cap \sigma(A_1) \neq \emptyset$ операторы $H_1^{(l)}$ заведомо могут иметь комплексный спектр.

ТЕОРЕМА 4.4. Операторы $\Omega^{(l)}$ обладают следующими свойствами (ср. с [15, 25, 26]):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz [M_1(z, \Gamma_l)]^{-1} &= (I_1 + \Omega^{(l)})^{-1}, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz z [M_1(z, \Gamma_l)]^{-1} &= (I_1 + \Omega^{(l)})^{-1} H_1^{(-l)*} = H_1^{(l)} (I_1 + \Omega^{(l)})^{-1}, \end{aligned}$$

где γ – произвольный спрямляемый замкнутый (и содержащий точку $z = \infty$, если оператор A_1 неограничен) контур, проходящий в положительном направлении вокруг спектра оператора $H_1^{(l)}$ и расположенный целиком внутри $\mathcal{O}_{d_0(\Gamma)/2}(A_1)$. Интегрирование вдоль контура γ понимается в сильном смысле.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть λ – изолированное собственное число оператора $H_1^{(l)}$ (а следовательно, и оператора $H_1^{(-l)*}$, и трансфер-функции $M_1(z, \Gamma_l)$, где Γ_l – K_B -ограниченный контур, удовлетворяющий условию (3.9)). Пусть $\mathbf{P}_{\lambda}^{(l)}$ и $\mathbf{P}_{\lambda}^{(-l)*}$ – соответствующие собственные проекторы $H_1^{(l)}$ и $H_1^{(-l)*}$, а $P_{\lambda}^{(l)}$ – вычет функции $M_1(z, \Gamma_l)$ при $z = \lambda$. Тогда $P_{\lambda}^{(l)} = (I_1 + \Omega^{(l)})^{-1} \mathbf{P}_{\lambda}^{(-l)*} = \mathbf{P}_{\lambda}^{(l)} (I_1 + \Omega^{(l)})^{-1}$.

5. СВОЙСТВА ИЗОЛИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Если $\lambda \in \mathbb{R}$ является изолированным собственным числом оператора $H_1^{(l')} = A_1 + X^{(l')}$, $l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_m)$, то это число λ является изолированным собственным числом также и для остальных 2^{m-1} операторов $H_1^{(l)} = A_1 + X^{(l)}$, где $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ с произвольными $l_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots, m$. Резольвенты каждого из 2^m операторов $H_1^{(l)}$ при $z = \lambda$ имеют полюс первого порядка λ . Одновременно указанное λ принадлежит точечному спектру полного оператора $\mathbf{H}$. Согласно теореме 4.5 оператор $P_\lambda^{(l)}$, являясь вычетом при $z = \lambda$ исходной обратной трансфер-функции $R_{11}(z) = [M_1(z)]^{-1}$, не зависит от l .

Изолированное вещественное собственное число λ оператора $H_1^{(l)}$ не может принадлежать спектру $\sigma'(A_0)$ оператора A_0 , находящемуся вне множества $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$. Действительно, согласно теореме 4.2 спектр $H_1^{(l)}$ при всяком l находится в $r_0(B)$ -окрестности $\mathcal{O}_{r_0}(A_1)$ множества $\sigma(A_1)$, но

$$r_0(B) < \frac{1}{2} \text{dist}\{\sigma'(A_0), \sigma(A_1)\}.$$

Поэтому $\sigma'(A_0) \cap \sigma(H_1^{(l)}) = \emptyset$. Следовательно, число λ является либо регулярной точкой оператора A_0 (т.е. $\lambda \in \rho(A_0)$), либо оно лежит в непрерывном спектре A_0 в $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$.

ЛЕММА 5.1. *Если $\psi^{(1)} \in \mathcal{D}(A_1)$ – собственный вектор $H_1^{(l)}$, $H_1^{(l)}\psi^{(1)} = \lambda\psi^{(1)}$, отвечающий изолированному вещественному собственному числу $\lambda \in \rho(A_0)$, то вектор $\Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)}) \in \mathcal{H}$, где*

$$\psi^{(0)} = -R_0(\lambda)B_{01}\psi^{(1)}, \quad (5.1)$$

– собственный вектор $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi$. Верно также и обратное утверждение: если $\lambda, \lambda \in \rho(A_0)$, – изолированное вещественное собственное число оператора $H_1^{(l)}$ и $\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi$, где $\Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})$ с $\psi^{(0)} \in \mathcal{D}(A_0)$ и $\psi^{(1)} \in \mathcal{D}(A_1)$, то $\psi^{(0)}$ определяется через $\psi^{(1)}$ соотношением (5.1), $\psi^{(1)} \neq 0$ и $H_1^{(l)}\psi^{(1)} = \lambda\psi^{(1)}$.

Если собственное число λ оператора $H_1^{(1)}$ лежит в интервале $\Delta_k^0 = (\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)})$, $k = 1, 2, \dots, m$, то $|\lambda - \mu_k^{(i)}| \geq \text{dist}\{\mu_k^{(i)}, \sigma(A_1)\} - r_0(B)$, $i = 1, 2$. Напомним, что согласно одному из наших предположений блок-компонента A_0 не имеет точечного спектра внутри Δ_k^0 . Так как $\Delta_k^0 \subset \sigma_c(A_0)$, то обратный оператор $R_0(z) = (A_0 - z)^{-1}$ при $z = \lambda \pm i0$ существует, однако он неограничен. Тем не менее, утверждение, аналогичное лемме 5.1, справедливо также и для данного случая.

ЛЕММА 5.2. *Если $\psi^{(1)} \in \mathcal{D}(A_1)$ – собственный вектор оператора $H_1^{(l)}$, отвечающий изолированному собственному числу $\lambda \in \Delta_k^0 = (\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)})$, $k = 1, 2, \dots, m$, $H_1^{(l)}\psi^{(1)} = \lambda\psi^{(1)}$, то либо:*

$$а) E^0(\mu)B_{01}\psi^{(1)} = 0 \text{ для всякого } \mu \leq \mu_k^{(2)},$$

либо

- б) $E^0(\mu)B_{01}\psi^{(1)} \neq 0$ для каждого $\mu \in \Delta_k^0$,
- в) функция $\|E^0(\mu)B_{01}\psi^{(1)}\|$ дифференцируема по μ на Δ_k^0 ,
- г) $\frac{d}{d\mu}\|E^0(\mu)B_{01}\psi^{(1)}\|\Big|_{\mu=\lambda} = 0$ и $\frac{d}{d\mu}\langle K'_B(\mu)\psi^{(1)}, \psi^{(1)} \rangle\Big|_{\mu=\lambda} = 0$.

В обоих случаях вектор $\psi^{(0)}$, определяемый соотношением (5.1), принадлежит пространству $\mathcal{D}(A_0)$. При этом $\Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})$ является собственным вектором оператора $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi$.

Справедливо также и обратное утверждение. Если $\Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)})$, где $\psi^{(0)} \in \mathcal{D}(A_0)$ и $\psi^{(1)} \in \mathcal{D}(A_1)$, – собственный вектор оператора $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\Psi = \lambda\Psi$, отвечающий собственному числу $\lambda \in \Delta_k^0$, то либо выполняется условие “а” (и $E^0(+\infty)B_{01}\psi^{(1)} = B_{01}\psi^{(1)} \neq 0$ даже при $\psi^{(0)} = 0$), либо условия “б”–“г”. В обоих этих случаях выполнено равенство (5.1), означающее, в частности, что $\psi^{(1)}$ ($\psi^{(1)} \neq 0$) есть собственный вектор оператора $H_1^{(l)}$, отвечающий собственному числу λ .

Обозначим через $\sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$ множество всех изолированных вещественных собственных значений оператора $H_1^{(l)}$. Как мы уже установили, это множество совпадает с частью $\sigma_{\text{pri}}(M_1(\cdot, \Gamma_l))$ множества изолированных вещественных собственных чисел трансфер-функции $M_1(z, \Gamma_l)$, находящейся в окрестности $\mathcal{O}_{d_0/2}(A_1)$. При этом в качестве Γ_l может быть выбран произвольный K_B -ограниченный контур, подчиняющийся условию (3.9).

Далее для собственных векторов $H_1^{(l)}$, отвечающих собственному числу λ , $\lambda \in \sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$, мы будем использовать более детальные обозначения $\psi_{\lambda,j}^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, m_\lambda$, где m_λ ($m_\lambda \leq \infty$) – кратность λ . Напомним, что вектор $\psi_{\lambda,j}^{(1)}$ является собственным вектором одновременно для всех операторов $H_1^{(l)}$ и $M_1(\lambda \pm i0, \Gamma_l)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $l_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots, m$. В рассматриваемом случае m_λ оказывается как геометрической кратностью, так и алгебраической. Соответствующие собственные векторы полной матрицы $\mathbf{H}$ обозначаются через $\Psi_{\lambda,j}$, $\Psi_{\lambda,j} = (\psi_{\lambda,j}^{(0)}, \psi_{\lambda,j}^{(1)})$. Мы предполагаем, что векторы $\psi_{\lambda,j}^{(1)}$ выбраны так, что векторы $\Psi_{\lambda,j}$ ортонормированы, $\langle \Psi_{\lambda,j}, \Psi_{\lambda',j'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{jj'}$. Из утверждений лемм 5.1 и 5.2 следует, что векторы $\Psi_{\lambda,j}$, $\lambda \in \sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$, $j = 1, 2, \dots, m_\lambda$, образуют ортонормированный базис в инвариантном подпространстве оператора $\mathbf{H}$, отвечающем подмножеству $\sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$ точечного спектра $\sigma_p(\mathbf{H})$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}$ – замыкание линейной оболочки собственных векторов $H_1^{(l)}$, отвечающих спектру $\sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$,

$$\mathcal{H}_1^{(\text{pri})} = \overline{\mathbf{V}\{\psi_{\lambda,j}^{(1)}, \lambda \in \sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)}), j = 1, 2, \dots, m_\lambda\}}.$$

При всяком $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $l_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots, m$, оператор $\Omega^{(l)}$ неотрицателен на подпространстве $\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}$.

Утверждение этой леммы означает, что мы можем ввести в $\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}$ новое скалярное произведение $[u_1, v_1]_{\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}} = \langle (I_1 + \Omega^{(l)})u_1, v_1 \rangle$. Это произведение топологически эквивалентно исходному скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$, поскольку, с одной стороны, $I_1 + \Omega^{(l)} \geq I_1$, а с другой стороны, благодаря (4.7) оператор $I_1 + \Omega^{(l)}$ ограниченно-обратим. Используя скалярное произведение $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}}$, с помощью теоремы Бари (теоремы VI.2.1 из работы [18]) можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Система векторов $\psi_{\lambda, j}^{(1)}$, $\lambda \in \sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$, $j = 1, 2, \dots, m_\lambda$, образует базис Рисса подпространства $\mathcal{H}_1^{(\text{pri})}$.

6. БАЗИСНОСТЬ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА $H_1^{(l)}$ В СЛУЧАЕ, ЕСЛИ ОПЕРАТОР A_1 ИМЕЕТ КОМПАКТНУЮ РЕЗОЛВЕНТУ

В этом разделе мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда канальный оператор A_1 имеет лишь чисто дискретный спектр, т.е. его резольвента $(A_1 - z)^{-1}$ является компактным оператором в пространстве $\mathcal{H}_1$ при всяком $z \in \rho(A_1)$. В этом случае операторы $H_1^{(l)}$ также имеют компактные резольвенты. Данное утверждение является следствием теоремы V.3.17 из книги [19], поскольку разность $H_1^{(l)} - A_1 = X^{(l)}$ — ограниченный оператор (см. теорему 3.1). Компактными оказываются также и сами операторы $X^{(l)}$.

Обозначим через $\mathcal{H}_{1, \lambda}^{(l)}$ алгебраическое собственное подпространство оператора $H_1^{(l)}$, отвечающее собственному числу λ ; $\mathcal{H}_{1, \lambda}^{(l)} = \mathbf{P}_\lambda^{(l)} \mathcal{H}_1$, где $\mathbf{P}_\lambda^{(l)}$ — соответствующий собственный проектор. Пусть m_λ — алгебраическая кратность λ , $m_\lambda = \dim \mathcal{H}_\lambda^{(l)}$, $m_\lambda < \infty$, а $\psi_{\lambda, i}^{(l)}$ ($i = 1, 2, \dots, m_\lambda$) — корневые векторы оператора $H_1^{(l)}$, образующие базис подпространства $\mathcal{H}_{1, \lambda}^{(l)}$. Далее мы постараемся выяснить достаточные условия, для того чтобы объединение таких базисов по всевозможным λ давало базис полного пространства $\mathcal{H}_1$. Независимо от ответа на этот вопрос у нас имеется следующее утверждение по поводу полноты векторной системы:

$$\{\psi_{\lambda, i}^{(l)}, \lambda \in \sigma(H_1^{(l)}), i = 1, 2, \dots, m_\lambda\}. \quad (6.1)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Замыкание линейной оболочки системы (6.1) совпадает с $\mathcal{H}_1$.

Это утверждение является частным случаем теоремы V.10.1 из книги [18].

Следующее утверждение касается специального случая, когда базисность системы (6.1) следует непосредственно из базисности системы собственных векторов, отвечающих спектру $\sigma_{\text{pri}}(H_1^{(l)})$, в замыкании ее линейной оболочки (см. теорему 5.1).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть оператор A_1 имеет компактную резольвенту и полуограничен снизу. Предположим, что множество $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$ ограничено сверху, т.е. $\mu_m^{(2)} < \infty$. Тогда оператор $H_1^{(l)}$ имеет лишь конечное число комплексных собственных значений (резонансов). Он может быть представлен в виде $H_1^{(l)} = H_{1, R}^{(l)} + H_{1, C}^{(l)}$, где $H_{1, R}^{(l)} = H_1^{(l)} \mathbf{P}_R^{(l)}$, $H_{1, C}^{(l)} = H_1^{(l)} \mathbf{P}_C^{(l)}$. Здесь $\mathbf{P}_R^{(l)}$ и $\mathbf{P}_C^{(l)}$

обозначают проекторы на инвариантные подпространства $\mathcal{H}_{1,R}^{(l)}$ и $\mathcal{H}_{1,C}^{(l)}$, отвечающие соответственно вещественному и комплексному спектрам оператора $H_1^{(l)}$; $\mathcal{H}_{1,R}^{(l)} = \mathbf{P}_R^{(l)}\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_{1,C}^{(l)} = \mathbf{P}_C^{(l)}\mathcal{H}_1$. Объединение базиса подпространства $\mathcal{H}_{1,C}^{(l)}$, состоящего из корневых векторов $H_{1,C}^{(l)}|_{\mathcal{H}_{1,C}^{(l)}}$, с базисом Рисса подпространства $\mathcal{H}_{1,R}^{(l)}$, построенного из собственных векторов $H_{1,R}^{(l)}|_{\mathcal{H}_{1,R}^{(l)}}$, дает базис Рисса пространства $\mathcal{H}_1$. Это утверждение остается верным также и в случае, если оператор A_1 имеет компактную резольвенту и полуограничен сверху, а множество $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0$ полуограничено снизу, т.е. $\mu_1^{(1)} > -\infty$.

Далее мы будем рассматривать случай, когда множество $\bigcup_{k=1}^m \Delta_k^0 \cap \sigma(A_1)$ состоит из бесконечного числа точек и тем самым $\dim \mathcal{H}_1 = \infty$. Как и выше, будем предполагать, что оператор A_1 обладает компактной резольвентой и полуограничен снизу. Это предположение означает, что бесконечен, по крайней мере, интервал $\Delta_m^0 = (\mu_m^{(1)}, +\infty)$.

Будем считать, что собственные числа $\lambda_i^{(A_1)}$, $i = 1, 2, \dots$, оператора A_1 занумерованы в возрастающем порядке, $\lambda_1^{(A_1)} < \dots < \lambda_i^{(A_1)} < \lambda_{i+1}^{(A_1)} < \dots$. При этом $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i^{(A_1)} = +\infty$. Предположим, что можно указать такой номер i_0 , что для всякого $i \geq i_0$ и некоторого фиксированного $r > r_0(B)$

$$\lambda_i^{(A_1)} - \lambda_{i-1}^{(A_1)} > 2r. \quad (6.2)$$

Пусть γ_i ($i \geq i_0$) — окружности радиуса r с центрами $\lambda_i^{(A_1)}$, а γ_0 — окружность радиуса $(\lambda_{i_0-1}^{(A_1)} - \lambda_1^{(A_1)})/2 + r$ с центром $(\lambda_1^{(A_1)} + \lambda_{i_0-1}^{(A_1)})/2$. Введем проекторы

$$\mathbf{Q}_i^{(l)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} dz (H_1^{(l)} - z)^{-1}, \quad i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$$

Каждый проектор $\mathbf{Q}_i^{(l)}$ представляет собой сумму собственных проекторов $\mathbf{P}_\lambda^{(l)}$, отвечающих тем собственным числам $\lambda^{(l)}$ оператора $H_1^{(l)}$, которые находятся внутри окружности γ_i . При этом $\mathbf{Q}_i^{(l)}\mathbf{Q}_j^{(l)} = \delta_{ij}\mathbf{Q}_i^{(l)}$. Подпространства $\mathcal{N}_i^{(l)} = \mathbf{Q}_i^{(l)}\mathcal{H}_1$ инвариантны относительно $H_1^{(l)}$; $\dim \mathcal{N}_i^{(l)}$ совпадает с суммой алгебраических кратностей для собственных чисел $\lambda^{(l)}$, находящихся внутри γ_i .

Мы вводим также проекторы

$$\mathbf{P}_i^{(A_1)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} dz (A_1 - z)^{-1}, \quad i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$$

При $i \geq i_0$ операторы $\mathbf{P}_i^{(A_1)}$ являются собственными проекторами для A_1 , отвечающими собственным значениям $\lambda_i^{(A_1)}$, а $\mathbf{P}_0^{(A_1)}$ — сумма собственных проекторов для A_1 , отвечающих собственным числам $\lambda_1^{(A_1)}, \lambda_2^{(A_1)}, \dots, \lambda_{i_0-1}^{(A_1)}$.

ЛЕММА 6.1. При условии (6.2) последовательность подпространств $\mathcal{N}_i^{(l)} = \mathbf{Q}_i^{(l)} \mathcal{H}_1$, $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$, ω -линейно независима и полна в $\mathcal{H}_1$. Если вместо (6.2) выполняется условие

$$\lambda_i^{(A_1)} - \lambda_{i-1}^{(A_1)} > 2r > 4r_0(B) \quad \forall i \geq i_0, \quad (6.3)$$

то $\dim \mathcal{N}_i^{(l)} = \dim \mathbf{P}_i^{(A_1)} \mathcal{H}_1$, $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$.

ТЕОРЕМА 6.3. Предположим, что $\lambda_{i+1}^{(A_1)} - \lambda_i^{(A_1)} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть i_0 — номер, начиная с которого выполнено условие (6.3). Тогда существует предел

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0, i \geq i_0}^n \mathbf{Q}_i^{(l)} = I_1. \quad (6.4)$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{i+1}^{(A_1)} - \lambda_i^{(A_1)})^{-2} < \infty, \quad (6.5)$$

то равенство (6.4) остается справедливым и для произвольных перестановок $\mathbf{Q}_i^{(l)}$. Более того, существует такое $C > 0$, что

$$\left\| \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{Q}_i^{(l)} \right\| \leq C$$

для любого конечного набора $\mathcal{I}$ из целых чисел $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$.

Эта теорема представляет собой слегка расширенное утверждение теорем V.4.15 и V.4.16 из работы [19] (в [19] рассматривается случай, когда собственные числа $\lambda_i^{(A_1)}$ являются простыми). Ее доказательство проводится тем же способом, что и доказательство указанных теорем в [19].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из (6.4) следует, что существует также предел

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0, i \geq i_0}^n \sum_{\lambda \in \text{Int } \gamma_i} \mathbf{P}_{\lambda}^{(l)} = I_1, \quad (6.6)$$

где λ — собственные числа оператора $H_1^{(l)}$, а $\mathbf{P}_{\lambda}^{(l)}$ — соответствующие собственные проекторы. Если, кроме того, выполняется неравенство (6.5) и все собственные числа $\lambda_i^{(A_1)}$ простые, то в (6.6) можно проводить произвольные перестановки $\mathbf{P}_{\lambda}^{(l)}$ (см. теорему V.4.16 из [19]).

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что, как и выше, $\Delta_m = (\mu_m^{(1)}, +\infty)$. Предположим также, что существует K_B -ограниченный контур $\Gamma_l \subset D_l$, удовлетворяющий условию (3.9) и такой, что часть его компоненты $\Gamma_m^{l_m}$ совпадает с лучом $\tilde{\Delta}_m^0 = [\mu_0, ib_0 + \infty)$, где $\mu_0 \in D_m^{l_m}$, $\mu_0 = a_0 + ib_0$ и $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, наконец, что оставшаяся часть $\tilde{\Gamma}_l = \Gamma_l \setminus \tilde{\Delta}_m^0$ контура Γ_l лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu < a_0$ и для $\mu \in \tilde{\Delta}_m^0$ выполнено неравенство $\|K'_B(\mu)\| \leq \tilde{C}(1 + |\operatorname{Re} \mu|)^{-\theta}$, где $\tilde{C} > 0$, $\theta > 1$. Пусть, кроме того, выполнено условие (6.5). Тогда последовательность подпространств $\mathcal{N}_i^{(l)} = \mathbf{Q}_i^{(l)} \mathcal{H}_1$, $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$, является базисом пространства $\mathcal{H}_1$, квадратично близким к ортогональному базису. Если к тому же $\dim \mathbf{P}_i^{(A_1)} \mathcal{H}_1 \leq n$, где n – некоторое натуральное число, одно и то же для всех $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$, то объединение ортонормированных базисов подпространств $\mathcal{N}_i^{(l)}$, $i = 0, i_0, i_0 + 1, \dots$, оказывается базисом Бари пространства $\mathcal{H}_1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, DFG и РФФИ.

Список литературы

- [1] R. L. Jaffe, F. E. Low. Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 2105–2118.
- [2] Ю. А. Симонов. ЯФ. 1982. Т. 36. № 3. С. 722–731.
- [3] S. Okubo. Progr. Theor. Phys. 1954. V. 12. P. 603–622.
- [4] W. Glöckle, L. Müller. Phys. Rev. C. 1981. V. 23. P. 1183–1195.
- [5] А. Ю. Корчин, А. В. Шебеко. ЯФ. 1993. Т. 56. № 12. С. 1663–1671.
- [6] B. A. Malyshev, R. A. Minlos. J. Stat. Phys. 1979. V. 21. P. 231–242; Commun. Math. Phys. 1981. V. 82. P. 211–226.
- [7] Б. С. Павлов, А. А. Шушков. Матем. сб. 1988. Т. 137. № 2. С. 147–183.
- [8] B. H. J. McKellar, C. M. McKay. Aust. J. Phys. 1983. V. 36. P. 607–616.
- [9] E. W. Schmid. Helv. Phys. Acta. 1987. V. 60. P. 394–397.
- [10] А. К. Мотовилов. In: Proc. of the Intern. Workshop “Mathematical aspects of the scattering theory and applications”. St. Petersburg: St. Petersburg University, 1991. P. 101–108.
- [11] А. К. Мотовилов. J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6647–6664; А. К. Мотовилов. ТМФ. 1995. Т. 104. С. 281–303.
- [12] М. А. Браун. ТМФ. 1987. Т. 72. С. 394–402.
- [13] V. M. Adamyan, H. Langer. J. Operator Theory. 1995. V. 33. P. 259–277.
- [14] V. Adamyan, H. Langer, R. Mennicken, J. Saurer. Math. Nachr. 1996. B. 178. S. 43–80.
- [15] R. Mennicken, A. A. Shkalikov. Math. Nachr. 1996. B. 179. S. 259–273.
- [16] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
- [17] А. К. Мотовилов. Math. Nachr. 1997. B. 187. S. 147–210.
- [18] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [19] Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [20] П. Лакс, Р. Филлипс. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
- [21] В. М. Адамьян. Функциональный анализ и его приложения. 1973. Т. 7. № 4. С. 1–16.
- [22] Б. С. Павлов. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 1. С. 217–246.
- [23] Б. С. Павлов, С. И. Федоров. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 2. С. 132–168.
- [24] R. Mennicken, A. K. Motovilov. Operator interpretation of resonances arising in spectral problems for 2×2 operator matrices. funct-an/9708001.
- [25] А. И. Вирозуб, В. И. Мацаев. Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8. № 1. С. 1–10.
- [26] А. С. Маркус, В. И. Мацаев. Матем. сб. 1988. Т. 133. № 3. С. 293–313.

Поступила в редакцию 20.I.1998 г.