Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Новиков, Б. И. Сулейманов, “Квантования” изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 39–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8950>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:35:13

© 2016 г.

Д. П. Новиков*, Б. И. Сулейманов†

“КВАНТОВАНИЯ” ИЗОМОНОДРОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Построены решения аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих изомонодромной полиномиальной гамильтоновой системе Гарнье с двумя степенями свободы. Они определены решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, условием совместности которых является данная система Гарнье. Эти решения с помощью явных замен сводятся также к решениям уравнений Белавина–Полякова–Замолотчикова с четырьмя переменными и двумя пространственными переменными.

Ключевые слова: уравнения Шредингера, гамильтоновость, изомонодромные деформации, система Гарнье, уравнения Белавина–Полякова–Замолотчикова, уравнения Пенлеве.

DOI: 10.4213/tmf8950

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) типа Пенлеве в последние годы выделилась тема связей между линейными уравнениями метода изомонодромных деформаций (ИДМ), которые совместны на этих нелинейных ОДУ, и линейными дифференциальными уравнениями в частных производных квантовой механики и квантовой теории поля [1]–[27]. Хронологически первой по этой теме является, по-видимому, статья [1], где установлен следующий факт: шесть канонических ОДУ Пенлеве $\lambda''_{tt} = f_j(t, \lambda, \lambda'_t)$, $j = 1, \dots, 6$, эквивалентны гамильтоновым системам

$$\lambda'_t = H'_\mu(t, \lambda, \mu), \quad \mu'_t = -H'_\lambda(t, \lambda, \mu) \quad (1)$$

с такими гамильтонианами $H = H_j(t, \lambda, \mu)$, что решения уравнений ИДМ [28]

$$W''_{xx} = P(t, \lambda(t), \mu(t); x)W, \quad W'_t = A(t, \lambda(t), \mu(t); x)W'_x - \frac{A'_x(t, \lambda(t), \mu(t); x)}{2}W,$$

Исследование Б. И. Сулейманова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

*Омский государственный технический университет, Омск, Россия.

†Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия.

E-mail: bisul@mail.ru

условием совместности которых являются соответствующие системы (1), с помощью явных замен вида $\Psi = We^{S(t,x)}$ переводятся в решения уравнений

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi, \quad \varepsilon = 1. \quad (2)$$

Правые части уравнений (2), уже не содержащие зависимости от $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, при конкретном выборе очередности действий операторов умножения на переменную x и дифференцирования по ней задаются гамильтонианами $H = H_j(t, \lambda, \mu)$, $j = 1, \dots, 6$, гамильтоновых систем (1). Выбор другой очередности позволяет [5] символически записать эти шесть линейных эволюционных уравнений как уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi. \quad (3)$$

Из квантово-механических уравнений Шредингера, зависящих от постоянной Планка $\hbar = 2\pi\hbar = -2\pi i\varepsilon$, эволюционные уравнения (3) получаются в результате формальной замены $\varepsilon = 1$. Далее в настоящей статье подобные аналоги уравнения Шредингера, которые не зависят от постоянной Планка, следуя терминологии, введенной в работе [2], будем называть “квантованиями” соответствующих гамильтоновых систем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. “Квантования” (2) с $\varepsilon = 1$ встречаются в задачах диффузии [29], [30]. Рассмотренная выше связь между “квантованием” (2) ОДУ Пенлеве и соответствующими уравнениями ИДМ использовалась в работах [9], [10] и в серии публикаций Руманова [19]–[22] при исследовании некоторых проблем теоретико-вероятностного характера. Но в ряде частных случаев эта связь оказывается полезной (см. работы [3], [4], [17], [26]) и для построения решений квантово-механических временных уравнений Шредингера (3), в которых $\varepsilon = i\hbar$.

Связь линейных уравнений ИДМ с уравнениями квантовой теории поля была выявлена в [6]. В этой статье показано, что совместные уравнения ИДМ

$$\Phi'_x = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} \Phi, \quad \Phi'_{t_i} = -\frac{A_i}{x - t_i} \Phi \quad (4)$$

для решений систем Шлезингера в матрицах A_i размера 2×2 с помощью замены

$$\Psi = \tau(t_1, \dots, t_m) \Phi, \quad (\ln \tau)'_{t_i} = \sum_{j \neq i}^m \operatorname{tr} \frac{A_j A_i}{t_i - t_j},$$

переводятся в систему

$$\sum_i \frac{\Psi'_{t_i}}{x - t_i} = \Psi''_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i \Psi}{(x - t_i)^2}, \quad \sum_i (x - t_i) \Psi'_{t_i} = \left(\sum_i \Delta_i - A_\infty - \Delta_\infty \right) \Psi, \\ \sum_i \Psi'_{t_i} = -\Psi'_x,$$

где $\Delta_i = -\det A_i$, Δ_∞ – постоянные, A_∞ – постоянная матрица. Напомним, что системы Шлезингера вида

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_i} = \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial A_i}{\partial t_i} = -\sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

были открыты [31] именно в качестве условия совместности ОДУ (4).

При условии диагональности матрицы A_∞ уравнения для Ψ совпадают (см. работу [6]) с пространственно одномерными уравнениями Белавина–Полякова–Замолотчикова (БПЗ) [32], [33] минимальной модели двумерной квантовой теории поля с конформной группой симметрий, для которых центральный заряд алгебры Вира-соро равен единице. В приложении В статьи [6] также указано, что та же τ -функция, что и выше, и совместные решения Φ линейных ОДУ (4) задают матрицы

$$M(x_1, x_2) = \tau \Phi^{-1}(x_2) \Phi(x_1), \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad (6)$$

размера 2×2 , удовлетворяющие четырем линейным дифференциальным уравнениям в частных производных с дифференцированием уже по двум пространственным независимым переменным x_1, x_2 . Простой заменой (см. раздел 2 настоящей статьи) эти скалярные уравнения сводятся к уравнениям БПЗ с двумя пространственными переменными.

Формула (6) (см. также статью [34]) позднее послужила основой построения в [5] совместных решений “квантований”

$$\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = H_{t_i} \left(t_1, t_2, x_1, x_2, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Psi, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

определяемых гамильтонианами $H_{t_i}(t_1, t_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ гамильтоновых систем

$$(q_j)'_{t_i} = (H_{t_i})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{t_i} = -(H_{t_i})'_{q_j}, \quad j = 1, 2,$$

которые представляют собой изомонодромные высшие аналоги первого и второго ОДУ Пенлеве. Данные решения эволюционных уравнений (7) выражаются через совместные решения соответствующих линейных уравнений ИДМ формулой типа (6). Естественным выглядит вопрос: можно ли таким образом строить решения уравнений (7) для других изомонодромных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы? В настоящей статье показано, что ответ на него положителен для полиномиальной гамильтоновой системы Гарнье, которая была введена в рассмотрение в [35] и которая с помощью явных преобразований [35]–[37] сводится к давно известной изомонодромной системе Гарнье [28].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Список известных на сегодня гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, к которым применим ИДМ, можно найти в работах [38]–[40]. Хорошо известно, что система Гарнье возглавляет целую иерархию таких систем – их можно получить из системы Гарнье с помощью процедуры последовательного вырождения [37], [40]. С применением этой процедуры рассматриваемые далее конструкции, вероятно, можно расширить и на всю указанную иерархию. Отметим, что системы, исследованные в [5], являются двумя низшими членами данной иерархии.

В своих построениях мы опираемся на упомянутые выше результаты работы [6]. Их изложение и уточнение связи этих результатов с уравнениями БПЗ с двумя пространственными переменными производится в начале следующего раздела статьи. Далее в разделе 2 показывается, что в случае четырех времен данные уравнения БПЗ эквивалентны совместной системе эволюционных уравнений, два из которых суть “квантования” вида (7) гамильтоновой изомонодромной системы Гарнье с двумя степенями свободы в форме, выписанной Окамото в [36] (ниже она называется системой Гарнье–Окамото (ГО)). Эта система связана с частным случаем системы (5) с четырьмя временами ($m = 4$) [36], [41]. Однако, как подчеркивается

в заключительном п. 2.5 раздела 2 настоящей статьи, сведение всех решений упомянутой системы ГО с двумя степенями свободы к решениям систем Шлезингера с четырьмя временами t_m в явном виде до сих пор не описано.

Представление о сложности и тонкости вопроса о связи между системами Шлезингера и Гарнье, на которую указывалось еще самим Гарнье [42], можно составить на основе обзора [43]. Между тем в разделах 2 и 3 нашей работы решения эволюционных уравнений (7), определяемых общей системой ГО, построены в терминах решений линейных ОДУ (4), коэффициенты которых заданы именно всевозможными решениями общей системы Шлезингера (5) с четырьмя временами t_m . К последним упомянутым решениям, как показано в разделе 3, сводятся все решения полиномиальной системы Гарнье с двумя степенями свободы. В этом разделе выводится также формула (46), связывающая системы ГО и полиномиальные системы Гарнье для довольно широкого класса случаев. Однако, как продемонстрировано в конце раздела 3, однозначного соответствия между решениями этих двух систем данная простая формула во всех случаях не дает.

Но с использованием квантового аналога формулы (46) – замены (56) – в заключительном разделе показано, что система уравнений (7), определяемых общей системой ГО, эквивалентна совместной паре (7), задаваемой гамильтонианами общей полиномиальной системы Гарнье. Таким образом, решения этих “квантований” выписываются в терминах совместных решений систем линейных ОДУ, коэффициенты которых задаются как раз всевозможными решениями соответствующей полиномиальной системы Гарнье.

2. СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА, УРАВНЕНИЯ БПЗ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И “КВАНТОВАНИЯ” СИСТЕМЫ ГО

2.1. Вторую группу уравнений в системе Шлезингера (5) заменяет условие постоянства по $t_1, \dots, t_m$ матрицы $A_1 + \dots + A_m = A_\infty$. Без фактического ограничения общности системы Шлезингера размера 2×2 рассматривались в статье [6] в предположении, что их решения B_i таковы, что $\text{tr} B_i = 0$, $\det B_i = -\Delta_i = -\theta_i^2/4$ (постоянные $\pm\theta_i/2$ суть собственные значения матриц B_i), $\det B_\infty = -\Delta_\infty$, а матрица B_∞ определяется одним из выражений

$$B_\infty = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_\infty & 0 \\ 0 & -k_\infty \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

2.2. В статье [6] (см. приложение В) выписана система четырех уравнений

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{1}{x - t_i} + \frac{1}{y - x} \right) M'_{t_i} &= M''_{xx} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(x - t_i)^2} M, \\ \sum_i \left(\frac{1}{y - t_i} + \frac{1}{x - y} \right) M'_{t_i} &= M''_{yy} - \sum_i \frac{\Delta_i}{(y - t_i)^2} M, \\ \sum_i M'_{t_i} + M'_x + M'_y &= 0, \quad \sum_i t_i M'_{t_i} + x M'_x + y M'_y = \left(\Delta_\infty - \sum_i \Delta_i \right) M, \end{aligned}$$

решением которой является матрица (6). Результат $Y(t, x, y)$ замены

$$M = (x - y) \prod_{i=1}^m ((x - t_i)(y - t_i))^{\theta_i/2} e^{S(t)} Y, \quad S_{t_i} = \frac{\theta_i}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\theta_j}{t_i - t_j},$$

удовлетворяет системе БПЗ с двумя пространственными переменными (см. статью [44]):

$$\sum_{i=1}^m \frac{Y'_{t_i}}{x - t_i} = Y''_{xx} + \frac{Y_x - Y_y}{x - y} + \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{x - t_i} Y'_x, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{Y'_{t_i}}{y - t_i} = Y''_{yy} + \frac{Y'_x - Y'_y}{x - y} + \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{y - t_i} Y'_y,$$

$$\sum_{i=1}^m Y'_{t_i} + Y'_x + Y'_y = 0, \quad \sum_{i=1}^m t_i Y'_{t_i} + x Y'_x + y Y'_y = \lambda Y = \left(\Delta_\infty - \left(1 + \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{2} \right)^2 \right) Y. \quad (11)$$

2.3. Решения B_i системы Шлезингера (5) из п. 2.1 сдвигами

$$Q_i = \begin{pmatrix} q_{11}^i(t) & q_{12}^i(t) \\ q_{21}^i(t) & q_{22}^i(t) \end{pmatrix} = B_i + \frac{\theta_i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

преобразуются в решения Q_i этой же системы, удовлетворяющие следующим условиям.

УСЛОВИЕ 1. Собственные значения матриц $Q_i(t)$ суть нуль и постоянная θ_i .

При этом преобразование $Z = \Phi \prod_{i=1}^4 (x - t_i)^{\theta_i/2}$ переводит решения Φ системы (4) с матрицами $A_i = B_i$ в решения Z этой же системы, но уже с матрицами $A_i = Q_i$.

Далее рассматриваются эти решения Q_i уравнений Шлезингера (5) в случае четырех времен t_i с последующей фиксацией переменных t_3 и t_4 :

$$t_3 = 1, \quad t_4 = 0. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. То, что мы фиксируем t_3 и t_4 , по сути не ограничивает общности рассмотрения. Действительно, совместные решения A_k , $k = 1, \dots, 4$, уравнений (5) с независимыми переменными t_1, t_2 при ограничении (13) можно рассматривать как начальные данные (при $t_3 = 1$) для уравнений (5) с независимой переменной t_3 . Решение начальной задачи для уравнений Шлезингера (5) с независимой переменной t_3 и этими начальными данными можно, в свою очередь, рассматривать как начальные данные при $t_4 = 0$ для системы уравнений (5) с независимой переменной t_4 , а решение этой начальной задачи является совместным решением всех уравнений (5).

УСЛОВИЕ 2. В предположении, что решения B_i системы Шлезингера (5) из раздела 2 определяют постоянную матрицу B_∞ вида (8), справедливо соотношение

$$-\sum_{i=1}^4 Q_i(t) = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \chi + \theta_\infty - 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $\theta_\infty = k_\infty + 1$ не зависит от t_i и $\chi = -(\sum_{i=1}^4 \theta_i + \theta_\infty - 1)/2$.

Пусть также решения $Q_i(t)$ системы Шлезингера удовлетворяют следующим условиям.

УСЛОВИЕ 3. Элемент $q_{12}(x, t)$ матрицы

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} q_{11}(x, t) & q_{12}(x, t) \\ q_{21}(x, t) & q_{22}(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{x - t_i},$$

очевидно, равный

$$q_{12}(x, t) = \frac{X(t)x^2 + a_1(t)x + a_2(t)}{T(x, t)} = \frac{\sum_{i=1}^4 t_i q_{12}^i x^2 + a_1(t)x + a_2(t)}{\prod_{i=1}^4 (x - t_i)},$$

таков, что функция $X(t) = \sum_{i=1}^4 t_i q_{12}^i$ не равна тождественно нулю.

УСЛОВИЕ 4. Все нули $x(t) = \lambda_j(t)$ элемента $q_{12}(x, t)$ простые.

Из условий 2–4 следует (см. [36] и книгу [41]), что: а) $q_{12}(x, t)$ имеет два простых нуля и задается формулой

$$q_{12}(x, t) = \sum_{i=1}^4 \frac{q_{12}^i(t)}{x - t_i} = X(t) \frac{\Lambda(x, t)}{T(x, t)} = X(t) \frac{(x - \lambda_1(t))(x - \lambda_2(t))}{T(x, t)}; \quad (15)$$

б) компонента $z(x, t) = z_1(x, t)$ любого вектора $Z = (z_1, z_2)$, являющегося решением первой из систем ОДУ (4) с матрицами $A_i(t) = Q_i(t)$, удовлетворяет линейному ОДУ

$$\begin{aligned} z''_{xx} = & \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\theta_i - 1}{x - t_i} + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{x - \lambda_k} \right) z'_x - \\ & - \left(\frac{\kappa}{x(x-1)} - \sum_{i=1}^2 \frac{t_i(t_i - 1)K_i}{x(x-1)(x - t_i)} + \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)\mu_k}{x(x-1)(x - \lambda_k)} \right) z, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i - 1 \right)^2 - \theta_\infty^2 \right], \quad \mu_k = \sum_{i=1}^4 \frac{q_{11}^i}{\lambda_k - t_i}. \quad (17)$$

Совместность систем уравнений (4) означает, что наряду с уравнением (16) компонента $z(x, t)$ удовлетворяет также эволюционным уравнениям первого порядка

$$z'_{ti} = C_i(x, t)z'_x + J_i(x, t)z = s_i(t) \frac{T(x, t)}{(x - t_i)\Lambda(x, t)} z'_x + J_i(x, t)z, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

В свою очередь, замена

$$z(x, t) = \prod_{i=1}^4 (x - t_i)^{(\theta_i - 1)/2} (x - \lambda_1(t))^{1/2} (x - \lambda_2(t))^{1/2} v(x, t)$$

преобразует решение $z(x, t)$ уравнений (16) и (18) в решение системы

$$\begin{aligned} v''_{xx} = & \left[\frac{c_3}{x^2} + \frac{c_4}{(x-1)^2} + \frac{c_5}{x(x-1)} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i(t)}{x(x-1)(x-t_i)} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{3}{4(x-\lambda_j(t))^2} + \frac{\beta_j(t)}{x(x-1)(x-\lambda_j(t))} \right) \right] v, \quad (c_j)'_{t_i} = 0, \\ v'_{t_i} = & C_i(x, t)v'_x + \left[-\frac{(C_i(x, t))'_x}{2} + \gamma_i(t) \right] v. \end{aligned}$$

Отсюда следует (см. [28], [36]), что условие совместности ОДУ (16) с уравнением первого порядка (18) определяется совместными между собой гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial \mu_k}, \quad \frac{\partial \mu_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial \lambda_k}, \quad j, k = 1, 2, \quad (19)$$

где λ_i суть рассмотренные выше нули элемента $q_{12}(x, t)$, импульсы μ_i задаются формулами (17), а гамильтонианы K_i – формулами

$$\begin{aligned} K_i = & K_i(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \kappa) = \\ = & M_i \sum_{k=1}^2 M^{k,i} \left[\mu_k^2 - \left(\sum_{m=1}^2 \frac{\theta_m - \delta_{im}}{\lambda_k - t_m} + \frac{\theta_3}{\lambda_k - 1} + \frac{\theta_4}{\lambda_k} \right) \mu_k + \frac{\kappa}{\lambda_k(\lambda_k - 1)} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

в которых δ_{mi} – символ Кронекера,

$$M_i = -\frac{(\lambda_1 - t_i)(\lambda_2 - t_i)}{(t_i - t_{i+1})(t_i - 1)t_i}, \quad M^{k,i} = \frac{(\lambda_k - t_{i+1})(\lambda_k - 1)\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k+1}}.$$

Уравнения (19) представляют собой изомонодромную гамильтонову систему ГО с двумя степенями свободы [41], [45].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На самом деле в работах [36], [41] условие 3 явно не сформулировано, но налагаются дополнительные ограничения на соответствующие матрицы Q_i . В частности, в статье [41] (см. раздел 6.2) приведено следующее ограничение.

УСЛОВИЕ 5. Собственные значения матриц Q_i не являются целыми числами.

2.4. При $m = 4$ и выполнении равенства (13) система (10) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} t_1(t_1 - 1)(t_1 - t_2)Y'_{t_1} = & \frac{(x - t_1)(y - t_1)(x - t_2)(x - 1)x}{y - x} \times \\ & \times \left[Y''_{xx} + Y'_x \left(\frac{\theta_1}{x - t_1} + \frac{\theta_2 + 1}{x - t_2} + \frac{\theta_3 + 1}{x - 1} + \frac{\theta_4 + 1}{x} \right) - \frac{\lambda}{x(x - 1)} Y \right] - \\ & - \frac{(x - t_1)(y - t_1)(y - t_2)(y - 1)y}{y - x} \times \\ & \times \left[Y''_{yy} + Y'_y \left(\frac{\theta_1}{y - t_1} + \frac{\theta_2 + 1}{y - t_2} + \frac{\theta_3 + 1}{y - 1} + \frac{\theta_4 + 1}{y} \right) - \frac{\lambda}{y(y - 1)} Y \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
t_2(t_2 - 1)(t_2 - t_1)Y'_{t_2} &= \frac{(x - t_2)(y - t_2)(x - t_1)(x - 1)x}{y - x} \times \\
&\times \left[Y''_{xx} + Y'_x \left(\frac{\theta_1 + 1}{x - t_1} + \frac{\theta_2}{x - t_2} + \frac{\theta_3 + 1}{x - 1} + \frac{\theta_4 + 1}{x} \right) - \frac{\lambda}{x(x - 1)} Y \right] - \\
&- \frac{(x - t_2)(y - t_2)(y - t_1)(y - 1)y}{y - x} \times \\
&\times \left[Y''_{yy} + Y'_y \left(\frac{\theta_1 + 1}{y - t_1} + \frac{\theta_2}{y - t_2} + \frac{\theta_3 + 1}{y - 1} + \frac{\theta_4 + 1}{y} \right) - \frac{\lambda}{y(y - 1)} Y \right], \quad (22)
\end{aligned}$$

дополненной уравнениями (11). Уравнения (21), (22) суть “квантования” гамильтоновой системы ГО (19) двух переменных, поскольку в силу операторных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}y - y\frac{\partial}{\partial y} = 1$$

при подходящем выборе порядка действия операторов дифференцирования по переменным x , y и умножения на многочлены от этих переменных данные эволюционные уравнения символически можно представить в следующем виде ($\varepsilon = 1$):

$$\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t_i} = K_i \left(t_1, t_2, x, y, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \kappa \right) Y, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где $K_i(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \kappa)$ суть гамильтонианы (20) этой гамильтоновой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При подходящем выборе порядка действия указанных выше операторов уравнения (21), (22) можно также представить как “квантования” вида (23) (при $\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t_i} = K_i \left(t_1, t_2, x, y, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\kappa} \right) Y, \quad i = 1, 2,$$

гамильтоновых систем ГО (19), которые вместо постоянных θ_k , $k = 1, \dots, 4$, и κ зависят от любых других постоянных $\hat{\theta}_k$, $k = 1, \dots, 4$, и $\hat{\kappa}$. В частности, для всех гамильтонианов (20) уравнения (21), (22) можно символически записать в виде (при $\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon Y_{t_i} = K_i \left(t_1, t_2, x, y, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \kappa \right) Y, \quad i = 1, 2.$$

2.5. Выше рассмотрена конструкция, которая позволяет выписать в явном виде совместные решения эволюционных уравнений (21), (22) в терминах совместных решений линейных систем ОДУ (4) при $m = 4$. Коэффициенты последних задаются множеством решений нелинейных систем Шлезингера (5). Таким образом, имеется однозначное соответствие между построенными совместными решениями эволюционных уравнений (21), (22) и данным множеством. Поэтому возникает естественное желание выразить множество решений системы Шлезингера через решения гамильтоновой системы ГО (19) с теми же независимыми переменными t_1 , t_2 . Однако вопрос о связи между системами Шлезингера и Гарнье не так прост. Не совсем точны, например, высказываемые иногда утверждения о том, что в статье [36] описана эквивалентность этих систем. Даже в случае двух степеней свободы системы ГО в [36]

эквивалентность доказана лишь при выполнении для решений B_i системы Шлезингера равенства (8) с ненулевыми постоянными k_∞ и ряда других предположений. В частности, в этой статье не показано, что все возможные решения системы ГО с двумя степенями свободы сводятся к решениям систем Шлезингера размера 2×2 . До сих пор в явном виде это нигде не было не сделано.

В следующем разделе показано, каким образом общие решения полиномиальной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы можно свести к решениям систем Шлезингера размера 2×2 безо всяких дополнительных предположений. Во многом этот раздел основан на результатах недавних работ [38], [40], но в пп. 3.3–3.5 излагаются также весьма существенные дополнения к этим результатам.

3. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ГАРНЬЕ

3.1. Полиномиальную систему Гарнье составляют совместные гамильтоновы системы

$$(q_j)'_{t_i} = (H_{\text{Gar}, t_i})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{t_i} = -(H_{\text{Gar}, t_i})'_{q_j}, \quad i, j = 1, 2, \quad (24)$$

с гамильтонианами H_{Gar, t_i} и $H_{\text{Gar}, t_{i+1}}$, первый из которых задается формулой

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)H_{\text{Gar}, t_i} = & q_i(q_i - 1)(q_i - t_i)p_i^2 + [(\theta^0 + \theta^{t_{i+1}} + 1)q_i(q_i - 1) - \\ & - (2\theta_2^\infty + \theta^1 + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}} + 1)q_i(q_i - t_i) + \theta^{t_i}(q_i - 1)(q_i - t_i)]p_i + \\ & + \theta_2^\infty(\theta_2^\infty + \theta^1)q_i + (2q_i p_i + q_{i+1} p_{i+1} - \theta^1 - 2\theta_2^\infty)q_i q_{i+1} p_{i+1} - \\ & - \frac{1}{t_i - t_{i+1}} [t_i(t_i - 1)(p_i q_i + \theta^{t_i})p_i q_{i+1} - \\ & - t_i(t_{i+1} - 1)(2p_i q_i + \theta^{t_i})p_{i+1} q_{i+1} + \\ & + t_{i+1}(t_i - 1)q_i(p_{i+1}^2 q_{i+1} + \theta^{t_{i+1}}(p_{i+1} - p_i))] , \end{aligned} \quad (25)$$

а второй получается из (25) заменами $t_1 \leftrightarrow t_2$, $q_1 \leftrightarrow q_2$, $p_1 \leftrightarrow p_2$. В этих гамильтонианах θ^0 , θ^1 , θ^{t_1} , θ^{t_2} , θ_1^∞ , θ_2^∞ суть постоянные, которые связаны так называемым соотношением Фукса:

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta^{t_1} + \theta^{t_2} + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty = 0, \quad (26)$$

соответствующим выписываемой ниже системе ИДМ (36).

Первая из гамильтоновых систем (24) представляет собой систему ОДУ

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)(q_i)'_{t_i} = & 2p_i q_i \left[(q_i - 1)(q_i - t_i) - \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} q_{i+1} \right] + \\ & + 2p_{i+1} q_i q_{i+1} \left[q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - (\theta^1 + 2\theta_2^\infty) q_i^2 - \\ & - (1 + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}}) q_i + (1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_{i+1}}) t_i q_i + \\ & + t_i \theta^{t_i} + \frac{t_i - 1}{t_i - t_{i+1}} \left[t_{i+1} \theta^{t_{i+1}} q_i - t_i \theta^{t_i} q_{i+1} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)(q_{i+1})'_{t_i} = & 2p_i q_i q_{i+1} \left[q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] + 2p_{i+1} q_i q_{i+1} \left[q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - \\ & - (\theta^1 + 2\theta_2^\infty) q_i q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1) \theta^{t_{i+1}} q_i}{t_i - t_{i+1}} + \frac{t_i(t_{i+1} - 1) \theta^{t_i} q_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
t_i(t_i - 1)(p_i)'_{t_i} = & -p_i^2 \left[3q_i^2 - 2(t_i + 1)q_i + t_i - \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}}q_{i+1} \right] - \\
& -2p_{i+1}p_iq_{i+1} \left[2q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - p_{i+1}^2q_{i+1} \left[q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] + \\
& + p_i \left[2(\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_i + (1 + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}}) - \right. \\
& \left. - (1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_{i+1}})t_i - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)\theta^{t_{i+1}}}{t_i - t_{i+1}} \right] + \\
& + p_{i+1} \left[(\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_{i+1} + \frac{t_{i+1}(t_i - 1)\theta^{t_{i+1}}}{t_i - t_{i+1}} \right] - \theta_2^\infty(\theta_2^\infty + \theta^1), \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_i(t_i - 1)(p_{i+1})'_{t_i} = & p_i^2q_i \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} - 2p_{i+1}p_iq_i \left[q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - \\
& - p_{i+1}^2q_i \left[2q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] + p_i \frac{\theta^{t_i}t_i(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} + \\
& + p_{i+1} \left[(\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_i - \frac{t_i(t_{i+1} - 1)\theta^{t_i}}{t_i - t_{i+1}} \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

Вторая из гамильтоновых систем (24) является системой ОДУ

$$\begin{aligned}
t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(q_i)'_{t_{i+1}} = & 2p_iq_iq_{i+1} \left[q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] + \\
& + 2p_{i+1}q_iq_{i+1} \left[q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - (\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_iq_{i+1} - \\
& - \frac{1}{t_i - t_{i+1}} \left[t_{i+1}(t_i - 1)\theta^{t_{i+1}}q_i - t_i(t_{i+1} - 1)\theta^{t_i}q_{i+1} \right], \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(q_{i+1})'_{t_{i+1}} = & 2p_iq_iq_{i+1} \left[q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] + \\
& + 2p_{i+1}q_{i+1} \left[(q_{i+1} - 1)(q_{i+1} - t_{i+1}) + \frac{t_{i+1}(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}}q_i \right] - \\
& - (\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_{i+1}^2 - (1 + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}})q_{i+1} + \\
& + (1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_i})t_{i+1}q_{i+1} + \\
& + t_{i+1}\theta^{t_{i+1}} + \frac{t_{i+1} - 1}{t_i - t_{i+1}}(t_{i+1}\theta^{t_{i+1}}q_i - t_i\theta^{t_i}q_{i+1}), \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(p_i)'_{t_{i+1}} = & -p_i^2q_{i+1} \left[2q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - \\
& - 2p_{i+1}p_iq_{i+1} \left[q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - p_{i+1}^2q_{i+1} \frac{t_{i+1}(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} + \\
& + p_i \left[(\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_{i+1} + \frac{t_{i+1}(t_i - 1)\theta^{t_{i+1}}}{t_i - t_{i+1}} \right] - \\
& - p_{i+1} \frac{\theta^{t_{i+1}}t_{i+1}(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}}, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(p_{i+1})'_{t_{i+1}} = & -p_i^2 q_i \left[q_i + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - 2p_{i+1}p_i q_i \left[2q_{i+1} - \frac{t_{i+1}(t_i - 1)}{t_i - t_{i+1}} \right] - \\
 & -p_{i+1}^2 \left[3q_{i+1}^2 - 2q_{i+1}(t_{i+1} + 1) + t_{i+1} + \frac{t_{i+1}(t_{i+1} - 1)}{t_i - t_{i+1}} q_i \right] + \\
 & + p_i \left[(\theta^1 + 2\theta_2^\infty) q_i - \frac{t_i(t_{i+1} - 1)\theta^{t_i}}{t_i - t_{i+1}} \right] - \theta_2^\infty (\theta_2^\infty + \theta^1) + \\
 & + p_{i+1} \left[2(\theta^1 + 2\theta_2^\infty) q_{i+1} + (1 + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}}) - \right. \\
 & \left. - (1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_i}) t_{i+1} + \frac{t_i(t_{i+1} - 1)\theta^{t_i}}{t_i - t_{i+1}} \right]. \quad (34)
 \end{aligned}$$

3.2. При дополнительном предположении

$$\theta_1^\infty \neq \theta_2^\infty \quad (35)$$

совместность гамильтоновых систем (24) согласно [40] является условием совместности систем линейных ОДУ Шлезингера

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left[\frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x-1} + \frac{S_{t_1}}{x-t_1} + \frac{S_{t_2}}{x-t_2} \right] Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_1} = -\frac{S_{t_1}}{x-t_1} Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_2} = -\frac{S_{t_2}}{x-t_2} Z. \quad (36)$$

Здесь матрицы S_0 , S_1 , и S_{t_i} задаются формулами

$$S_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} \hat{A}_\xi P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad \xi = 0, 1, t_1, t_2, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_0 &= \begin{pmatrix} \theta^0 & -1 + \frac{q_1}{t_1} + \frac{q_2}{t_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}_1 &= \begin{pmatrix} \theta^1 + \theta_2^\infty - p_1 q_1 - p_2 q_2 & 1 \\ (p_1 q_1 + p_2 q_2 - \theta_2^\infty) \times & p_1 q_1 + p_2 q_2 - \theta_2^\infty \\ \times (\theta^1 + \theta_2^\infty - p_1 q_1 - p_2 q_2) & \end{pmatrix}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\hat{A}_{t_i} = \begin{pmatrix} \theta^{t_i} + p_i q_i & -\frac{q_i}{t_i} \\ t_i p_i (\theta^{t_i} + p_i q_i) & -p_i q_i \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1^\infty - \theta_2^\infty} & 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Функция

$$a = (p_1 q_1 + p_2 q_2 - \theta_2^\infty)(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \theta^1 - \theta_2^\infty) - t_1 p_1 (\theta^{t_1} + p_1 q_1) - t_2 p_2 (\theta^{t_2} + p_2 q_2) \quad (40)$$

есть элемент “21” матрицы

$$\hat{A}_\infty = -\hat{A}_0 - \hat{A}_1 - \hat{A}_{t_1} - \hat{A}_{t_2} = \begin{pmatrix} -\theta^0 - \theta^1 - \theta^{t_1} - \theta^{t_2} - \theta_2^\infty & 0 \\ a & \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

а функция $u = u(t_1, t_2)$ – совместное решение двух дифференциальных уравнений

$$t_i(t_i - 1) \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t_i} = q_i \{2p_i(t_i - q_i) + \theta^1 + 2\theta_2^\infty\} - 2q_i p_{i+1} q_{i+1} + t_i \theta^{t_i}, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Нетрудно заметить, что собственные значения каждой из матриц $\hat{A}_\xi$ равны 0 и θ^ξ , а их сумма с учетом соотношения Фукса (26) задается формулой

$$\hat{A}_\infty := -\hat{A}_0 - \hat{A}_1 - \hat{A}_{t_1} - \hat{A}_{t_2} = \begin{pmatrix} \theta_1^\infty & 0 \\ a & \theta_2^\infty \end{pmatrix}.$$

После преобразования (37) мы получаем решения

$$Q_1 = S_{t_1}, \quad Q_2 = S_{t_2}, \quad Q_3 = S_1, \quad Q_4 = S_0 \quad (42)$$

уравнений Шлезингера (5) при $m = 4$, при фиксации условий (13) и с постоянными

$$\theta_1 = \theta^{t_1}, \quad \theta_2 = \theta^{t_2}, \quad \theta_3 = \theta^1, \quad \theta_4 = \theta^0. \quad (43)$$

Сумма решений (42) задает постоянную матрицу

$$S_\infty = -S_0 - S_1 - S_{t_1} - S_{t_2} = \begin{pmatrix} \theta_1^\infty & 0 \\ 0 & \theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

которая совпадает с матрицей (14). Это означает, что в [40] рассмотрены лишь решения системы Шлезингера, которые заменами (12) переводятся в множество решений данных систем в случае матрицы B_∞ (8) с отличной от нуля постоянной $k_\infty = \theta_2^\infty - \theta_1^\infty$.

3.3. При выполнении равенства

$$\theta_1^\infty = \theta_2^\infty \quad (44)$$

преобразования

$$S_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_{21} & u \end{pmatrix}^{-1} \hat{A}_\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_{21} & u \end{pmatrix}$$

с функцией g_{21} , удовлетворяющей совместной паре соотношений

$$(g_{21})'_{t_k} - g_{21}(\ln u)'_{t_k} = -p_k(\theta^{t_k} + p_k q_k), \quad k = i, i + 1,$$

переводят матрицы (38) в решения (42) уравнений Шлезингера (5), сумма которых имеет вид жордановой клетки:

$$-\sum_{i=1}^4 Q_i(t) = \begin{pmatrix} \theta_1^\infty & 0 \\ \nu & \theta_1^\infty \end{pmatrix}.$$

Здесь ν – постоянная, которая посредством формулы $a(t_1, t_2) = \nu u(t_1, t_2)$ определяет совместное решение уравнений (41) через функцию (40). При этом собственные значения матриц S_i суть по-прежнему 0 и постоянные θ_i . После переобозначения (43)

мы получим решения (42) систем Шлезингера (5) при $m = 4$ и выполнении равенств (13), сумма которых с учетом сдвигов (12) задается в точности формулой

$$B_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}.$$

При $a \neq 0$ можно положить $\nu = 1$ и получить эти решения с нормировкой (9). Если же $a = 0$, то, положив $\nu = 0$, получим соответствующие решения системы Шлезингера, редуцирующей к шестому ОДУ Пенлеве (см. приложение настоящей статьи). Мы не останавливаемся на вопросе совместности равенства $a = 0$ с полиномиальной системой Гарнье, поскольку он не принципиален для основных целей нашей работы.

3.4. Полиномиальная гамильтонова система Гарнье (24) первоначально выписана в [35], где она с помощью явного преобразования выведена из системы ГО (19), (20). При этом как постоянные, так и переменные гамильтоновых систем ГО из работ [35] и [38], [40] отличаются друг от друга. В работе [38] указано, что решения данных систем ГО связаны между собой преобразованием Беклунда, однако это преобразование не приведено. Со своей стороны, отметим, что если справедливы неравенства (35) и дополнительные условия 3, 4, то решения полиномиальной системы Гарнье (24) и решения системы ГО (19), (20) связаны простыми формулами:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{t_1 + t_2 - (1 + t_2)q_1 - (1 + t_1)q_2}{1 - q_1 - q_2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{t_1 t_2 - t_2 q_1 - t_1 q_2}{1 - q_1 - q_2}, \quad (45)$$

$$q_1 = \frac{(1 - t_2)(\lambda_1 - t_1)(\lambda_2 - t_1)}{(t_1 - t_2)(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}, \quad q_2 = -\frac{(1 - t_1)(\lambda_1 - t_2)(\lambda_2 - t_2)}{(t_1 - t_2)(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}. \quad (46)$$

Действительно, посчитав элемент “12” в матрице коэффициентов

$$\frac{\hat{A}_0}{x} + \frac{\hat{A}_1}{x - 1} + \frac{\hat{A}_{t_1}}{x - t_1} + \frac{\hat{A}_{t_2}}{x - t_2}, \quad (47)$$

получим, что он равен

$$\frac{(1 - q_1 - q_2)x^2 + (-t_1 - t_2 + q_2(1 + t_1) + q_1(1 + t_2))x + t_1 t_2 - q_1 t_2 - q_2 t_1}{x(x - 1)(x - t_1)(x - t_2)}. \quad (48)$$

Поэтому равенства (45), (46) следуют из формулы (15) и из того факта, что преобразование подобия (37) с матрицей вида (39) не меняет элемент (48).

С помощью дифференцирования, используя системы (19), (20) и (24), можно проверить, что если ни одна из координат q_i и λ_i не равна тождественно нулю, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\theta^{t_1}}{q_1} &= \frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)} \left(\frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - t_2)\mu_1 - (\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - t_2)\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \right. \\ &\quad \left. - (\theta^{t_1} + \theta^{t_2} + \theta^1 + \theta^0 + \theta_2^{\infty}) + \frac{\theta^0 t_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right), \\ p_2 + \frac{\theta^{t_2}}{q_2} &= \frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)} \left(\frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - t_1)\mu_1 - (\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - t_1)\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \right. \\ &\quad \left. - (\theta^{t_1} + \theta^{t_2} + \theta^1 + \theta^0 + \theta_2^{\infty}) + \frac{\theta^0 t_1}{\lambda_1 \lambda_2} \right). \end{aligned}$$

3.5. Наше замечание 3.4 не решает полностью вопрос о связи системы ГО (19), (20) с полиномиальной системой Гарнье (24) из работ [38], [40].

Рассмотрим, например, редукцию полиномиальной системы Гарнье (24)

$$q_i + q_{i+1} = 1, \quad (49)$$

для которой формулы (45) теряют смысл. В случае выполнения равенства

$$\theta_1^\infty = \theta_2^\infty + 1 \quad (50)$$

такая редукция существует. В самом деле, сложение уравнений (27) и (28) дает соотношение

$$t_i(t_i - 1)(q_i + q_{i+1})'_{t_i} = (q_i + q_{i+1} - 1)(2p_i q_i(q_i - t_i) + 2p_{i+1} q_{i+1} q_i - (\theta^1 + 2\theta_2^\infty)q_i - t_i \theta^{t_i}) + (1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}})(t_i - 1)q_i, \quad (51)$$

которое в предположении, что верно равенство (49), влечет за собой тождество

$$1 + \theta^1 + 2\theta_2^\infty + \theta^0 + \theta^{t_i} + \theta^{t_{i+1}} = 0. \quad (52)$$

Отметим, что при редукции $q_i = 0$, $q_{i+1} = 1$ система (24) не имеет решений ни при каких значениях θ^ξ . Равенства (50) и (52) с учетом соотношения Фукса (26) равносильны.

Правые части уравнений (28) и (31) совпадают. Поэтому из равенства (49) также следует тождество $t_i(t_i - 1)(q_i)'_{t_i} + t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(q_i)'_{t_{i+1}} = 0$, означающее, что функция q_i зависит от своих аргументов следующим образом:

$$q_i(t_i, t_{i+1}) = q_i(\omega), \quad \omega = \frac{t_i(t_{i+1} - 1)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (53)$$

При выполнении равенств (49) и (50) результаты сложения уравнения (29) с уравнением (33) и уравнения (30) с уравнением (34) совпадают:

$$t_i(t_i - 1)(p_i)'_{t_i} + t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(p_i)'_{t_{i+1}} = t_i(t_i - 1)(p_{i+1})'_{t_i} + t_{i+1}(t_{i+1} - 1)(p_{i+1})'_{t_{i+1}}.$$

Таким образом, разность $p_i - p_{i+1}$ также зависит лишь от независимой переменной ω :

$$P(t_i, t_{i+1}) = p_i(t_i, t_{i+1}) - p_{i+1}(t_i, t_{i+1}) = P(\omega). \quad (54)$$

В силу (53) и (54) уравнение (28) и разность уравнения (29) с уравнением (30) принимают при этом вид гамильтоновой системы:

$$Q'_\omega = H'_P(\omega, Q, P), \quad P'_\omega = -H'_Q(\omega, Q, P), \quad (55)$$

где $Q = q_i(\omega)$, а гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{1}{\omega(\omega - 1)} (P^2 Q(Q - 1)(Q - \omega) - P((\theta_1 + 2\theta_2^\infty)Q(Q - 1) + \omega \theta^{t_i}(Q - 1) + (\omega - 1)\theta^{t_{i+1}}Q) + \theta_2^\infty(\theta_2^\infty + \theta^1)Q).$$

Если не рассматривать вырожденные решения этой гамильтоновой системы, в которой $Q(\omega) = \text{const}$ и $Q(\omega) = \omega$, существующие при дополнительных ограничениях на постоянные θ^ξ , то после исключения из системы (55) импульса $P(\omega)$ координата $Q(\omega)$ удовлетворяет общему случаю шестого ОДУ Пенлеве: гамильтониан H совпадает с известным полиномиальным гамильтонианом для этого ОДУ [46]. После нахождения $Q(\omega)$, $P(\omega)$ определение p_i и p_{i+1} сводится к решению совместных между собой уравнений Риккати.

При редукции (49) из вида формулы (48) для элемента “12” матрицы (47) видно, что условие 3 из предыдущего раздела не выполнено. Заметим, что равенство (50) противоречит также условию 5. Таким образом, рассмотренные выше конструкции из работ [36], [41] не позволяют привести все решения систем ГО к системам Шлезингера, даже если матрица B_∞ для последних имеет вид (8) с $k_\infty \neq 0$.

4. “КВАНТОВАНИЯ” ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ

Квантовым аналогом формулы связи (46) является замена следующего вида:

$$\zeta = \frac{(1-t_2)(x-t_1)(y-t_1)}{(t_1-t_2)(x-1)(y-1)}, \quad \eta = -\frac{(1-t_1)(x-t_2)(y-t_2)}{(t_1-t_2)(x-1)(y-1)}. \quad (56)$$

Эта замена и явная замена

$$Y = (xy)^\alpha (x-1)^\beta (y-1)^\beta V, \quad (57)$$

где α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha(\alpha + \theta_4) = 0, \quad \lambda = 2\alpha\beta + (\theta_3 + 1)\alpha + (\theta_4 + 1)\beta + \beta(\beta + \theta_3) + (\theta_1 + \theta_2 + 1)(\alpha + \beta),$$

переводят решения “квантований” (21), (22) в совместные решения уравнений

$$\begin{aligned} t_1(t_1-1)V'_{t_1} &= \left[\zeta^3 - (t_1+1)\zeta^2 + t_1\zeta - \frac{t_1(t_1-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\zeta\zeta} + \left[2\zeta^2\eta + \frac{2t_1(t_2-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\zeta\eta} + \\ &+ \left[\zeta\eta^2 - \frac{t_2(t_1-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\eta\eta} + \left[-(\theta_3+2\beta-1)\zeta^2 + t_1\zeta(\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\alpha+2\beta) - \right. \\ &- \zeta(\theta_1+\theta_2+\theta_4+2\alpha+2) + t_1(\theta_1+1) - \frac{(\theta_1+1)t_1(t_1-1)\eta}{t_1-t_2} + \\ &+ \left. \frac{(\theta_2+1)t_2(t_1-1)\zeta}{t_1-t_2} \right] V'_\zeta + \left[-(\theta_3+2\beta-1)\zeta\eta + \frac{(\theta_1+1)t_1(t_2-1)\eta}{t_1-t_2} - \right. \\ &- \left. \frac{(\theta_2+1)t_2(t_1-1)\zeta}{t_1-t_2} \right] V'_\eta + [\beta(\beta+\theta_3)\zeta + (t_1-1)\theta_1\alpha + t_1\theta_1\beta]V, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} t_2(t_2-1)V'_{t_2} &= \left[\eta^3 - (t_2+1)\eta^2 + t_2\eta + \frac{t_2(t_2-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\eta\eta} + \left[2\eta^2\zeta - \frac{2t_2(t_1-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\zeta\eta} + \\ &+ \left[\eta\zeta^2 + \frac{t_1(t_2-1)\zeta\eta}{t_1-t_2} \right] V''_{\zeta\zeta} + \left[-(\theta_3+2\beta-1)\eta^2 + t_2\eta(\theta_1+\theta_3+\theta_4+2\alpha+2\beta) - \right. \\ &- \eta(\theta_1+\theta_2+\theta_4+2\alpha+2) + t_2(\theta_2+1) + \left. \frac{(\theta_2+1)t_2(t_2-1)\zeta}{t_1-t_2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\theta_1 + 1)t_1(t_2 - 1)\eta}{t_1 - t_2} \Big] V'_\eta + \left[-(\theta_3 + 2\beta - 1)\zeta\eta - \frac{(\theta_2 + 1)t_2(t_1 - 1)\zeta}{t_1 - t_2} + \right. \\
& \left. + \frac{(\theta_1 + 1)t_1(t_2 - 1)\eta}{t_1 - t_2} \right] V'_\zeta + [\beta(\beta + \theta_3)\eta + (t_2 - 1)\theta_2\alpha + t_2\theta_2\beta]V.
\end{aligned} \tag{59}$$

В силу операторных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\eta - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} = 1 \tag{60}$$

эти уравнения можно символически записать как “квантования” (при $\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t_i} = H_{\text{Gar}, t_i} \left(t_1, t_2, \zeta, \eta, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \right) V, \quad i = 1, 2, \tag{61}$$

определяемые гамильтонианами (25) полиномиальной системы Гарнье.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В силу соотношений (60) уравнения (58), (59) можно записать и в виде ($\varepsilon = 1$)

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t_i} = H_{\text{Gar}, t_i} \left(t_1, t_2, \zeta, \eta, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \right) V, \quad i = 1, 2. \tag{62}$$

Таким образом, замены (56), (57) и конструкции разделов 2, 3 дают решения “квантований” (61) полиномиальной системы Гарнье (24). Эти решения явным образом выписаны через решения совместных уравнений ИДМ (4) с условием (13). При этом коэффициенты данных уравнений ИДМ однозначно выражаются (также явным образом) через множество совместных решений систем (24).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Случай $A_\infty = 0$

Рассмотрим случай системы уравнений (4)

$$\Phi_x = A(x)\Phi = \left(\frac{A_1}{x - t_1} + \frac{A_2}{x - t_2} + \frac{A_3}{x - t_3} + \frac{A_4}{x - t_4} \right) \Phi, \quad \Phi_{t_i} = -\frac{A_i}{x - t_i} \Phi$$

при $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_\infty = 0$. В силу последнего равенства

$$A(x) = \frac{P_1 x^2 + P_2 x + P_3}{(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)(x - t_4)}.$$

Все совместные решения этого случая системы (4) удовлетворяют соотношениям

$$\sum_i \Phi_{t_i} = -\Phi_x, \quad \sum_i t_i \Phi_{t_i} = -x\Phi_x, \quad x^2 \Phi_x + \sum_i t_i^2 \Phi_{t_i} = P_1 \Phi$$

и имеют вид $\Phi = F(r, t, \xi)$, где

$$r = \frac{x - t_4}{x - t_3} : \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3}, \quad t = \frac{t_1 - t_4}{t_1 - t_3} : \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3}, \quad \xi = \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3},$$

а функция F есть совместное решение системы уравнений

$$F_r = \left(\frac{a_1(\xi, t)}{r} + \frac{a_2(\xi, t)}{r-1} + \frac{a_3(\xi, t)}{r-t} \right) F, \quad F_t = \left(-\frac{a_3(\xi, t)}{r-t} + \frac{a_3(\xi, t)}{\xi-t} \right) F, \\ F_\xi = Q(\xi, t)F.$$

После калибровочного преобразования $F = g(\xi, t)L$ с такой матрицей $g(\xi, t)$, что $g_\xi = Qg$, получаем систему

$$L_r = \left(\frac{b_1(t)}{r} + \frac{b_2(t)}{r-1} + \frac{b_3(t)}{r-t} \right) L, \quad L_t = -\frac{b_3(t)}{r-t} L,$$

которой удовлетворяет матрица $L = L(r, t)$, уже не зависящая от ξ . Известно (см. [47]–[49]), что условие совместности этой системы сводится к шестому ОДУ Пенлеве.

В случае $A_\infty = \sum_{i=1}^m A_i = 0$ также верно равенство $\Delta_\infty = 0$, и к уравнениям (11) добавляется еще одно, которое совместно с ними и с уравнениями (10):

$$\sum_{i=1}^m t_i^2 Y'_{t_i} + x^2 Y'_x + y^2 Y'_y = - \left(1 + \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{2} \right) (\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + \theta_3 t_3 + \theta_4 t_4 + x + y) Y.$$

Данное уравнение следует из системы (4). При $m = 4$ совместное решение всех рассмотренных уравнений имеет вид $Y = \alpha(t, \xi)G(r, s, t)$, где

$$s = \frac{y - t_4}{y - t_3} : \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3}.$$

На основе формулы (6) несложно заключить, что $M = \tau(t, \xi)F(s, t, \xi)^{-1}F(r, t, \xi)$. Этот факт согласуется с предположением о том, что вышеупомянутое калибровочное преобразование $F = g(\xi, t)L$ задается матрицей $g(\xi, t) = CL(\xi, t)^{-1}$: при $C = 1$ имеем равенство $M = \tau(t, \xi)L(s, t)^{-1}L(r, t)$. Чтобы уточнить, верно ли это предположение, необходимо исходить из постановки задачи Римана–Гильберта и свести ее к интегральным уравнениям. По всей видимости, формулы Фредгольма показывают, что это предположение справедливо.

Список литературы

- [1] Б. И. Сулейманов, “Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций”, *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений*, ред. А. М. Ильин, Ин-т матем. Башкирского научного центра УрО АН СССР, Уфа, 1988, 93–102; Б. И. Сулейманов, *Дифференц. уравнения*, **30:5** (1994), 791–796.
- [2] Б. И. Сулейманов, *ТМФ*, **156:3** (2008), 364–377.
- [3] Б. И. Сулейманов, “Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве и старая квантовая теория”, *Тезисы докладов Международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110-й годовщине И. Г. Петровского* (Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г.), Изд-во МГУ, М., 2011, 356–357.
- [4] Б. И. Сулейманов, *Уфимск. матем. журн.*, **4:2** (2012), 127–135.
- [5] Б. И. Сулейманов, *Функц. анализ и его прил.*, **48:3** (2014), 52–62.
- [6] Д. П. Новиков, *ТМФ*, **161:2** (2009), 191–203.

- [7] D. P. Novikov, “A monodromy problem and some functions connected with Painlevé 6”, *Painlevé Equations and Related Topics*, Euler International Mathematical Institute, St.-Petersburg, 2011, 118–121.
- [8] Д. П. Новиков, Р. К. Романовский, С. Г. Садовничук, *Некоторые новые методы конечноразностного интегрирования солитонных уравнений*, Наука, Новосибирск, 2013.
- [9] A. Bloemendal, B. Virág, *Probab. Theory Related Fields*, **156**:3–4 (2013), 795–825.
- [10] A. Bloemendal, B. Virág, *Limits of spiked random matrices II*, arXiv: 1109.3704.
- [11] A. Zabrodin, A. Zotov, *J. Math. Phys.*, **53**:7 (2012), 073507, 19 pp., arXiv: 1107.5672.
- [12] A. Zabrodin, A. Zotov, *J. Math. Phys.*, **53**:7 (2012), 073508, 19 pp.
- [13] A. Zabrodin, A. Zotov, *Constr. Approx.*, **41**:3 (2015), 385–423.
- [14] А. В. Зотов, А. В. Смирнов, *ТМФ*, **177**:1 (2013), 3–67.
- [15] А. М. Левин, М. А. Олшанецкий, А. В. Зотов, *УМН*, **69**:1(415) (2012), 39–124, arXiv: 1311.4498.
- [16] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *JHEP*, **10** (2014), 109, 29 pp., arXiv: 1408.6246.
- [17] H. Nagoya, *J. Math. Phys.*, **52**:8 (2011), 083509, 16 pp.
- [18] H. Nagoya, Y. Yamada, *Ann. Henri Poincaré*, **15**:2 (2014), 313–344.
- [19] I. Rumanov, *Hard edge for beta-ensembles and Painlevé III*, arXiv: 1212.5333.
- [20] I. Rumanov, *J. Math. Phys.*, **56**:1 (2015), 013508, 16 pp., arXiv: 1306.2117.
- [21] I. Rumanov, *Beta ensembles, quantum Painlevé equations and isomonodromy systems*, arXiv: 1408.3847.
- [22] I. Rumanov, *Painlevé representation of Tracy–Widom $_{\beta}$ distribution for $\beta = 6$* , arXiv: 1408.3779.
- [23] H. Rosengren, *Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model. II. Schrödinger equation*, arXiv: 1312.5879.
- [24] H. Rosengren, *Commun. Math. Phys.*, **340**:3 (2015), 1143–1170, arXiv: 1503.02833.
- [25] A. Litvinov, S. Lukyanov, N. Nekrasov, A. Zamolodchikov, *JHEP*, **7** (2014), 144, 19 pp., arXiv: 1309.4700.
- [26] A. M. Grundland, D. Riglioni, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:24 (2015), 245201, 15 pp., arXiv: 1405.0968.
- [27] R. Conte, I. Dornic, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **352**:10 (2014), 803–806.
- [28] R. Garnier, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **29** (1912), 1–126.
- [29] А. И. Овсеевич, *Докл. РАН*, **414**:6 (2007), 732–735.
- [30] А. И. Овсеевич, *Пробл. передачи информ.*, **44**:1 (2008), 59–79.
- [31] L. Schlesinger, *J. Reine Angew. Math.*, **141** (1912), 96–145.
- [32] А. А. Белавин, А. М. Поляков, А. Б. Замолотчиков, “Бесконечная конформная симметрия в двумерной квантовой теории поля”, *Инстантоны, струны и конформная теория поля*, ред. А. А. Белавин, Физматлит, М., 2002, 224–271; A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [33] А. Б. Замолотчиков, В. А. Фатеев, *ЯФ*, **43**:4 (1986), 1031–1044.
- [34] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **15**:1 (1979), 201–278.
- [35] H. Kimura, K. Okamoto, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **63**:1 (1984), 129–146.
- [36] K. Okamoto, *Isomonodromic deformation and the Painlevé equations, and the Garnier system*, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg, Strasbourg, 1982; *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **33**:3 (1986), 575–618.
- [37] H. Kimura, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **155**:1 (1989), 25–74.
- [38] H. Sakai, *Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé-type equations*, Tech. Report, Univ. Tokyo, Tokyo, 2010.

- [39] H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, “Toward a classification of 4-dimensional Painlevé-type equations”, *Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems and Random Matrices* (Boston, MA, January 6–7, 2012), Contemporary Mathematics, **593**, eds. A. Dzhamay, K. Maruno, V. U. Pierce, AMS, Providence, RI, 2013, 143–161.
- [40] H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations*, arXiv: 1209.3836.
- [41] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, “From Gauss to Painlevé. Modern theory of special functions”, *Aspects of Mathematics*, **E16**, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1991.
- [42] R. Garnier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **43** (1926), 239–252.
- [43] М. В. Бабич, *УМН*, **64**:1(385) (2009), 51–134.
- [44] A. V. Stoyanovsky, *A relation between the Knizhnik–Zamolodchikov and Belavin–Polyakov–Zamolodchikov systems of partial differential equations*, 2000, arXiv: math-ph/0012013.
- [45] M. Mazzocco, *Int. Math. Res. Not.*, **12** (2002), 613–646.
- [46] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **56**:6 (1980), 264–268.
- [47] Г. Ф. Федоров, *Матем. сб.*, **11(53)**:1–2 (1942), 97–120.
- [48] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.
- [49] G. Mahoux, “Introduction to the theory of isomonodromic deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients”, *The Painlevé Property. One Century Later*, ed. R. Conte, Springer, New York, 1999, 35–76.

Поступила в редакцию 22.04.2015,
после доработки 24.05.2015