Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Андерсен, Л. О. Чехов, П. Норбари, Р. К. Пеннер,
Топологическая рекурсия для гауссовых средних и ко-
гомологические теории поля, *ТМФ*, 2015, том 185, но-
мер 3, 371–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:05:02

© 2015 г.

Й. Э. Андерсен^{*†}, Л. О. Чехов[‡],
П. Норбери[§], Р. К. Пеннер^{¶†}

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ ДЛЯ ГАУССОВЫХ СРЕДНИХ И КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Приводятся явные соотношения между разложенными по родам s -петлевыми средними гауссовой матричной модели и членами разложения по родам матричной модели Концевича–Пеннера, которая задает производящую функцию для объемов дискретизованных (открытых) пространств модулей $M_{g,s}^{\text{disc}}$ (дискретных объемов). С помощью этих соотношений гауссовы средние во всех порядках разложения по родам представляются в виде многочленов от специальных переменных времен с коэффициентами, оказывающимися инвариантными интегралами потомков для подлежащей кохомологической теории поля. Топологическая рекурсия для гауссовой модели переводится в рекуррентные соотношения на коэффициенты этих многочленов, что позволяет доказать их целочисленность и положительность. Найдены коэффициенты в первом поправочном порядке для $M_{g,1}$ при всех значениях g тремя способами: с применением улучшенных рекуррентных соотношений Харера–Цагира, с применением разложения гивенталевского типа для матричной модели Концевича–Пеннера и с помощью явного подсчета диаграмм.

Ключевые слова: хордовые диаграммы, разложение Гивенталья, матричная модель Концевича–Пеннера, дискретные объемы, пространства модулей, компактификация Делиня–Мамфорда.

DOI: 10.4213/tmf8951

Разделы 2 и 3, а также п. 6.2 раздела 6 написаны Л. О. Чеховым, разделы 1, 4, 5 и 7, а также оставшаяся часть раздела 6 написаны Й. Э. Андерсеном, П. Норбери и Р. К. Пеннером. Исследование Л. О. Чехова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

^{*}Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Århus University, Denmark

[†]California Institute of Technology, Pasadena, USA

[‡]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: chekhov@mi.ras.ru

[§]University of Melbourne, Melbourne, Australia

[¶]Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, France

1. ВВЕДЕНИЕ

Многоследовые средние $\langle \prod_{i=1}^s \text{tr } H^{k_i} \rangle^{\text{conn}}$ по гауссовым унитарным ансамблям длительное время представляли значительный интерес для исследования. Сначала Харер и Цагир [1] получили линейную рекуррентную формулу для односледового среднего в разложении по родам, что позволило получить ответы для исключительно высоких порядков разложения (недостижимые ни для каких иных методов). Хотя точные представления для s -следовых средних в виде s -кратных интегралов, справедливые при всех N , и были получены Брезаном и Хиками [2] с помощью метода реплик, улучшенного в работе [3], задача построения эффективного разложения по родам на основе этого метода остается открытой. Интерес к многоследовым средним оживился после появления методов *топологической рекурсии* [4], [5] и квантовых кривых [6]–[8]. Как было показано в нашей работе [9], гауссовы средние связаны посредством так называемой матричной модели Концевича–Пеннера (ММКП) [10], [11] с дискретными объемами открытых пространств модулей и одновременно с производящими функциями инвариантов полей потомков *когомологической теории поля* [12].

ММКП возникает из явных комбинаторных вычислений. Со времени появления работ [13] и [14] известно, что ММКП эквивалентна эрмитовой матричной модели с потенциалом, времена (константы связи) которого связаны с собственными значениями внешней матрицы ММКП с помощью преобразования типа преобразования Мивы, а размер матриц эрмитовой модели оказывается коэффициентом при логарифмическом члене. В работе [9] утверждается, что ММКП есть интеграл от резольвент гауссовой матричной модели. Резольвенты, содержащие многоследовые гауссовы средние, допускают естественное описание в виде мероморфных (мульти)дифференциалов с нулевыми вычетами над рациональной римановой поверхностью, известной как *спектральная кривая*, а потому их первообразные суть мероморфные функции на спектральной кривой. Гипотетически эти первообразные связаны (это было доказано в гауссовом случае в работе [7], см. также [15]) с так называемой *квантовой кривой*, представляющей собой линейное дифференциальное уравнение, являющееся некоммутативным квантованием спектральной кривой. Спектральная и квантовая кривые связаны между собой: волновая функция, возникающая из спектральной кривой, оказывается такой специализацией свободной энергии ММКП, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, собственно и представляющему собой квантовую кривую.

Геометрическое содержание ММКП также весьма богато: ее свободная энергия была связана со структурами *дискретизованных пространств модулей* в работе [16], а недавно она была связана (см. работы [17] и [18]) с производящими функциями дискретных объемов $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ – квазимногочленами, введенными в работе [19], которые позволяют вычислить число целых точек во внутренности $\mathcal{M}_{g,s}$ пространств модулей римановых поверхностей рода g с $s > 0$ дырками, периметры которых $P_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, s$, фиксированы в униформизации Штрёбеля. Более того, в работе [20] было показано, что в специальных временах $T_{2n}^\pm$, задаваемых дискретными преобразованиями Лапласа от мономов P_I^{2k} , эта модель допускает разложение в произведение двух моделей Концевича, связанных каноническим преобразованием Боголюбова, что было первым примером формул разложения гивента-

левского типа [21]. Подход работы [20] будет использован для представления членов разложения свободной энергии $\mathcal{F}_{g,s}$ ММКП в конечные суммы по графам, вершины которых суть члены разложения свободной энергии модели Концевича, при этом внутренние ребра отвечают квадратичным членам в операторе канонического преобразования, внешние полуребра (дилатонные листы) отвечают постоянным сдвигам старших времен и, наконец, внешние ребра (обычные листы) несут времена $T_{2n}^{\pm}$. Такое представление в виде графов обеспечивает еще одно доказательство квазиполиномиальности чисел $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$.

Из работ [22] и [23] известно, что члены топологической рекурсии [4], [24]–[26], основанной на специальной спектральной кривой, удовлетворяющей условиям совместности (связывающим инварианты $w_{0,1}$ и $w_{0,2}$), оказываются инвариантами полей потомков когомологической теории поля, или, что эквивалентно, фробениусова многообразия.

Фундаментальное семейство фробениусовых многообразий, описанное Дубровиным [27], задается пространствами Гурвица. Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ пространство Гурвица $H_{g,\mu}$ состоит из классов гомотопий разветвленных накрытий сферы поверхностью рода g с n отмеченными точками над ∞ , профилями ветвлений $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ и простыми ветвлениями над $\mathbb{P}^1 - \infty$. Это пространство имеет размерность $|\mu| + n + 2g - 2$, где $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$.

Двумерное многообразие Гурвица–Фробениуса $H_{0,(1,1)}$ задается разветвленным двойным накрытием сферы с двумя точками ветвления, которое остается неразветвленным в точке бесконечности. Его свободная энергия имеет вид

$$F_0(t_{0,1}, t_{0,0}) = \frac{1}{2} t_{0,0}^2 t_{0,1} + \frac{1}{2} t_{0,1}^2 \ln t_{0,1} - \frac{3}{4} t_{0,1}^2 \quad (1.1)$$

с эйлеровым векторным полем

$$E = t_{0,0} \frac{\partial}{\partial t_{0,0}} + 2t_{0,1} \frac{\partial}{\partial t_{0,1}}.$$

Заметим, что выражение (1.1) появляется как стандартный член (пертурбативный вклад) в разложении любой матричной модели, если отождествить $t_{0,1}$ с нормированным числом собственных значений, а $t_{0,0}$ – с первым временем. При этом получается выражение

$$\begin{aligned} \ln \int \prod_{i=1}^{t_{0,1}N} dx_i \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \exp \left[-N \sum_{i=1}^{t_{0,1}N} \left(\frac{1}{2} x_i^2 - t_{0,0} x_i \right) \right] = \\ = N^2 F_0(t_{0,1}, t_{0,0}) + \sum_{g=1}^{\infty} N^{2-2g} F_g(t_{0,1}), \end{aligned}$$

в котором ведущий член $1/N$ -разложения свободной энергии приведенной выше гауссовой матричной модели задается в точности выражением (1.1).

В работе [9] дискретные объемы были соотнесены с гауссовыми средними $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$, и с помощью описания в терминах когомологической теории поля удалось связать дискретные объемы с инвариантами полей потомков когомологической теории поля. Эти инварианты вычисляются уже в терминах замкнутых пространств модулей $\mathcal{M}_{g,s}$, компактифицированных по Делиню и Мамфорду.

Работа имеет следующую структуру.

В разделе 2 устанавливается эквивалентность между гауссовыми средними (корреляционными функциями) и членами разложения свободной энергии ММКП.

В разделе 3 описываются результаты работ [16], [19] и [20] для открытых дискретизованных пространств модулей, которые были использованы в работе [9] для установления связи между приведенными выше гауссовыми средними и дискретными объемами в чисто комбинаторном виде. Квантовую кривую при этом можно получить, рассматривая ММКП в случае матриц единичного размера. Далее приводятся описание формул разложения гивенталевского типа для ММКП, полученных в работе [20], и их представление в виде разложения по графам для членов разложения свободной энергии по родам. Из этого представления в виде графов также вытекает свойство квазиполиномиальности дискретных объемов, равно как и связь с кохомологической теорией поля.

В разделе 4 члены разложения гауссовых средних отождествляются с инвариантами полей потомков кохомологической теории поля с применением результатов работ [28] и [29]. Получаемое при этом разложение имеет канонический гивенталевский вид. Коэффициенты этого разложения, или образы дискретных преобразований Лапласа для квазимногочленов $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$, суть специальные коэффициенты $\hat{b}_{\vec{k}, \vec{\beta}}^{(g)}$, которые в определенной мере задают “наиболее экономичный” способ представления членов разложения по родам для s -петлевых средних $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$ и задаются линейными комбинациями от инвариантов полей потомков кохомологической теории поля для соседних уровней.

В разделе 5 развивается метод топологической рекурсии для гауссовых средних, выписываются общие рекуррентные соотношения на коэффициенты $\hat{b}_{\vec{k}, \vec{\beta}}^{(g)}$ и доказывается, что в области допустимости все эти коэффициенты оказываются положительными целыми числами.

Раздел 6 посвящен случаю однопетлевого среднего. Первый поправочный коэффициент $b_{g-2}^{(g)}$ находится тремя различными способами: с помощью модифицированных рекуррентных соотношений Харера–Цагира, с помощью графического представления разложения гивенталевского типа из раздела 3 и с помощью прямого подсчета диаграмм.

2. ЭФФЕКТИВНАЯ МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МНОГОПЕТЛЕВЫХ ГАУССОВЫХ СРЕДНИХ

Рассмотрим сумму связанных *хордовых диаграмм*, основанных на s остовах, или вставках петель, несущих на себе переменные u_i , $i = 1, \dots, s$. Для начала сформируем описание в терминах эффективной матричной модели для всех вкладов рода g в виде специальных *форм* – связанных ленточных графов рода g с s гранями и вершинами произвольных порядков не ниже третьего. Из формулы для эйлеровой характеристики при этом можно заключить, что при фиксированных g и s имеется только конечное число таких ленточных графов, совокупность которых будем обозначать через $\Gamma_{g,s}$. Множество $\Gamma_{g,s}$ перечисляет клетки в каноническом разложении Штребеля–Пеннера пространства модулей $\mathcal{M}_{g,s}$ по идеальным клеткам. В соответствии с утверждением работы [29] множество $\Gamma_{g,s}$ находится в биекции с циклическими хордовыми диаграммами, которые также называются *формами*

в терминологии работы [29], – это хордовые диаграммы, являющиеся зародышевыми и не имеющие ограничивающей хорды.

Корреляционные функции, или средние, задаются интегралами

$$\left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle = \int_{H \in \mathcal{H}_N} \left(\prod_{i=1}^s \text{tr } H^{k_i} \right) e^{-(N/2) \text{tr } H^2} DH, \quad (2.1)$$

в которых $\mathcal{H}_N$ – множество эрмитовых матриц размера $N \times N$. По теореме Вика произвольная корреляционная функция (2.1) представляется в виде суммы по всем возможным (полным) спариваниям между матричными элементами M_{ij} , а сами спаривания задаются двухточечными корреляционными функциями $\langle H_{i,j} H_{k,l} \rangle = \delta_{il} \delta_{jk} / 4$. Эти спаривания удобно представить в виде *ребер* – парных линий индексов. Соответствующие индексные линии проходят вдоль граней *ленточных графов*, содержащих упорядоченные наборы из s вершин с валентностями k_i , $i = 1, \dots, s$, и $\sum_{i=1}^s k_i / 2$ ребер. В каждой вершине фиксируется циклический порядок ребер, инцидентных этой вершине. Кроме того, в каждой вершине отмечается одно – “первое” – ребро. Обозначим через $\widehat{\Gamma}(k_1, \dots, k_s)$ такую совокупность ленточных графов. Тогда сумма в формуле (2.1) принимает вид

$$\sum_{\gamma \in \widehat{\Gamma}(k_1, \dots, k_s)} N^{b(\gamma) - \sum_{i=1}^s k_i / 2},$$

где $b(\gamma)$ – число граничных компонент графа γ .

Обозначим через $\widehat{\Gamma}(k_1, \dots, k_s)^c$ подмножество связных ленточных графов в $\widehat{\Gamma}(k_1, \dots, k_s)$, и пусть $\left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle^{\text{conn}}$ обозначает ту часть суммы, которая включает в себя только связные диаграммы. Связные корреляционные функции при этом допускают $1/N$ -разложение:

$$N^{s-2} \left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle^{\text{conn}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{-2g} \left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle_g^{\text{conn}},$$

в котором слагаемое с

$$\left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle_g^{\text{conn}} = |\widehat{\Gamma}_g(k_1, \dots, k_s)^c| \quad (2.2)$$

отвечает множеству $\widehat{\Gamma}_g(k_1, \dots, k_s)^c$ связных ленточных графов рода g с штрихованными вершинами (штрихи отмечают первые ребра).

Для случая нештрихованных вершин при этом справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} (-1)^s \left\langle \prod_{i=1}^s \text{tr } \ln(1 - u_i H) \right\rangle_g^{\text{conn}} &= \sum_{\{k_1, \dots, k_s\} \in \mathbb{Z}_+^s} \prod_{i=1}^s \left(\frac{u_i^{k_i}}{k_i} \right) \left\langle \prod_{i=1}^s (\text{tr } H^{k_i}) \right\rangle_g^{\text{conn}} = \\ &= \sum_{\{k_1, \dots, k_s\} \in \mathbb{Z}_+^s} \sum_{\gamma \in \Gamma_g(k_1, \dots, k_s)^c} \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma)|} \prod_{i=1}^s u_i^{k_i}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Gamma_g(k_1, \dots, k_s)^c$ – множество связных ленточных графов рода g с s нештрихованными занумерованными вершинами, имеющими валентности $k_1, \dots, k_s$, а $\text{Aut}(\gamma)$ –

Рис. 1. Суммирование радужных подграфов на хордах (штриховые линии) для одного остова (сплошная линия). В результате получается новое (утолщенное) ребро нового остова.

группа автоморфизмов ленточного графа γ с упорядоченными вершинами. Переход от выражений с нештрихованными вершинами к выражениям с штрихованными вершинами, или к хордовым диаграммам, осуществляется посредством дифференцирования:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^s \operatorname{tr} \frac{1}{I - u_i H} \right\rangle_g^{\text{conn}} &\equiv \left\langle \prod_{i=1}^s \operatorname{tr} \left[\sum_{k_i=1}^{\infty} u_i^{k_i} H^{k_i} \right] \right\rangle_g^{\text{conn}} = \\ &= (-1)^s \left[\prod_{i=1}^s u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \left\langle \prod_{i=1}^s \operatorname{tr} \ln(1 - u_i H) \right\rangle_g^{\text{conn}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формула (2.3) с учетом (2.4) дает

$$\left[\prod_{i=1}^s u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \left\langle \prod_{i=1}^s \operatorname{tr} \ln(1 - u_i H) \right\rangle_g^{\text{conn}} = \sum_{\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,s}^c} N^{2-2g} \prod_{i=1}^s u_i^{k_i}.$$

2.1. Суммирование планарных подграфов – переход к эффективной матричной модели. Произведем сначала частичное пересуммирование по планарным подграфам в выражении (2.3). Планарная хордовая диаграмма на отрезке есть *радужная диаграмма* (см. примеры на рис. 1). Радужные диаграммы с заданным числом хорд перечисляются числами Каталана, производящая функция которых имеет вид

$$f(u_i) := \frac{1 - \sqrt{1 - 4u_i^2}}{2u_i^2}, \quad (2.5)$$

так что можно в эффективной теории заменить исходное ребро хордовой диаграммы утолщенным ребром, несущим множитель $f(u_i)$, и запретить существование “пузырей”, или радужных подграфов.

Перейдем теперь к суммированию подграфов лестничного типа, в которых “перекладина” лестницы соединяет два цикла, несущих (различные или совпадающие) индексы i и j (см. пример на рис. 2). Каждая лестница содержит не менее одной перекладины, представляющей собой хорду, несущую множитель $u_i u_j$. Эффективный ленточный граф с новыми ребрами и вершинами получается с помощью раздутия циклов утолщенных ребер остовов до тех пор, пока они не соединятся попарно вдоль перекладин (каждое новое ребро содержит не менее одной перекладины); распеленные части этих циклов составляют при этом циклы длин $2r_k \geq 6$, попеременно ограниченных r_k перекладинами (хордами) и r_k утолщенными ребрами циклических остовов; эти циклы становятся вершинами соответствующих порядков $r_k \geq 3$ нового ленточного графа.

Рис. 2. Пересуммирование для лестничных подграфов. Утолщенные ребра, ассоциированные с выделенной лестничной поддиаграммой, становящейся ребром нового ленточного графа, выделены темным цветом. Крест-накрест штрихованные области становятся соответственно трех- и четырехвалентными вершинами нового ленточного графа, представляющего собой форму.

Вводя переменные $e^{\lambda_i} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4u_i^2}}{2u_i}$ или $u_i = \frac{1}{e^{\lambda_i} + e^{-\lambda_i}}$ для каждого лестничного подграфа, получаем сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_i u_j f(u_i) f(u_j))^k = \frac{1}{(u_i f(u_i) u_j f(u_j))^{-1} - 1} := \frac{1}{e^{\lambda_i + \lambda_j} - 1}. \quad (2.6)$$

Таким образом достигается эффективное описание.

ТЕОРЕМА 1 [9]. Член рода g (нестрихованной) связанной диаграммы с s остовами задается следующей (конечной!) суммой по ленточным графам форм $\Gamma_{g,s}$ рода g с s гранями и вершинами валентности не менее трех:

$$\left\langle \prod_{i=1}^s \text{tr} \ln(e^{\lambda_i} + e^{-\lambda_i} - H) \right\rangle_g^{\text{conn}} = \sum_{\substack{\text{все графы} \\ \gamma \in \Gamma_{g,s}}} \frac{1}{|\text{Aut}(\gamma)|} \prod_{\text{ребра}} \frac{1}{e^{\lambda_e^{(+)} + \lambda_e^{(-)}} - 1} = \\ := F_s^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (2.7)$$

где индексы $(+)$ и $(-)$ обозначают две стороны (границы) ребра e . В правой части величина $F_s^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ представляет собой член диаграммного разложения свободной энергии ММКП [10], задаваемой нормированным интегралом по эрмитовым матрицам X размера $N \times N$:

$$\mathcal{Z}[\Lambda] := \exp \left[\sum_{g,s} N^{2-2g} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2-2g-s} F_s^{(g)}(\lambda) \right] = \\ = \frac{\int DX \exp \left[-\alpha N \text{tr} (\Lambda X \Lambda X / 4 + \ln(1 - X) / 2 + X / 2) \right]}{\int DX \exp \left[-\alpha N \text{tr} (\Lambda X \Lambda X / 4 - X^2 / 4) \right]}. \quad (2.8)$$

Здесь суммирование ведется по всем стабильным кривым ($2g + s > 2$) и $\Lambda = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N})$.

Дифференцируя соотношение (2.7) по λ_i , в правой части получим стандартные петлевые средние, или (связные) корреляционные функции $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$, $x_i =$

$e^{\lambda_i} + e^{-\lambda_i}$, гауссовой матричной модели, которые удовлетворяют стандартным соотношениям топологической рекурсии [4], [24]. Тем самым получаются точные соотношения между резольвентами и членами разложения свободной энергии ММКП:

$$W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}) = \prod_{i=1}^s \left[\frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{-\lambda_i}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right] F_s^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (2.9)$$

Величины $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$ здесь подчиняются стандартным соотношениям топологической рекурсии [4], [26] для спектральной кривой $x = e^\lambda + e^{-\lambda}$, $y = (e^\lambda - e^{-\lambda})/2$.

3. ММКП И ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ

3.1. Матричная модель Концевича. Перейдем теперь к описанию клеточно-го разложения пространств модулей римановых поверхностей рода g с $s > 0$ отмеченными точками, доказанного независимо Харером [30] с применением штребелевских дифференциалов [31] и Пеннером [32], [33] с применением гиперболической геометрии. Теорема о клеточном разбиении утверждает, что страты в клеточном разбиении прямого произведения $\mathcal{M}_{g,s} \times \mathbb{R}_+^s$ открытого пространства модулей и s -мерного пространства строго положительных периметров дырок находятся во взаимно однозначном соответствии с ленточными графами рода g с s гранями (эти графы суть формы из раздела 2), ребра которых снабжены строго положительными числами $l_i \in \mathbb{R}_+$. Периметры P_I , $I = 1, \dots, s$, суть суммы чисел l_i , взятых (с кратностями) по ребрам, составляющим соответствующую грань (граничную компоненту или дырку). Поэтому представляется естественным отождествить эти числа с длинами соответствующих ребер.

Фундаментальная теорема Концевича [34] устанавливает связь между *индексами пересечений*

$$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_s} \rangle_g := \int_{\mathcal{M}_{g,s}} \prod_{I=1}^s \psi_I^{d_I}$$

и интегралом матричной модели Концевича. Здесь $\psi_I - \psi$ -класс, или класс Чженя, ассоциированный с I -й отмеченной точкой; интегралы от этих классов (индексы пересечений) не зависят от выбранных значений P_I , представляя собой чисто когомологические объекты. Умножая каждый класс $\psi_I^{d_I}$ на $P_I^{2d_I}$ и производя *преобразование Лапласа* по всем P_I , получим

$$\begin{aligned} \int \int_0^\infty dP_1 \cdots dP_s \exp \left[- \sum_I P_I \lambda_I \right] \int_{\mathcal{M}_{g,s}} \prod_{I=1}^s P_I^{2d_I} \psi_I^{d_I} = \\ = \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_s} \rangle_g \prod_{I=1}^s \prod_{I=1}^s \frac{(2d_I)!}{\lambda_I^{2d_I+1}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя явное представление для ψ -классов из работы [34], левую часть выражения (3.1) можно представить в виде суммы по трехвалентным ленточным графам с весами $1/(\lambda_{I_1} + \lambda_{I_2})$ на ребрах, где I_1 и I_2 – индексы двух (возможно, совпадающих) циклов, инцидентных данному ребру. Также появляется множитель $2^{|L|-|V|}$

(где через $|V|$ и $|L|$ обозначены числа вершин и ребер графа). Производящая функция при этом задается знаменитым интегралом матричной модели Концевича:

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} N^{2-2g} \alpha^{2-2g-s} \mathcal{F}_K^{(g,s)}(\{\xi_k\}) \right] &:= \\ &:= \frac{\int DX \exp[-\alpha N \operatorname{tr}(X^2 \Lambda/2 + X^3/6)]}{\int DX \exp[-\alpha N \operatorname{tr}(X^2 \Lambda/2)]}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\xi_k := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(2k)!}{\lambda_i^{2k+1}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} dP_I P_I^{2k} e^{-\lambda_I P_I} \quad (3.3)$$

– времена матричной модели Концевича.

3.2. Открытые дискретизованные пространства модулей и ММКП. Как было предложено в работе [16], положим все длины ребер графов Пеннера–Штрелбеля неотрицательными целыми числами $l_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, |L| \leq 6g - 6 + 3s$. Вместо интегрирований по $\mathcal{M}_{g,s}$ будем производить суммирования по целым точкам во внутренности пространства $\mathcal{M}_{g,s}$.

Так как длина l_i каждого ребра входит ровно два раза в сумму $\sum_{I=1}^s P_I$, эта сумма всегда оказывается положительным четным числом, и это ограничение должно учитываться при выполнении дискретного преобразования Лапласа с мерой $\exp[-\sum_{I=1}^s \lambda_I P_I]$. По аналогии с непрерывным преобразованием Лапласа в модели Концевича введем новые переменные времен, представляющие собой дискретные преобразования Лапласа:

$$T_{2k}^{\pm}(\lambda_I) := \frac{\partial^{2k}}{\partial \lambda_I^{2k}} \frac{1}{\mp e^{\lambda_I} - 1} = \sum_{P_I=1}^{\infty} (\mp 1)^{P_I} P_I^{2k} e^{-\lambda_I P_I}; \quad (3.4)$$

ограничения на $\mathbb{Z}_2$ обеспечивают существование двух наборов времен.

Следуя работе [19], мы определили *дискретные объемы* $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ – взвешенные числа во внутренностях пространств модулей $\mathcal{M}_{g,s}^{\text{disc}} \times \mathbb{Z}_+^s$ с фиксированными положительными целыми числами P_I , $I = 1, \dots, s$, являющимися периметрами дырок (циклов). Эти дискретные объемы равны (по модулю стандартных множителей объемов групп автоморфизмов) числам всех ленточных графов с вершинами валентностей ≥ 3 с положительными целыми длинами ребер, ограниченными условиями, фиксирующими длины всех циклов (периметров). Применяя тождество

$$\sum_{I=1}^s \lambda_I P_I = \sum_{e \in L} l_e (\lambda_{I_1^{(e)}} + \lambda_{I_2^{(e)}}),$$

где l_e – длина e -го ребра, а $I_1^{(e)}$ и $I_2^{(e)}$ – индексы двух (возможно совпадающих) циклов, инцидентных e -му ребру, получим

$$\sum_{\{P_I\} \in \mathbb{Z}_+^s} N_{g,s}(P_1, \dots, P_s) \exp \left[- \sum_{I=1}^s P_I \lambda_I \right] = \sum_{\Gamma_{g,s}} \frac{1}{|\operatorname{Aut} \Gamma_{g,s}|} \prod_{e=1}^{|L|} \frac{1}{e^{\lambda_{I_1^{(e)}} + \lambda_{I_2^{(e)}}} - 1}. \quad (3.5)$$

В выражении (3.5) нетрудно узнать член разложения по родам ММКП (2.8). Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1 [9]. *Производящая функция преобразованных по Лапласу дискретных объемов $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ задается ММКП (2.8). Соответствие с (3.5) достигается с помощью формулы*

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum'_{g,s,P_j \in \mathbb{Z}_+} N^{2-2g} \alpha^{2-2g-s} N_{g,s}(P_1, \dots, P_s) \right] \exp \left[- \sum_{I=1}^s P_I \lambda_I \right] = \\ = \frac{\int DX \exp[-\alpha N \operatorname{tr}(\Lambda X \Lambda X / 2 + \ln(1 - X) + X)]}{\int DX \exp[-\alpha N \operatorname{tr}(\Lambda X \Lambda / 2X - X^2 / 2)]}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

в которой суммирование идет по всем стабильным кривым с $2g - 2 + s > 0$ и со строго положительными периметрами P_l .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула (3.6) справедлива при всех значениях N и λ_l . Применяя ее в случае $N = 1$ (когда матричный интеграл превращается в обычный интеграл) и полагая $\lambda_l = \lambda$, $\alpha = 1/\hbar$ и $x = e^\lambda + e^{-\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum'_{g,s,P_j \in \mathbb{Z}_+} \hbar^{2g+s-2} N_{g,s}(P_1^2, \dots, P_s^2) \exp \left[-\lambda \sum_{I=1}^s P_I \right] \right] = \\ = \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda}}{\pi \hbar}} e^{-(2\hbar)^{-1} e^{2\lambda} + \hbar^{-1} \lambda} F(\hbar, x), \end{aligned}$$

где функция

$$F(\hbar, x) := \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-(1/\hbar)(t^2/2 + xt + \ln t)}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \hbar \frac{\partial}{\partial x} + (1 - \hbar) \right] F(\hbar, x) = 0.$$

Тем самым воспроизводится уравнение квантовой кривой из работы [8].

Заметим, что дискретные объемы суть квазимногочлены: их коэффициенты зависят от взаимных четностей периметров P_I ; ниже приводится еще одно доказательство этого факта (см. следствие 1). Поскольку производящая функция (2.8) связана соотношением (2.9) с обычными s -петлевыми гауссовыми средними $W_s^{(g)}$, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2 [9]. *Корреляционные функции $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$ гауссовой матричной модели, подчиняющейся стандартной топологической рекурсии, основанной на спектральной кривой $x = e^\lambda + e^{-\lambda}$, $y = (e^\lambda - e^{-\lambda})/2$, связаны с дискретными объемами следующим явным соотношением:*

$$\begin{aligned} W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}) = \\ = \prod_{I=1}^s \left[\frac{1}{e^{\lambda_I} - e^{-\lambda_I}} \sum_{P_I=1}^{\infty} P_I e^{-P_I \lambda_I} \right] N_{g,s}(P_1, \dots, P_s). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Матричная модель (2.8) проявляет целый ряд замечательных свойств. Помимо того что она задает производящие функции дискретных объемов, связанных с гауссовыми средними, она также эквивалентна [13], [35] эрмитовой матричной модели с потенциалом, задаваемым преобразованием Мивы переменных $t_k = (1/k) \operatorname{tr}(e^\Lambda + e^{-\Lambda})^{-k} + \delta_{k,2}/2$, она задает производящую функцию числа чистых функций Белого или соответствующих *детских рисунков* Гротендика [36] (см. также [37]), и, наконец, в специальных временах $T_{2r}^\pm$, $r = 0, 1, \dots$ (3.4), она эквивалентна произведению двух матричных моделей Концевича [34], переплетенных с помощью канонического преобразования переменных. Обратимся к этому последнему свойству.

ЛЕММА 3 [20]. *Статистическая сумма $\mathcal{Z}[\Lambda]$ (2.8), выраженная в терминах переменных времен $T_k^\pm(\lambda)$ (3.4), зависит только от четных времен $T_{2k}^\pm(\lambda)$ и подчиняется следующим точным соотношениям:*

$$\mathcal{Z}[\Lambda] = e^{\mathcal{F}_{KP}[\{T_{2n}^\pm\}]} = e^{C(\alpha N)} e^{-N^{-2}} \mathcal{A} e^{\mathcal{F}_K[\{T_{2n}^+\}] + \mathcal{F}_K[\{T_{2n}^-\}]}, \quad (3.8)$$

в которых $\mathcal{F}_K[\{T_{2n}^\pm\}]$ – свободная энергия матричной модели Концевича (3.2), переменные $T_{2n}^\pm$, задаваемые формулами (3.4), оказываются тем самым временами иерархий Кортевега–де Фриза, а $\mathcal{A}$ – оператор канонического преобразования:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{B_{2(n+m+1)}}{4(n+m+1)(2n+1)!(2m+1)!} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial^2}{\partial T_{2n}^+ \partial T_{2m}^+} + \frac{\partial^2}{\partial T_{2n}^- \partial T_{2m}^-} + 2(2^{2(n+m+1)} - 1) \frac{\partial^2}{\partial T_{2n}^+ \partial T_{2m}^-} \right\} + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha N^2 \frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial T_{2n}^-} + \frac{\partial}{\partial T_{2n}^+} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $C(\alpha N)$ – функция, зависящая только от αN и обеспечивающая обращение в нуль $\mathcal{F}_{KP}[\{T_{2n}^\pm\}] = 0$ при $T_{2n}^\pm \equiv 0$, а B_{2k} – числа Бернулли, порождаемые соотношением

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m t^m}{m!}.$$

Из этого канонического преобразования немедленно получается представление в виде (обычных) графов для членов $\mathcal{F}_{g,s}[\{T_{2n}^\pm\}]$ разложения

$$\mathcal{F}_{KP}[\{T_{2n}^\pm\}] = \sum_{g,s} N^{2-2g} \alpha^{2-2g-s} \mathcal{F}_{g,s}[\{T_{2n}^\pm\}].$$

ЛЕММА 4 [9], [20]. Член $\mathcal{F}_{g,s}[\{T_{2n}^\pm\}]$ разложения по родам ММКП (2.8) представляется в виде конечной суммы графов $G_{g,s}$, описанной ниже; каждый граф приносит в сумму множитель, также описанный ниже, деленный на порядок своей группы автоморфизмов:

- каждой вершине v_i , $i = 1, \dots, q$, графа $G_{g,s}$ присваиваются маркировка “+” или “–”, род $g_i \geq 0$ и s_i концов ребер, входящих в данную вершину ($2g_i - 2 + s_i > 0$, т. е. все вершины должны отвечать стабильным кривым); каждому концу ребра присваивается неотрицательное целое число $k_{r,i}^\pm$, $r = 1, \dots, s_i$; на эти целые числа налагается ограничение $\sum_{r=1}^{s_i} k_{r,i}^\pm = 3g_i - 3 + s_i$, а верхний индекс + или – задается маркировкой вершины;

- ребра могут быть или внешними ребрами (обычные листы) с $k_{r,i}^{\pm} \geq 0$ (через $a_i \geq 0$ будем обозначать число таких внешних ребер, входящих в i -ю вершину), или полуребрами (дилатонные листы) с $k_{r,i}^{\pm} \geq 2$ (обозначим через $b_i \geq 0$ число таких листов, входящих в i -ю вершину), или внутренними ребрами, инцидентными двум различным вершинам или одной и той же вершине (их концевые точки несут в общем случае разные числа $k_{r_1,i_1}^{\pm}$ и $k_{r_2,i_2}^{\pm}$) (обозначим через l_i число концевых точек внутренних ребер, инцидентных i -й вершине);
- каждая вершина приносит индекс пересечений Концевича $\langle \tau_{k_{1,i}^{\pm}} \cdots \tau_{k_{s,i}^{\pm}} \rangle_{g_i}$;
- каждое внутреннее ребро с маркировкой концов (k_1^+, k_2^+) или (k_1^-, k_2^-) (концевые точки такого ребра могут быть инцидентными одной и той же вершине) дает множитель

$$-\frac{B_{2(k_1^{\pm}+k_2^{\pm}+1)}}{2(k_1^{\pm}+k_2^{\pm}+1)} \frac{1}{(2k_1^{\pm}+1)!(2k_2^{\pm}+1)!},$$

а каждое внутреннее ребро с маркировкой конечных точек (k_1^+, k_2^-) (две конечные точки такого ребра обязательно инцидентны двум различным вершинам с различными маркировками $+$ и $-$) дает множитель

$$-\frac{B_{2(k_1^++k_2^-+1)}}{2(k_1^++k_2^-+1)} \frac{2^{2(k_1^++k_2^-+1)} - 1}{(2k_1^++1)!(2k_2^-+1)!};$$

- каждое полуребро с маркировкой $r^{\pm} \geq 2$ дает множитель $-2^{2r^{\pm}-1}/(2r^{\pm}+1)!$;
- каждое внешнее ребро с маркировкой $k_{r,i}^{\pm}$ несет на себе соответствующее время $T_{2k_{r,i}^{\pm}}^{\pm}$;
- $\sum_{i=1}^q (g_i + l_i/2 - 1) + 1 = g$ (полный род g равен сумме внутренних родов плюс число петель в графе);
- $\sum_{i=1}^q a_i = s$ (полное число внешних ребер фиксированно и равно s);

Из приведенных выше формул следует, что

$$\sum_{j=1}^s k_j^{\text{ext}} = 3g - 3 + s - \sum_{j=1}^{|L|} (1 + k_{j,1}^{\text{int}} + k_{j,2}^{\text{int}}) - \sum_{j=1}^{|B|} (k_j^{\text{half}} - 1), \quad (3.10)$$

где без учета маркировок вершин $k_j^{\text{ext}} \geq 0$ – индексы внешних ребер, $k_{j,1}^{\text{int}} \geq 0$ и $k_{j,2}^{\text{int}} \geq 0$ – индексы концов внутренних ребер, $k_j^{\text{half}} \geq 2$ – индексы полуребер, а $|L|$ и $|B|$ – числа соответственно внутренних ребер и полуребер графа.

Доказательство этого утверждения состоит в еще одном применении теоремы Вика, теперь с использованием экспоненты от линейно-квадратичного дифференциального оператора (3.9); типичный вид члена такой суммы приведен на рис. 3.

Из леммы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Величины $\mathcal{F}_{g,s}[\{T_{2n}^{\pm}\}]$ суть такие многочлены, что для каждого монома $T_{2n_1}^+ \cdots T_{2n_s}^-$ имеем $\sum_{i=1}^s n_i \leq 3g - 3 + s$, и старший член с $\sum_{i=1}^s n_i = 3g - 3 + s$ есть

$$\langle \tau_{n_1} \cdots \tau_{n_s} \rangle_g \left(\prod_{i=1}^s T_{2n_i}^+ + \prod_{i=1}^s T_{2n_i}^- \right).$$

 Рис. 3. Типичная диаграмма из разложения по графам $G_{g,s}$.

Отсюда также следует, что все дискретные объемы $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ являются $\mathbb{Z}_2$ -квазимногочленами относительно переменных P_I^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дискретные объемы $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ зависят только от четных степеней P_I , поскольку $\mathcal{F}_{g,s}$ зависят только от четных времен $T_{2n}^\pm$; квазиполиномиальность непосредственно следует из того, что $\mathcal{F}_{g,s}$ – многочлены от T_{2n}^+ и T_{2n}^- .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что квадратичная часть дифференциального оператора (3.9) имеет знакопередную структуру, так как числа Бернулли B_{2n} положительны при нечетных n и отрицательны при четных n ,

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right].$$

3.3. Времена для мультирезольвент. Рассмотрим сначала величины $N_{g,1}(P)$, которые представляют собой многочлены степени $3g-2$ от переменной P^2 , отличны от нуля только для четных P и должны обращаться в нуль при всех $P = 2, \dots, 4g-2$ (так как минимальное число ребер для формы рода g с одной гранью равно $2g$, а минимальное ненулевое значение периметра P равно $4g$). Поэтому для четных P многочлен $N_{g,1}(P)$ имеет вид $\prod_{k=1}^{2g-1} (P^2 - (2k)^2) \text{Pol}_{g-1}(P^2)$, где $\text{Pol}_{g-1}(x)$ – многочлен степени $g-1$, и $N_{g,1}(P)$ обращается в нуль при нечетных P , так что его преобразование Лапласа в формуле (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned} W_1^{(g)}(e^\lambda + e^{-\lambda}) &= \\ &= \frac{-1}{e^\lambda - e^{-\lambda}} \sum_{i=0}^{g-1} \frac{b_i^{(g)}}{2^{4g+2i-1} (4g+2i-1)!} \prod_{k=1}^{2g+i-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - (2k)^2 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{e^{2\lambda} - 1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

с некоторыми коэффициентами $b_i^{(g)}$. Применяя соотношение $-\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{e^{2\lambda} - 1} = \frac{2}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^2}$ и формулу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - m^2 \right) \frac{1}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^m} = \frac{4m(m+1)}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^{m+2}}, \quad m \geq 1, \quad (3.12)$$

получаем представление общего вида для однопетлевого среднего:

$$\begin{aligned} W_1^{(g)}(e^\lambda + e^{-\lambda}) &= \\ &= \frac{1}{e^\lambda - e^{-\lambda}} \sum_{i=0}^{g-1} b_i^{(g)} \frac{1}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^{4g+2i}} = \frac{1}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^{4g+1}} \sum_{i=0}^{g-1} \frac{b_i^{(g)}}{(e^\lambda - e^{-\lambda})^{2i}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В работе [9] была найдена формула перехода между $b_i^{(g)}$ и коэффициентами $P_{g,i}$ из работы [38]: свойство целочисленности $b_i^{(g)}$ предполагает такое же свойство для $P_{g,i}$ и наоборот, но доказательство гипотезы положительности для величин $P_{g,s}$, выдвинутой в работе [38], требует дополнительных исследований.

Перейдем теперь к случаю общих s -резольвент. Из формулы (2.9) имеем, что (стабильные) петлевые средние (т.е. те, для которых $2g + s - 2 \geq 1$) суть многочлены $W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}) = F_{g,s}(\{t_{2n_j+1}^{\pm}(\lambda_j)\})$ относительно времен, получающихся подстановкой

$$T_{2d}^{\pm} \rightarrow t_{2d+1}^{\pm}(\lambda_j) := \frac{1}{e^{\lambda_j} - e^{-\lambda_j}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right)^{2d+1} \frac{1}{e^{\lambda_j} \pm 1}. \quad (3.14)$$

Все времена $t_{2d+1}^{\pm}(\lambda)$ строго антисимметричны относительно замен переменных $\lambda \rightarrow -\lambda$.

Справедливы соотношения

$$t_{2d+1}^{-}(\lambda) + t_{2d+1}^{+}(\lambda) = \frac{1}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^{2d+1} \frac{2}{e^{2\lambda} - 1} = \sum_{j=1}^{d+1} q_{j,d} \frac{1}{(e^{\lambda} - e^{-\lambda})^{2j+1}} \quad (3.15)$$

и

$$t_{2d+1}^{-}(\lambda) - t_{2d+1}^{+}(\lambda) = \frac{1}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^{2d+1} \frac{2}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} = \sum_{j=1}^{d+1} \tilde{q}_{j,d} \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{(e^{\lambda} - e^{-\lambda})^{2j+1}} \quad (3.16)$$

с некоторыми целочисленными коэффициентами $q_{j,d}$ и $\tilde{q}_{j,d}$, где соотношение (3.16) вытекает из равенства $\frac{1}{e^{\lambda}-1} + \frac{1}{e^{\lambda}+1} = \frac{2}{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}$ и из еще одного полезного соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \prod_{k=1}^d \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - (2k-1)^2 \right) \frac{2}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} &= \frac{1}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{2^{2d+1}(2d)!}{(e^{\lambda} - e^{-\lambda})^{2d+1}} = \\ &= -2^{2d+1}(2d+1)! \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{(e^{\lambda} - e^{-\lambda})^{2d+3}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Теперь с применением (3.11), (3.15) и (3.16) можно эквивалентным образом разложить $F_{g,s}(\{t_{2n_j+1}^{\pm}(\lambda_j)\})$ по переменным

$$s_{k,\beta}(\lambda) := \frac{(e^{\lambda} + e^{-\lambda})^{\beta}}{(e^{\lambda} - e^{-\lambda})^{2k+3}}, \quad k = 0, \dots, 3g + s - 3, \quad \beta = 0, 1. \quad (3.18)$$

В разделе 4 показано, что коэффициенты этого разложения представляют собой инварианты полей потомков в когомологической теории поля.

Опишем теперь общую структуру многопетлевых средних.

ЛЕММА 5. *Общее выражение для стабильного ($2g + s - 3 \geq 0$) петлевого среднего $W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s})$ в терминах переменных $s_{k,\beta}(\lambda)$, определенных формулой (3.18), имеет вид*

$$W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}) = \sum_{\vec{k}, \vec{\beta}} \hat{b}_{\vec{k}, \vec{\beta}}^{(g)} \prod_{j=1}^s s_{k_j, \beta_j}(\lambda_j), \quad (3.19)$$

где k_j и β_j удовлетворяют условиям

$$2g - 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \beta_j \leq \sum_{j=1}^s k_j \leq 3g + s - 3, \quad \sum_{j=1}^s \beta_j \equiv 0 \pmod{2}. \quad (3.20)$$

Два нестабильных петлевых средних имеют вид

$$W_1^{(0)}(e^\lambda + e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}, \quad (3.21)$$

$$W_2^{(0)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, e^{\lambda_2} + e^{-\lambda_2}) = \prod_{i=1,2} \prod_{j=1,2} \frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{-\lambda_j}}. \quad (3.22)$$

Докажем ограничения (3.20) с применением двух соображений. Прежде всего, если произвести масштабное преобразование $\lambda_j \rightarrow \infty$ однородно для всех j , $\lambda_j \rightarrow \lambda_j + R$, каждое ребро даст множитель e^{-2R} и еще s множителей добавятся за счет производных. Минимальное число ребер (для формы с одной вершиной) равно $2g + s - 1$, так что минимально возможный множитель равен $e^{(-4g-3s+2)R}$, в то время как $s_{k,\beta}(\lambda)$ преобразуются как $e^{(-3-2k+\beta)R}$, что дает оценку снизу. Верхняя оценка появляется из анализа полюсного поведения при $\lambda_j = 0$. С одной стороны, $s_{k,\beta}(\lambda) \sim \lambda^{-2k-3}$ при $\lambda \rightarrow 0$ вне зависимости от параметра β ; с другой стороны, из сравнения с моделью Концевича можно заключить, что полюсная структура производных времен Концевича иерархии Кортвега–де Фриза имеет вид $t_{d_j}(\lambda_j) \sim \lambda_j^{-2d_j-3}$ с $\sum_j d_j \leq 3g + s - 3$, и потому $\sum_j d_j = \sum_j k_j$, что приводит к оценке сверху. То, что сумма β_j множителей должна быть четной, следует из свойства симметричности полного выражения относительно глобальной замены времен $T^\pm \rightarrow T^\mp$; при этой замене переменные $s_{k,\beta}(\lambda)$ ведут себя как $s_{k,\beta}(\lambda) \rightarrow (-1)^\beta s_{k,\beta}(\lambda)$, так что сумма всех бета-множителей должна быть четной.

В разделе 5 с помощью метода топологической рекурсии показано, что все допустимые соотношением (3.20) коэффициенты $\hat{b}_{k,\beta}^{(g)}$ оказываются положительными целыми числами (см. теорему 7).

4. КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕМАМИ

Перейдем теперь к описанию когомологической теории поля, связанной с дискретными объемами. Структура фробениусова многообразия размерности d эквивалентна когомологической теории поля в d -мерном векторном пространстве H с базисом $\{e_\alpha\}$ и метрикой η . Покажем, что квазимногочлены дискретных объемов эквивалентны корреляционным функциям когомологической теории поля, связанным с гурвицевским многообразием Фробениуса $H_{0,(1,1)}$, описанным в разделе 1. В настоящем разделе приведем два подхода случая рода 0: первый подход имеет конструктивный характер, а второй допускает обобщение на все рода. Из конструктивного подхода также следует, что в данном случае возникает однородная когомологическая теория поля. Примарные корреляционные функции этой когомологической теории поля оказываются виртуальными эйлеровыми характеристиками $\chi(\mathcal{M}_{g,n})$ пространств модулей.

4.1. Когомологические теории поля. Для заданного комплексного векторного пространства H , снабженного комплексной метрикой η , когомологическая теория поля представляет собой последовательность S_s -эквивариантных линейных отображений

$$I_{g,s}: H^{\otimes s} \rightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,s}),$$

удовлетворяющих следующим условиям совместности относительно включения страт. Произвольное разбиение на два непересекающихся подмножества $I \sqcup J = \{1, \dots, s\}$ задает отображение $\phi_I: \overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,|J|+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,s}$ такое, что

$$\phi_I^* I_{g,s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s) = I_{g_1,|I|+1} \otimes I_{g_2,|J|+1} \left(\bigotimes_{i \in I} v_i \otimes \Delta \otimes \bigotimes_{j \in J} v_j \right),$$

где $\Delta = \sum_{\alpha, \beta} \eta^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta$ относительно базиса $\{e_\alpha\}$ пространства H . Отображение $\psi: \overline{\mathcal{M}}_{g-1,s+2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,s}$ индуцирует отображение

$$\psi^* I_{g,s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s) = I_{g-1,s+2}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s \otimes \Delta).$$

Трехточечная корреляционная функция $I_{0,3}$ вместе с метрикой η индуцирует на пространстве H операцию произведения $\bullet$,

$$u \bullet v = \sum_{\alpha, \beta} I_{0,3}(u \otimes v \otimes e_\alpha) \eta^{\alpha\beta} e_\beta,$$

где $I_{0,3}$ принимает значения в $\mathbb{C}$. Вектор e_0 , удовлетворяющий соотношению

$$I_{0,3}(v_1 \otimes v_2 \otimes e_0) = \eta(v_1 \otimes v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in H,$$

есть единичный элемент для произведения на H .

Дополнительное условие, которому удовлетворяют как рассматриваемая когомологическая теория поля, так и инварианты Громова–Виттена, относится к забывающему отображению при $s \geq 3$: $\pi: \overline{\mathcal{M}}_{g,s+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,s}$, которое индуцирует отображение

$$I_{g,s+1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s \otimes e_0) = \pi^* I_{g,s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s). \quad (4.1)$$

4.2. Квазимногочлены и инварианты полей потомков. Дискретные объемы $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ суть четные (mod 2) квазимногочлены, т. е. они представляют собой четные многочлены на каждом фактор-множестве $2\mathbb{Z}^s \subset \mathbb{Z}^s$. Определим базис четных (mod 2) квазимногочленов, индуцированный (с помощью тензорного произведения) со следующего базиса функций одной переменной $p_{k,\alpha}(b)$ для $k = 0, 1, 2, \dots$ и $\alpha = 0, 1$:

$$p_{0,0}(b) = \begin{cases} 1, & b \text{ четно,} \\ 0, & b \text{ нечетно,} \end{cases} \quad p_{0,1}(b) = \begin{cases} 0, & b \text{ четно,} \\ 1, & b \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$p_{k+1,\alpha}(b) = \sum_{m=0}^b m p_{k,\alpha}(m), \quad k \geq 0.$$

Тогда получаем

$$p_{k,\alpha}(b) = \frac{p_{0,k+\alpha}(b)}{4^k k!} \prod_{\substack{-k \leq m \leq k \\ m \equiv k+\alpha \pmod{2}}} (b^2 - m^2), \quad (4.2)$$

где во втором нижнем индексе имеется в виду $k + \alpha \pmod{2}$.

Положим $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s)$ и $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место соотношение*

$$N_{g,s}(P_1, \dots, P_s) = \sum_{\vec{k}, \vec{\alpha}} c_{\vec{k}, \vec{\alpha}}^g \prod_{i=1}^s p_{k_i, \alpha_i}(P_i),$$

коэффициенты в котором суть инварианты полей потомков:

$$c_{\vec{k}, \vec{\alpha}}^g = \int_{\mathcal{M}_{g,s}} I_{g,s}(e_{\alpha'_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha'_s}) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении результатов работы [23], в которой теории со спектральными кривыми, удовлетворяющими некоторым специальным условиям, были отождествлены с полупростыми когомологическими теориями поля. Результат применения метода работы [23], к сожалению, не имеет конструктивного характера, так что здесь случай рода 0 рассматривается в другом подходе, задающем явную реализацию когомологической теории поля.

4.3. Однородная когомологическая теория поля в случае рода 0. *Примарные* корреляционные функции когомологической теории поля имеют вид

$$Y_{g,s} := \int_{\mathcal{M}_{g,s}} I_{g,s}: H^{\otimes s} \rightarrow \mathbb{C},$$

и их производящую функцию можно записать в виде

$$F(t_0, \dots, t_{D-1}) = \sum N^{2-2g} \frac{1}{s!} Y_{g,s} = \sum N^{2-2g} F_g,$$

где $(t_0, \dots, t_{D-1})$ в пространстве H^* – базис, дуальный базису $\{e_0, \dots, e_{D-1}\}$. Член рода 0 (F_0) оказывается *препотенциалом* соответствующей когомологической теории поля.

ТЕОРЕМА 3 (Манин [12], теорема III.4.3). *Можно однозначно реконструировать когомологическую теорию поля в случае рода 0 исходя из абстрактных корреляционных функций.*

Компактификация Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{g,s}$ допускает естественную стратификацию, перечисляемую *дуальными графами*. Дуальный граф $\Sigma \in \mathcal{M}_{g,s}$ имеет вершины, отвечающие неприводимым компонентам Σ с указанными родами, ребра отвечают особенностям Σ -типа каспов, а *хвосты* – ребра с открытыми концами (без вершин на концах) – отвечают каждой отмеченной точке Σ . Если Γ – дуальный граф типа (g, s) , то множество кривых D_Γ с одним и тем же ассоциированным дуальным графом Γ образует страт пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,s}$. Замыкание $\overline{D}_\Gamma = \cup_{\Gamma' < \Gamma} D_{\Gamma'}$, в котором частичный порядок задается последовательностью сжимаемых ребер, определяет элемент $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,s})$. Киль доказал [39], что $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ порождается $\overline{D}_\Gamma$, и предъявил все необходимые соотношения.

Доказательство теоремы 3 использует тот факт, что

$$\int_{\overline{D}_\Gamma} I_{0,s}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) = \bigotimes_{v \in V_\Gamma} Y_{0,|v|} \left(\bigotimes_{i=1}^s v_i \otimes \Delta^{\otimes |E_\Gamma|} \right),$$

это определяет вычисление когомологического класса на граничных стратах тавтологически из определения когомологической теории поля. Поскольку $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ порождается своими граничными стратами, а соотношения на множестве $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ находятся в соответствии с соотношениями, которым удовлетворяют абстрактные корреляционные функции, этого оказывается достаточно для доказательства теоремы.

В частности, имеются примарные инварианты

$$\begin{aligned} Y_{0,3}(e_0 \otimes e_0 \otimes e_1) &= 1 = Y_{0,3}(e_1 \otimes e_1 \otimes e_1), \\ Y_{0,s}(e_0 \otimes \text{любая комбинация}) &= 0, \quad s > 3, \\ Y_{0,s}(e_1^{\otimes s}) &= N_{0,s}(0, \dots, 0) = \chi(\mathcal{M}_{0,s}), \quad s > 3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которые задают когомологическую теорию поля в случае рода 0.

Когомологическая теория поля называется конформной, если ее препотенциал оказывается квазиоднородным относительно *эйлеровского векторного поля*:

$$E \cdot F_0 = (3 - d)F_0 + Q(t), \quad (4.5)$$

где Q – квадратный многочлен относительно времен $t = (t_0, \dots, t_{D-1})$. Применяя реконструкцию в случае рода 0 в теореме 3, Манин [12] доказал, что конформная когомологическая теория поля индуцирует следующее условие поднятия для когомологической теории поля в случае рода 0.

Пусть ξ – произвольное векторное поле на пространстве H , рассматриваемом как многообразие с координатами $t_0, \dots, t_{D-1} \in H^*$. Производная Ли относительно ξ от корреляционных функций когомологической теории поля $I_{g,s}$ индуцирует естественное действие

$$\begin{aligned} (\xi \cdot I)_{g,s}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) &= \deg I_{g,s}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) - \sum_{j=1}^s I_{g,s}(v_1 \otimes \cdots \otimes [\xi, v_j] \otimes \cdots \otimes v_s) + \\ &+ \pi_* I_{g,s+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \xi), \end{aligned}$$

где $\pi: \overline{\mathcal{M}}_{g,s+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,s}$ – забывающее отображение, $I_{g,s}$ – $(H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ -значные) тензоры на H , а векторное поле ξ действует инфинитезимально на $I_{g,s}$.

Назовем когомологическую теорию поля *однородной* веса d , если

$$(E \cdot I)_{g,s} = ((g - 1)d + s)I_{g,s}. \quad (4.6)$$

Если препотенциал удовлетворяет условию однородности (4.5), то из доказательства теоремы 3 следует свойство однородности для соответствующей когомологической теории поля в случае рода 0. Производную Ли бивектора Δ , дуального метрике η на H , можно вычислить в плоских координатах:

$$\mathcal{L}_E \cdot \Delta = \mathcal{L}_E \cdot \eta^{ij} e_i \otimes e_j = \eta^{ij} ([E, e_i] \otimes e_j + e_i \otimes [E, e_j]) = (d - 2)\eta^{ij} e_i \otimes e_j = (d - 2)\Delta,$$

где в качестве плоских координат выбраны координаты из работы [40], относительно которых $\eta = \delta_{i,D-1-i}$ и $E = \sum_i (\alpha_i t_i + \beta_i)(\partial/\partial t_i)$, где $\alpha_i + \alpha_{D-1-i} = 2 - d$.

4.4. Доказательство теоремы 2 в случае рода 0. Докажем теперь теорему 2 в случае рода 0. Для этого сконструируем препотенциал исходя из примарных (постоянных) членов в многочленах $N_{0,s}(P_1, \dots, P_s)$, которые однозначно (и конструктивно) определяют когомологическую теорию поля в случае рода 0. Более того, из квазиоднородности препотенциала следует свойство однородности когомологической теории поля. Старшие коэффициенты многочленов $N_{0,s}(P_1, \dots, P_s)$ удовлетворяют условию однородности, из которого следует, что эти коэффициенты суть корреляционные функции однородной когомологической теории поля.

Препотенциал

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum \frac{1}{s!} Y_{0,s} = \frac{1}{2} t_0^2 t_1 + \sum_{s \geq 3} \frac{1}{s!} N_{0,s}(\vec{0}) t_1^s = \\ &= \frac{1}{2} t_0^2 t_1 + \frac{1}{2} (1 + t_1)^2 \ln(1 + t_1) - \frac{1}{2} t_1 - \frac{3}{4} t_1^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

собранный из $N_{0,s}(\vec{0}) = (-1)^{s-3} (s-3)!$, квазиоднороден относительно эйлерова векторного поля $E = t_0(\partial/\partial t_0) + 2(1+t_1)(\partial/\partial t_1)$:

$$E \cdot F_0 = 4F_0 + t_1^2 + t_0^2.$$

Это свойство гарантирует, что когомологическая теория поля в случае рода 0 $I_{0,s}$, задаваемая теоремой 3, удовлетворяет условию

$$\pi_* I_{g,s+1}(e_S \otimes e_1) = \frac{1}{2} \left(1 - g + s - \deg - \sum \alpha_{i_k} \right) I_{g,s}(e_S), \quad (4.8)$$

где $e_S = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$, а $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$ — коэффициенты поля E . Эта когомологическая теория поля также удовлетворяет условию поднятия (4.1).

ТЕОРЕМА 4 [41]. *Полупростая однородная когомологическая теория поля с плоской единицей однозначно и явно реконструируется на основе своих данных в случае рода 0.*

Таким образом, если известны примарные инварианты в случае рода 0 $N_{0,s}(\vec{0})$, то существует единственная однородная когомологическая теория поля с плоской единицей, отвечающая этим инвариантам. Ниже показано, что ее корреляционные функции согласуются с коэффициентами $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$.

Отображение поднятия (4.8) в терминах корреляционных функций имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,s+1}} I_{g,s+1}(e_S \otimes e_1) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i} &= \left(\sum_{i=1}^s \frac{k_i}{2} + \chi_{g,s} \right) \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,s}} I_{g,s}(e_S) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i} + \\ &+ \sum_{j=1}^s \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,s}} I_{g,s}(e_{S \setminus \{j\}} \otimes e_j^*) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i - \delta_{ij}}. \end{aligned}$$

Условие $E \cdot F_0 = 4F_0 + t_1^2 + t_0^2$ на $N_{0,s}(\vec{0})$ представляет собой специализацию на случай $g = 0$ и $P_i = 0$ уравнения дивизора [17]:

$$N_{g,s+1}(0, P_1, \dots, P_s) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{P_j-1} k N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)|_{P_j=k} + \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^s P_j + \chi_{g,s} \right) N_{g,s}(P_1, \dots, P_s). \quad (4.9)$$

Условие поднятия для плоской единицы известно как *струнное уравнение* на корреляционные функции для $2g - 2 + s > 0$:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,s+1}} I_{g,s+1}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s \otimes e_0) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i} = \sum_{j=1}^s \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,s}} I_{g,s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_s) \prod_{i=1}^s \psi_i^{k_i - \delta_{i,j}};$$

это уравнение согласуется с рекуррентным соотношением [17]

$$N_{g,s+1}(1, P_1, \dots, P_s) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{P_j} k N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)|_{P_j=k}. \quad (4.10)$$

В частности, это соотношение позволяет доказать теорему 2 в случае рода 0, поскольку рекуррентные соотношения (4.9) и (4.10) однозначно определяют корреляционные функции $I_{0,s}$ и $N_{0,s}(P_1, \dots, P_s)$.

Это конструктивное доказательство явно описывает классы $I_{0,s}(e_S) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,s})$ рода 0:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,s}} I_{0,s}(e_S) = \begin{cases} \chi(\mathcal{M}_{0,s}), & e_S = e_1^{\otimes s}, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

4.5. Общее доказательство теоремы 2 с применением метода Дунина-Барковского–Орантана–Шадрина–Шпица. Установим теперь соответствие между корреляционными функциями когомологической теории поля и дискретными объемами в старших родах на основе результатов работы [23], в которой показано, что в случае спектральных кривых, удовлетворяющих специальному условию совместности, реконструкцию Гивенталья корреляционных функций старших родов можно сформулировать в терминах графов, и те же самые графы можно применить при вычислении топологической рекурсии.

В работе [23] был применен метод Эйнара из работы [22], с помощью которого произвольной полупростой когомологической теории поля можно поставить в соответствие локальную спектральную кривую (Σ, B, x, y) . При этом R -матрица Гивенталья порождает бидифференциал B на спектральной кривой:

$$\sum_{p,q} \check{B}_{p,q}^{i,j} z^p w^q = \frac{1}{z+w} \left[\delta^{ij} - \sum_{k=1}^N R_k^i(-z) R_k^j(-w) \right], \quad (4.11)$$

где $\check{B}_{p,q}^{i,j}$ – коэффициенты асимптотического разложения преобразования Лапласа регулярной части бидифференциала Бергмана B , выраженного в терминах локальных координат $s_i = \sqrt{x - x(a_i)}$ при $dx(a_i) = 0$. С помощью R -матрицы и матрицы

перехода Ψ из базиса плоских координат в нормированный канонический базис мероморфный дифференциал $y dx$ можно выразить в терминах s_i . В частности, отсюда следует условие совместности (4.13) между дифференциалом $y dx$ и бидифференциалом B .

Метод работы [23] можно применять в любом из двух направлений, начиная или с полупростой когомологической теории поля, или со спектральной кривой. Препотенциал F_0 (4.7) задает полупростую когомологическую теорию поля, тем самым порождая R -матрицу и матрицу перехода Ψ , а потому и собственно спектральную кривую. Однако, имея в наличии кандидата на роль спектральной кривой, можно начать со спектральной кривой и применить метод работы [23] для получения коэффициентов $N_{g,s}(P_1, \dots, P_s)$ как инвариантов полей потомков когомологической теории поля. Поскольку эта процедура согласуется с приведенной выше когомологической теорией поля в случае рода 0, в силу однозначности реконструкции такая процедура приводит в итоге к той же самой когомологической теории поля, что и теория, следующая из теоремы Телемана.

Спектральные кривые для дискретных объемов и для инвариантов Громова–Виттена для $\mathbb{P}^1$ имеют похожие структуры:

$$\begin{array}{ll} \text{дискретные объемы} & x = z + \frac{1}{z}, \quad y = z, \quad B = \frac{dz dz'}{(z - z')^2}, \\ \text{инварианты Громова–Виттена} & x = z + \frac{1}{z}, \quad y = \ln z, \quad B = \frac{dz dz'}{(z - z')^2}, \end{array} \quad (4.12)$$

и так как величины x и B задают R -матрицу однозначно, она совпадает для обеих кривых. R -матрица для инвариантов Громова–Виттена на проективной кривой $\mathbb{P}^1$ имеет вид [23]

$$R(u) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k u^k, \quad R_k = \frac{(2k-1)!!(2k-3)!!}{2^{4k} k!} \begin{pmatrix} -1 & (-1)^{k+1} 2ki \\ 2ki & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Результаты работы [23] применимы к тем спектральным кривым, для которых преобразование Лапласа дифференциала $y dx$ связано с этой R -матрицей (являющейся по сути преобразованием Лапласа от регулярной части бидифференциала).

В локальных координатах s_i , $i = 1, 2$, вблизи $x = \pm 2$, задаваемых выражениями $x = s_i^2 \pm 2$, имеем

$$\begin{aligned} y &= 1 + s_1 + \frac{1}{2} s_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^{3k} k!} s_1^{2k+1}, \\ y &= -1 + i s_2 + \frac{1}{2} s_2^2 - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^{3k} k!} s_2^{2k+1}, \end{aligned}$$

так что получаем

$$\begin{aligned} (y \check{d}x)_1 &= \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\gamma_1} e^{-u(x-2)} y dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!!(2k-3)!!}{2^{4k+1} k!} u^{-(k+1)}, \\ (y \check{d}x)_2 &= \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\gamma_2} e^{-u(x+2)} y dx \sim -i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!(2k-3)!!}{2^{4k+1} k!} u^{-(k+1)}, \end{aligned}$$

где $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$, а символом $\sim$ обозначено асимптотическое соответствие Пуанкаре по отношению к параметру u .

Условие совместности дифференциала $y dx$ и бидифференциала B имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} R(u) = ((y \check{d}x)_1 \quad (y \check{d}x)_2), \quad (4.13)$$

где используется первый ряд матрицы перехода $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Прямой подсчет показывает, что это условие выполняется при $x = z + 1/z$, $y = z$, $B = dz dz' / (z - z')^2$.

В этом случае вычисления работы [23] дают набор времен

$$\xi_0^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \right), \quad \xi_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right), \quad \xi_k^i = \left(\frac{d}{dx} \right)^k \xi_0^i = \sum_k p_{k,i} z^k \quad (4.14)$$

и приводят к основному результату:

$$W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\vec{k}, \vec{\alpha}} c_{\vec{k}, \vec{\alpha}}^g \prod_{i=1}^n \xi_{k_i, \alpha_i},$$

где коэффициенты суть инварианты полей потомков (4.3). Как было отмечено выше, когомологическая теория поля, получаемая таким образом, с необходимостью совпадает с однородной когомологической теорией поля, построенной на основе теоремы Телемана, поскольку обе эти теории используют реконструкцию Гивенталья и имеют одни и те же начальные данные.

4.6. Инварианты полей потомков и гауссовы средние. Лемма 2 и формулы (3.11) и (3.17) непосредственно выражают петлевые средние в терминах инвариантов полей потомков.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место следующее явное соотношение между инвариантами полей потомков (4.3) когомологической теории поля и гауссовыми средними:*

$$W_s^{(g)} \left(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s} \right) = \sum_{\vec{k}, \vec{\alpha}} c_{\vec{k}, \vec{\alpha}}^g \prod_{j=1}^s \widehat{p}_{k_j, \alpha_j}(\lambda_j), \quad (4.15)$$

где

$$\widehat{p}_{k, \alpha}(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-2r} (2r+1) s_{r,0}(\lambda), & k = 2r, \alpha = 0; \\ 2^{-2r} (2r+1) s_{r,1}(\lambda), & k = 2r, \alpha = 1; \\ 2^{-2r+2} 2r (2r+1) s_{r,1}(\lambda), & k = 2r-1, \alpha = 0; \\ 2^{-2r-1} s_{r,0}(\lambda), & k = 2r+1, \alpha = 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

и $s_{r,\beta}(\lambda)$, $\beta = 0, 1$, заданы соотношениями (3.18).

ПРИМЕР 1. Топологическая часть (нулевого уровня) когомологической теории поля имеет вид

$$I_{g,s}(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_s}) = \epsilon(\vec{\alpha}) 2^g + \text{члены старших порядков},$$

где $\epsilon(\vec{\alpha}) \equiv \sum_{i=1}^s \alpha_i \pmod{2}$ равно нулю или единице. Это проясняет асимптотическое поведение топологических инвариантов $W_s^{(g)}$ в их полюсах.

ПРИМЕР 2. Если $\{e_0, e_1\}$ – базис пространства H , отвечающий плоским координатам, то

$$\int_{\mathcal{M}_{g,s}} I_{g,s}(e_1^{\otimes s}) = \chi(\mathcal{M}_{g,s}).$$

Это утверждение следует из того, что $N_{g,s}(0, 0, \dots, 0) = \chi(\mathcal{M}_{g,s})$ и что

$$p_{k,\alpha}(0) = \begin{cases} 1, & (k, \alpha) = (0, 0), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, можно отождествить коэффициенты $\hat{b}_{k,\vec{\beta}}^g$ разложений (3.19) с линейными комбинациями инвариантов полей потомков $c_{k,\vec{\alpha}}^g$ с применением отождествления (4.16): при $s = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{b}_{r,0}^g &= 2^{1-2r}(2r+1)c_{2r,0}^g + 2^{-1-2r}c_{2r+1,1}^g, \\ \hat{b}_{r,1}^g &= 2^{-2r}(2r+1)c_{2r,1}^g + 2^{2-2r}2r(2r+1)c_{2r-1,0}^g, \end{aligned}$$

и в случае общего s получаются 2^s членов $c_{k,\vec{\alpha}}^{(g)}$ со всеми допустимыми подстановками $(k_i, 1) \leftrightarrow (k_i - 1, 0)$.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ

В этом разделе описываются основные составляющие метода топологической рекурсии, развитого в работах [4], [5], [24], [25]. Параллельно представлению основ этого метода, общая конструкция будет конкретизирована на примере модели гауссовых средних $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$:

1. Исходные данные включают в себя спектральную кривую $\Sigma_{x,y} = 0$ с заданными на ней двумя мероморфными дифференциалами dx и dy . Нули дифференциала dx задают *точки ветвления*. В случае гауссовых средних эта кривая представляет собой сферу $yx - y^2 = 1$ и удобной локальной координатой на сфере оказывается функция

$$x = e^\lambda + e^{-\lambda}, \quad y = e^\lambda, \quad dx = (e^\lambda - e^{-\lambda}) d\lambda. \quad (5.1)$$

В случае гауссовых средних следует рассмотреть накрытие этой сферы двумя картами: $y = e^\lambda$ и $\bar{y} = e^{-\lambda}$; сферу при этом удобно представить в виде цилиндра, получаемого из полосы $\text{Im } \lambda \in [0, 2\pi]$ отождествлением точек $(x, 0)$ вещественной прямой $\text{Im } \lambda = 0$ с точками $(x, 2i\pi)$ прямой $\text{Im } \lambda = 2\pi$. Имеем две точки ветвления $\lambda = 0, i\pi$.

2. Следующая составляющая – это бергмановский 2-дифференциал $B(p, q)$, который есть симметричный дифференциал с нулевыми A -циклами (эти циклы отсутствуют в рассматриваемом случае кривой рода 0) и с двойным полюсом при совпадающих p и q . Также понадобится первообразная дифференциала Бергмана $E(p, q)$, представляющая собой 1-дифференциал по p и функцию от q , определенную соотношением $\int_q^q B(p, \bullet)$. В случае гауссовых средних имеем

$$B(p, q) = \frac{de^\lambda de^\mu}{(e^\lambda - e^\mu)^2}, \quad E(p, q) = \frac{de^\lambda}{e^\lambda - e^\mu}, \quad p = e^\lambda, \quad q = e^\mu. \quad (5.2)$$

Рис. 4. Графическое представление рекуррентного соотношения (5.6). Явно представлены операции копроизведения (первый член в правой части) и произведения (второй и третий члены в правой части); линии со стрелкой обозначают ядро рекурсии $K(p_1, q)$, а линии без стрелок отвечают ядрам Бергмана $B(p_k, q)$ и $B(\bar{p}_k, q)$.

3. Определим ядро рекурсии $K(p, q)$ как $(1, -1)$ -дифференциал

$$K(p, q) = E(p, q) \frac{1}{(y(q) - \bar{y}(q))dx};$$

для гауссовых средних имеем

$$K(p, q) = \frac{de^\lambda}{e^\lambda - e^\mu} \frac{1}{(e^\mu - e^{-\mu})^2 d\mu}, \quad p = e^\lambda, \quad q = e^\mu, \quad (5.3)$$

где один множитель $e^\mu - e^{-\mu}$ в знаменателе появляется из разности $y(q) - \bar{y}(q)$, а второй возникает из dx .

4. Введем корреляционные функции $W_s^{(g)}(p_1, \dots, p_s)$ как симметричные s -дифференциалы, определяемые рекуррентными соотношениями: возьмем одну из переменных (p_r) в качестве корня. Тогда

$$W_3^{(0)}(p_1, p_2, p_3) = \sum_{\text{Res } dx=0} K(p_1, q) [B(p_2, q) + B(\bar{p}_2, q)] [B(p_3, q) + B(\bar{p}_3, q)], \quad (5.4)$$

$$W_1^{(1)}(p_1) = \sum_{\text{Res } dx=0} K(p_1, q) B(q, \bar{q}), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} W^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_s) = \\ = \sum_{\text{Res } dx=0} K(p_1, q) \left[\sum_{k=2}^s [B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)] W_{s-1}^{(g)}(q, p_2, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_s) + \right. \\ \left. + W_{s+1}^{(g-1)}(q, q, p_2, \dots, p_s) + \sum'_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{p_2, \dots, p_s\}}} W_{|I|+1}^{(g_1)}(q, \{p_i\}_{i \in I}) W_{|J|+1}^{(g_2)}(q, \{p_j\}_{j \in J}) \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

где правая часть соотношения явно симметризована относительно всех $p_2, \dots, p_s$, но не относительно p_1 , символ $\sum'$ означает, что в сумму дают вклад только стабильные члены (т. е. те, для которых $2g - 2 + s > 0$), и явно выделен вклад от единственной нестабильной кривой (член с $[B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)]$). Крышка над символом обозначает его исключение из списка аргументов, а в последнем члене берется сумма по всем разбиениям множества аргументов $\{p_2, \dots, p_s\}$ в два непересекающихся подмножества I и J . Рекуррентное соотношение схематически изображено на рис. 4.

С помощью рекуррентного соотношения (5.6) можно построить все старшие $W_s^{(g)}$ начиная с $W_3^{(0)}(p_1, p_2, p_3)$ и $W_1^{(1)}(p_1)$.

Лемма из работы [4] утверждает, что, хотя рекуррентные соотношения рекурсии (5.6) не являются явно симметричными относительно перестановок всех $p_1, \dots, p_s$, полная сумма в правой части соотношения оказывается полностью симметричной.

5.1. Топологическая рекурсия для гауссовых средних. В любой локальной теории, подчиняющейся топологической рекурсии, все стабильные корреляционные функции $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$ имеют сингулярности только в точках ветвления. В гауссовом случае можно, тем самым, заключить, что единственными сингулярностями в правой части (5.6), кроме полюсов высоких порядков в точках ветвления (для $W_s^{(g)}$ максимально возможный порядок полюса равен $6g + 2s - 3$), оказываются простые полюсы при $q = p_1$, возникающие из $K(p_1, q)$, и двойные полюсы при $q = p_k$, $q = \bar{p}_k$, возникающие из $[B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)]$. Тем самым, интегрирование по q в правой части можно произвести, вычисляя вычеты в этих точках вместо точек ветвления, что существенно упрощает реальные вычисления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной (стабильной) пары (g, s) введем следующее множество допустимых диаграмм Юнга (D_1, D_2) (как обычно $l(D)$ и $|D|$ обозначают соответствующую длину (число столбцов) и объем (число клеток) диаграммы Юнга D):

$$Y_s^{(g)} = \{(D_0, D_1)\} : s = l(D_0) + l(D_1), \quad D_1 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

$$2g - 1 + s + \frac{l(D_1)}{2} \leq |D_0| + |D_1| \leq 3g + 2s - 3. \quad (5.7)$$

Для каждой пары $(\vec{k}, \vec{\beta})$ определим пару $(D_0, D_1) \in Y_s^{(g)}$ следующим образом: разобьем множество индексов $\vec{k}$ на два непересекающихся подмножества: одно с $\beta_i = 0$ и другое с $\beta_i = 1$, и упорядочим k_i внутри каждого подмножества в невозрастающем порядке, получив тем самым две диаграммы Юнга D_0 и D_1 со столбцами высоты k_i .

Диаграмма Юнга D_0 состоит из $l(D_0)$ столбцов положительных целых высот t_r таких, что $t_r > t_s$ при $r < s$, обозначим через d_r числа столбцов одинаковой высоты t_r , так что $|D_0| = \sum_r d_r t_r$. Соответственно, D_1 состоит из четного числа $l(D_1)$ столбцов высот r_j , $r_j > r_i$ при $j < i$, и обозначим через k_j число столбцов одной и той же высоты r_j , так что $|D_1| = \sum_j k_j r_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим гомоморфизм

$$\mathcal{F}: \mathbb{Z}[Y_s^{(g)}] \rightarrow R[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s}]$$

в пространство R рациональных функций от e^{λ_i} , $i = 1, \dots, s$, рассматриваемых как формальные комплексные переменные, задаваемый отображением каждой пары $(D_0, D_1) \in Y_s^{(g)}$ в функцию от λ_i , $i = 1, \dots, s$, заданную формулой

$$\mathcal{F}(D_0, D_1) := \sum_{\substack{L_1 \sqcup L_2 \sqcup \dots \sqcup R_1 \sqcup R_2 \sqcup \dots = \{1, \dots, s\} \\ |L_i| = d_i, |R_j| = k_j}} \prod_i \left(\prod_{\alpha \in L_i} s_{t_i-1,0}(\lambda_\alpha) \right) \prod_j \left(\prod_{\gamma \in R_j} s_{r_j-1,1}(\lambda_\gamma) \right), \quad (5.8)$$

в которой суммирование идет по всем разбиениям множества индексов $\{1, \dots, s\}$ на непересекающиеся подмножества R_i, L_j соответствующих размеров d_i, k_j и $s_{k,\beta}(\lambda) := (e^\lambda + e^{-\lambda})^\beta (e^\lambda - e^{-\lambda})^{-2k-3}$.

ТЕОРЕМА 6. Гауссовы средние $W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s)$ суть коэффициенты дифференциалов

$$W_s^{(g)}(p_1, p_2, \dots, p_s) = W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s) dx_1 \cdots dx_s,$$

где

$$\begin{aligned} W_s^{(g)}(x_1, \dots, x_s) &= W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}) = \\ &= \sum_{(D_0, D_1) \in Y_s^{(g)}} \hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)} \mathcal{F}(D_0, D_1), \end{aligned}$$

и коэффициенты разложения $\hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)}$ занумерованы парами приведенных выше диаграмм Юнга D_0 и D_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рекуррентные соотношения, представленные формулой (5.6) (или в графическом виде на рис. 4), определяются двумя операциями на множестве базисных функций $s_{k,0}(\lambda)$ и $s_{k,1}(\lambda)$: операциями “произведения” и “копроизведения”. В п. 5.2 эти операции будут описаны непосредственно на уровне диаграмм Юнга.

Операция произведения имеет место во втором и третьем членах в (5.6): эта операция задается на множестве базисных функций и продолжается по билинейности на произведения таких функций, составляющие $W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s})$. В результате этой операции из двух базисных функций $s_{k_1, \beta_1}(\lambda)$ и $s_{k_2, \beta_2}(\lambda)$ производится линейная комбинация базисных функций $s_{k, \beta}(\lambda_1)$, обозначаемая стандартным символом “спаривания” и определяемая следующим интегралом:

$$\text{“произведение”}: \quad \underbrace{s_{k_1, \beta_1}(\lambda) s_{k_2, \beta_2}(\lambda)} := \sum_{\text{Res } dx_q=0} K(p_1, q) s_{k_1, \beta_1}(\lambda_q) s_{k_2, \beta_2}(\lambda_q) dx_q^2. \quad (5.9)$$

С учетом того, что $dx_q = (e^{\lambda_q} - e^{-\lambda_q}) d\lambda_q$ и что вместо вычисления этого интеграла по вычетам в точках ветвления его можно вычислить, взяв вычет в его единственном простом полюсе $p_1 = q$ вне точек ветвления, получим с учетом явного вида (3.18) базисных векторов

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Res } dx_q=0} K(p_1, q) s_{k_1, \beta_1}(\lambda_q) s_{k_2, \beta_2}(\lambda_q) dx_q^2 &= -\text{Res}_{p_1=q} K(p_1, q) s_{k_1, \beta_1}(\lambda_q) s_{k_2, \beta_2}(\lambda_q) dx_q^2 \\ &= \frac{(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1})^{\beta_1 + \beta_2}}{(e^{\lambda_1} - e^{-\lambda_1})^{6+2k_1+2k_2}} d\lambda_1 = \frac{(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1})^{\beta_1 + \beta_2}}{(e^{\lambda_1} - e^{-\lambda_1})^{7+2k_1+2k_2}} dx_1, \end{aligned}$$

так что, поскольку $(e^\mu + e^{-\mu})^2 = (e^\mu - e^{-\mu})^2 + 4$, приходим к следующему правилу для операции произведения:

$$\underbrace{s_{k_1, \beta_1}(\lambda) s_{k_2, \beta_2}(\lambda)} = \begin{cases} s_{k_1+k_2+2, \beta_1+\beta_2}(\lambda_1), & \beta_1 + \beta_2 < 2, \\ s_{k_1+k_2+1, 0}(\lambda_1) + 4s_{k_1+k_2+2, 0}(\lambda_1), & \beta_1 = \beta_2 = 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Вторая необходимая операция – это операция “копроизведения”, встречающаяся в первом члене в правой части соотношения (5.6). Она производит из базисной функции $s_{k, \beta}(\lambda)$ член, билинейный по $s_{k_1, \beta_1}(\lambda_1)$ и $s_{k_2, \beta_2}(\lambda_p)$. Эта операция

обозначается символом поднятия сбоку от значка этой функции, продолжается по линейности на произведение таких базисных функций и определяется следующим интегралом:

$$\text{“ копроизведение ”: } (s_{k,\beta}(\lambda))^{\uparrow} := \sum_{\text{Res } dx_q=0} K(p_1, q) [B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)] s_{k,\beta}(\lambda_q) dx_q, \quad (5.11)$$

где снова интегрирование производится с помощью взятия вычетов в точках $q = p_1$ и $q = p_k$ (в члене с $B(p_k, q)$) и в точках $q = p_1$ и $q = \bar{p}_k$ (для члена с $B(\bar{p}_k, q)$). Вычисления состоят в применении комбинаторики геометрической прогрессии, но в остальном оказываются вполне стандартными. Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1$ значительно различаются, так что два интегрирования определяют два типа операции копроизведения:

$$\begin{aligned} (s_{k,0}(\lambda))^{\uparrow} &= \sum_{\text{Res } dx_q=0} K(p_1, q) [B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)] s_{k,1}(\lambda_q) dx_q = \\ &= \sum_{m=0}^k (2 + 2k - 2m) s_{m,0}(\lambda_1) s_{k-m,0}(\lambda_p) dx_1 dx_p + \\ &+ \sum_{m=0}^{k+1} (3 + 2k - 2m) [4s_{m,0}(\lambda_1) s_{k+1-m,0}(\lambda_p) + s_{m,1}(\lambda_1) s_{k+1-m,1}(\lambda_p)] dx_1 dx_p \end{aligned} \quad (5.12)$$

и

$$\begin{aligned} (s_{k,1}(\lambda))^{\uparrow} &= \sum_{\text{Res } dx_q=0} K(p_1, q) [B(p_k, q) + B(\bar{p}_k, q)] s_{k,1}(\lambda_q) dx_q = \\ &= \sum_{m=0}^k (2 + 2k - 2m) s_{m,1}(\lambda_1) s_{k-m,0}(\lambda_p) dx_1 dx_p + \\ &+ \sum_{m=0}^k (1 + 2k - 2m) s_{m,0}(\lambda_1) s_{k-m,1}(\lambda_p) dx_1 dx_p + \\ &+ \sum_{m=0}^{k+1} 4(3 + 2k - 2m) [s_{m,0}(\lambda_1) s_{k+1-m,1}(\lambda_p) + s_{m,1}(\lambda_1) s_{k+1-m,0}(\lambda_p)] dx_1 dx_p. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Две корреляционные функции, необходимые для запуска процедуры рекурсии, имеют вид

$$\begin{aligned} W_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3) &= 4s_{0,0}(\lambda_1) s_{0,0}(\lambda_2) s_{0,0}(\lambda_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &+ [s_{0,1}(\lambda_1) s_{0,1}(\lambda_2) s_{0,0}(\lambda_3) + s_{0,1}(\lambda_1) s_{0,0}(\lambda_2) s_{0,1}(\lambda_3) + \\ &+ s_{0,0}(\lambda_1) s_{0,1}(\lambda_2) s_{0,1}(\lambda_3)] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (5.14)$$

и

$$W_1^{(1)}(x) = s_{1,0}(\lambda) dx. \quad (5.15)$$

5.2. Соотношения рекурсии, задающие $\hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)}$. Выпишем теперь рекуррентные соотношения на коэффициенты $\hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)}$ исключительно в терминах операции на линейных пространствах диаграмм Юнга. Рассмотрим $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -модуль $\mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}]$ функций на $Y_s^{(g)}$ с неотрицательными целыми коэффициентами.

Следующая теорема представляет собой основной результат данного раздела.

ТЕОРЕМА 7. *Все коэффициенты $\hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)}$ разложений петлевых средних в теореме 6 в диапазоне, определяемом условиями (5.7), суть положительные целые числа, т. е. имеются однозначно определенные элементы $\mathcal{W}_s^{(g)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}]$ такие, что*

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}_s^{(g)}) = W_s^{(g)}(e^{\lambda_1} + e^{-\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s} + e^{-\lambda_s}).$$

Элемент $\mathcal{W}_s^{(g)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}]$ задается рекуррентным соотношением, основанным на операциях копроизведения и произведения, описанных выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО имеет конструктивную природу и состоит в поднятии операций произведения и копроизведения на множество диаграмм Юнга. Определим сначала вспомогательное пространство диаграмм Юнга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Зададим множество пар диаграмм Юнга $\tilde{Y}_s^{(g)}$, элементы которого совпадают с элементами множества $Y_s^{(g)}$, снабженными следующими дополнительными структурами. Присвоим индекс 1 в точности одному из столбцов каждой пары $(D_0, D_1) \in Y_s^{(g)}$ (это присвоение соответствует симметризации по всем аргументам, кроме λ_1 в (5.8)). Элементы $(\widetilde{D_0, D_1})$ множества $\tilde{Y}_s^{(g)}$ с одними и теми же диаграммами (D_0, D_1) , но с присвоением индекса 1 столбцам разных “сортов” (различающихся высотами и/или “раскрасками”: диаграмма D_0 раскрашена белым цветом, а диаграмма D_1 – серым) считаются различными. Рассмотрим $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -модуль $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_s^{(g)}]$ функций на $\tilde{Y}_s^{(g)}$ с неотрицательными целыми коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим вложение S модуля $\mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}]$ в модуль $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_s^{(g)}]$, порождаемое следующим линейным отображением: образ элемента $S(D_0, D_1)$ есть сумма элементов $(\widetilde{D_0, D_1})$ (с единичными коэффициентами), основанных на указанной паре диаграмм Юнга (D_0, D_1) и содержащих индексы 1 всех возможных сортов (см. примеры ниже). Относительно гомоморфизма $\mathcal{F}$ такие суммы становятся выражениями, полностью симметричными по всем своим λ -аргументам.

Операции произведения и копроизведения отображают модуль $\mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}]$ в модуль $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_s^{(g)}]$. Для представления этих операций будем применять удобную графическую форму записи (как обычно, для сокращения записи будем опускать одну из диаграмм, если она пуста); первая (белая) диаграмма будет обозначать D_0 , а вторая (серая) – D_1 , например, $\mathcal{W}_3^{(0)} = 4 \quad + 1 \quad$ и $\mathcal{W}_1^{(1)} = 1 \square$, а коэффициенты пар “белых” и “серых” диаграмм в точности равны $\hat{b}_{D_0, D_1}^{(g)}$.

Операция копроизведения $\text{CP} : \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_{s+1}^{(g)}]$.

Эта операция производит два столбца (с индексами 1 и p) из столбца каждого сорта в $(D_0, D_1) \in Y_s^{(g)}$ в соответствии со следующими правилами.

- Операция копроизведения применяется ровно к одному столбцу каждого сорта (сорта различаются высотой и раскраской столбцов); эта операция базируется на соотношениях (5.12) и (5.13) и записывается графически в виде

[illegible]

- Получаемые таким образом столбцы с индексами 1 и p встраиваются в пары диаграмм Юнга (прочие столбцы не изменяются); среди остающихся столбцов имеется $k \geq 0$ столбцов того же сорта, что и столбец с индексом p ; получаемую при этом диаграмму следует умножить на $k+1$ и стереть индекс p , но оставить индекс 1.

Поэтому в результате применения операции копроизведения возникает линейная комбинация пар диаграмм Юнга с положительными целыми коэффициентами. Ровно один столбец в каждой паре несет индекс 1.

ПРИМЕР 3. Вычислим сначала $\mathcal{W}_4^{(0)}$. Так как в этом случае операция произведения не дает вклада, ответ получается при действии операции копроизведения на $\mathcal{W}_3^{(0)}$. Для элементов этой диаграммы Юнга имеем

$$(\quad)^\uparrow = 2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|} \hline \cdot \square \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|} \hline \cdot \blacksquare \\ \hline \end{array} + 1 \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \cdot \\ \hline \end{array}, \quad (5.16)$$

[illegible]

Таким образом, для элементов $\mathcal{W}_3^{(0)}$ получаем (в выражении ниже явно выделены множители, возникающие из-за симметризации по p)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{W}_3^{(0)})^\dagger &= 4(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger) = \\
&= 8 \cdot 3 \text{ }_1^\dagger + 16 \cdot 3 \text{ }_1^\dagger + 48 \text{ }_1^\dagger + 12 \text{ }_1^\dagger + 4 \text{ }_1^\dagger + \\
&\quad + 2 \text{ }_1^\dagger + 4 \text{ }_1^\dagger + 12 \text{ }_1^\dagger + 3 \text{ }_1^\dagger + 1 \cdot 3 \text{ }_1^\dagger + \\
&\quad + 2 \cdot 2 \text{ }_1^\dagger + 4 \cdot 2 \text{ }_1^\dagger + 1 \cdot 2 \text{ }_1^\dagger + 4 \cdot 2 \text{ }_1^\dagger + 12 \text{ }_1^\dagger + 12 \text{ }_1^\dagger = \\
&= 24 \text{ }_1^\dagger + 48 \left(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger \right) + 12 \left(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger \right) + \\
&\quad + 12 \left(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger \right) + 3 \left(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger \right) + 4 \left(\text{ }_1^\dagger + \text{ }_1^\dagger \right). \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Видно, что автоматически получаются симметризованные выражения относительно p_1 : каждый член в скобках содержит ровно один столбец с индексом “1” для столбцов каждого сорта, и это выражение, таким образом, лежит в образе отображения S . При отображении $\mathcal{F}$ полный ответ тем самым полностью симметричен по всем своим аргументам и имеет вид

$$\mathcal{W}_4^{(0)} = 24 \quad + 48 \square \quad + 12 \quad \blacksquare \quad + 12 \square \quad + 3 \blacksquare \quad + 4 \quad . \quad (5.19)$$

Тем самым получается выражение из модуля $\mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_4^{(0)}]$. Коэффициенты этого выражения в точности равны $\hat{b}_{D_0, D_1}$ для планарного случая с четырьмя остовами.

Операция *произведения* производит один столбец с индексом “1” (или линейную комбинацию таких столбцов) из двух столбцов в соответствии со следующими правилами:

$$\begin{aligned} n_1 \updownarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} n_2 \updownarrow &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^{n_1+n_2+1} \quad , & n_1 \updownarrow \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} n_2 \updownarrow &= \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array}^{n_1+n_2+1} \quad , \\ n_1 \updownarrow \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} n_2 \updownarrow &= 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^{n_1+n_2+1} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^{n_1+n_2} . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Имеются два случая.

1. Первый случай имеет место, когда произведение производится внутри одной и той же пары диаграмм (D_0, D_1) :

$$\text{PI}: \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_{s-1}^{(g+1)}].$$

В этом случае необходимо взять все возможные (попарные) произведения между различными сортами столбцов (одна операция произведения на каждую пару сортов столбцов), равно как и произведения внутри множеств столбцов одного сорта (если в D_0 или в D_1 имеется более одного столбца данного сорта). Дополнительно возникают следующие множители:

- множитель 2, если произведение берется между столбцами различных сортов;
- дополнительный множитель 2, если произведение берется в члене корреляционной функции $\mathcal{W}_s^{(g)}$ с $s > 2$, т.е. если результат действия операции PI на (D_0, D_1) содержит более одного столбца.

2. Второй случай соответствует применению операции произведения к двум различным парам диаграмм Юнга $(D_0, D_1) \in Y_{s_1}^{(g_1)}$ и $(D'_0, D'_1) \in Y_{s_2}^{(g_2)}$:

$$\text{PII}: \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_{s_1}^{(g_1)}] \times \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_{s_2}^{(g_2)}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{Y}_{s_1+s_2-1}^{(g_1+g_2)}].$$

В этом случае необходимо вычислить все возможные произведения между столбцами всех сортов в первой и во второй парах (одно произведение на каждую пару сортов; в каждой из двух пар диаграмм Юнга выбирается по одному сорту), если не выполняется условие $(D_0, D_1) = (D'_0, D'_1)$; в противном случае каждый тип спаривания между столбцами диаграммы $(D_0 D_1)$ берется один раз. В итоге получается

объединение двух приведенных выше пар диаграмм Юнга, и в результате применения операции произведения получается линейная комбинация диаграмм Юнга следующего вида:

$$(5.21)$$

в которой в точности один столбец несет индекс 1 и в каждом члене d_j столбцов возникает из диаграммы D_0 , d'_j столбцов – из диаграммы D'_0 , и, соответственно, t_i столбцов возникают из диаграммы D_1 и t'_i столбцов – из диаграммы D'_1 .

Необходимые комбинаторные множители перечислены ниже.

• Получаемая диаграмма Юнга умножается на произведение биномиальных множителей:

$$\prod_{j=1}^k \binom{d_j + d'_j}{d_j} \prod_{i=1}^r \binom{t_i + t'_i}{t_i}.$$

• Имеется дополнительный множитель, равный 2, если произведение берется между столбцами различных сортов и/или между двумя различными диаграммами (т. е. если $D_0 \neq D'_0$ и/или $D_1 \neq D'_1$) (другими словами, единственная ситуация, в которой этот множитель отсутствует, имеет место при вычислении произведения между двумя одинаковыми диаграммами Юнга, $D_0 = D'_0$ и $D_1 = D'_1$, и только если вычисляется произведение между столбцами одного и того же сорта в этих диаграммах).

• Следует дополнительно умножить результат на 2, если результат произведения диаграмм Юнга (D_0, D_1) и (D'_0, D'_1) содержит более одного столбца, т. е. если $s_1 = l(D_0) + l(D_1) > 1$ и/или $s_2 = l(D'_0) + l(D'_1) > 1$ (другими словами, единственная ситуация, в которой этот множитель отсутствует, возникает при $s_1 = s_2 = 1$).

ПРИМЕР 4. Вычислим теперь $\mathcal{W}_2^{(1)}$ (в третьей строке явно выделены комбинаторные множители, возникающие в результате применения операции произведения):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(1)} &= (\mathcal{W}_1^{(1)})^\dagger + \mathcal{W}_3^{(0)} = (\square)^\dagger + 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \\ &= 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 20 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 5 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \\ &+ 4 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 1 \cdot 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 4 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 1 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \\ &= 4 \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 20 \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + 5 \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + 3 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \\ &= 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + 20 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 5 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Отсюда и из выражения для $\mathcal{W}_1^{(1)}$ можно вычислить $\mathcal{W}_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_1^{(2)} &= \underbrace{\mathcal{W}_2^{(1)}} + \underbrace{\mathcal{W}_1^{(1)} \times \mathcal{W}_1^{(1)}} = 4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \end{array} + 20 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 5 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \end{array} + \underbrace{\square \times \square} = \\
 &= 4 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 20 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 5 \cdot 2 \left(4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + 3 \left(4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + 1 \cdot 1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \\
 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 3 \cdot 7 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Такой же ответ получается при применении рекуррентной формулы Харера-Цагира: $b_1^{(2)} = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $b_0^{(2)} = 3 \cdot 7$.

ПРИМЕР 5. Первый пример, в котором дают вклад все три операции, описанные выше, – это вычисление $\mathcal{W}_3^{(1)}$:

$$\mathcal{W}_3^{(1)} = \left(\mathcal{W}_2^{(1)} \right)^\uparrow + \underbrace{\mathcal{W}_4^{(0)}} + \underbrace{\mathcal{W}_3^{(0)} \times \mathcal{W}_1^{(1)}}. \tag{5.24}$$

Здесь первый член (с копроизведением) содержит 67 слагаемых, второй содержит 21 слагаемое, а третий – только три слагаемых. Выполняя суммирование, мы снова получаем ответ, полностью симметричный относительно всех p_i , включая p_1 . Этот ответ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_3^{(1)} &= 24 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 192 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \end{array} + 240 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 288 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 480 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} + 560 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 30 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \end{array} + \\
 &+ 18 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 24 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 120 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} + 72 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 140 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} + 120 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + \\
 &+ 120 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 30 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} + 140 \begin{array}{|c|} \hline \square \square \square \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Второй пример – это $\mathcal{W}_5^{(0)}$:

$$\mathcal{W}_5^{(0)} = \left(\mathcal{W}_4^{(0)} \right)^\uparrow + \underbrace{\mathcal{W}_3^{(0)} \times \mathcal{W}_3^{(0)}}. \tag{5.26}$$

Первый член содержит 85 слагаемых, а второй – семь слагаемых, которые приводятся ниже для прояснения процедуры подсчета симметричных множителей (единичные биномиальные множители опущены для простоты):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\mathcal{W}_3^{(0)} \times \mathcal{W}_3^{(0)}} &= 16 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} + 4 \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} + \\
 &+ \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} = \\
 &= 16 \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 4 \cdot 2 \cdot 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \binom{3}{1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \\
 &+ 2 \cdot \binom{4}{2} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 2 \cdot 2 \cdot \binom{3}{1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 2 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \left(4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку здесь операция произведения применяется к идентичным объектам, каждый тип произведения учитывается только один раз, но если вычисляется произведение между различными столбцами для столбцов одного и того же сорта, то необходимо умножить на 2. Один множитель, равный 2, всегда присутствует, так как результат произведения содержит более одного столбца.

Сумма в выражении (5.26) оказывается полностью симметричной относительно всех p_i , включая p_1 , и мы получаем ответ:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_5^{(0)} = & 192 + 768 \square + 1152 \square\square + 960 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 144 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \\
 & + 240 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 288 \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + 288 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 144 \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 288 \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \\
 & + 240 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 24 + 72 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 60 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 18 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \\
 & + 72 \square \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 12 \square + 60 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} . \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что все коэффициенты в соотношениях произведения и копроизведения представляют собой положительные целые числа, так что результат всегда целый и положительный. Более того, из леммы работы [4] следует, что результат совместного применения операций копроизведения и произведения автоматически оказывается симметричным относительно перестановок всех аргументов, включая p_1 , так что результат совместного применения операций CP, PI, и PП принадлежит образу модуля $S(Y_s^{(g)})$ в модуле $\hat{Y}_s^{(g)}$, который тем самым естественно отождествляется с собственно модулем $Y_{(g)s}$:

$$\text{CP}(\mathcal{W}_{s-1}^{(g)}) + \text{PI}(\mathcal{W}_{s+1}^{(g-1)}) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ s_1+s_2=s+1}} \text{PП}(\mathcal{W}_{s_1}^{(g_1)} \times \mathcal{W}_{s_2}^{(g_2)}) = \mathcal{W}_s^{(g)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[Y_s^{(g)}].$$

Это завершает доказательство теоремы.

6. СЛУЧАЙ ОДНОГО ОСТОВА

6.1. Рекуррентное соотношение Харера–Цагира и представление в терминах графов из раздела 3. В случае хордовых диаграмм с одним остовом имеются представление (3.13) и альтернативное представление

$$\begin{aligned}
 W_1^{(g)}(e^\lambda + e^{-\lambda}) = \\
 = \sum_{r=0}^{3g-2} (-1)^r \frac{\varkappa_{g,1,r}}{2^{d-r}(d-r)!} \frac{1}{e^\lambda - e^{-\lambda}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^{2d-2r+1} \frac{2}{e^{2\lambda} - 1}, \quad d = 3g - 2, \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

где из рассуждений, связанных со стратификацией замкнутых пространств модулей, следует, что $\varkappa_{g,1,r}$ – гипотетически положительные рациональные числа, $\varkappa_{g,1,0} = \langle \tau_{3g-2} \rangle_g$.

Для коэффициентов $b_i^{(g)}$ из разложения (3.13) на основе рекуррентной формулы Харера–Цагира [1] нами было получено следующее рекуррентное соотношение (независимо найденное в работе [42]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9]. Коэффициенты $b_k^{(g)}$ разложения (3.13) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$(4g + 2k + 6)b_k^{(g+1)} = (4g + 2k + 1)(4g + 2k + 3)[(4g + 2k + 2)b_k^{(g)} + 4(4g + 2k - 1)b_{k-1}^{(g)}]. \quad (6.2)$$

Все эти коэффициенты – положительные целые числа¹⁾.

В работе [9] с помощью рекуррентного соотношения (6.2) был развит метод, позволяющий определить $b_{g-1-k}^{(g)}$ при каждом фиксированном $k \geq 0$ для всех родов g . Например, для граничных коэффициентов имеются всего лишь двухчленные соотношения:

$$\begin{aligned} (4g + 6)b_0^{(g+1)} &= (4g - 1)(4g + 3)(4g + 2)b_0^{(g)}, \\ (6g + 6)b_g^{(g+1)} &= 4(6g + 1)(6g + 3)(6g - 1)b_{g-1}^{(g)}, \end{aligned}$$

из которых немедленно следует, что

$$b_{g-1}^{(g)} = \frac{2^{g-1} (6g - 3)!!}{3^g g!}, \quad b_0^{(g)} = \frac{(4g)!}{8^g g! (2g + 1)!!}. \quad (6.3)$$

Подставив $b_{g-1}^{(g)}$ в соотношение (6.1) и вычислив ведущий член ($r = 0$), получим, что старший коэффициент Концевича имеет вид $\varkappa_{g,1,0} = \langle \tau_{3g-2} \rangle_g = 1/2^{3g} 3^g g!$.

Решение рекуррентного соотношения (6.2) для первого поправочного члена имеет вид

$$b_{g-2}^{(g)} = \frac{1}{5} \frac{2^{g-2} (6g - 5)!!}{3^{g-2} (g - 2)!}, \quad \text{или} \quad \varkappa_{g,1,1} = \frac{1}{5} [12g^2 - 7g + 5] \varkappa_{g,1,0}, \quad g \geq 2. \quad (6.4)$$

Для следующего члена получим

$$b_{g-3}^{(g)} = \frac{(2g - 1) 2^{g-3} (6g - 7)!!}{5^2 3^{g-3} (g - 3)!} - \frac{7 2^{g-3} (6g - 7)!!}{10 (3g - 2)!!!}, \quad (3g - 2)!!! \equiv \prod_{k=3}^g (3k - 2), \quad (6.5)$$

и т. д. Полная многоступенчатая процедура построения этих членов описана в работе [9].

Альтернативный вывод формулы для $b_{g-2}^{(g)}$ можно произвести с помощью графического представления из леммы 4. Для этого достаточно взять только часть с временами T_{2k}^+ . Старший член для рода g есть $\langle \tau_{3g-2} \rangle_g T_{6g-4}^+$.

Согласно лемме 4 первый поправочный член, или коэффициент T_{6g-6}^+ , возникает только из двух членов: из графа с одной вершиной и одним внутренним ребром с маркировкой концов ребра $(0, 0)$ и из графа с одной вершиной и одним полуребром с маркировкой 2 (см. рис. 5): соответствующий коэффициент имеет вид

$$\frac{B_2}{4} \langle \tau_{3g-3} \tau_0 \tau_0 \rangle_{g-1} + \frac{2^3}{5!} \langle \tau_{3g-3} \tau_2 \rangle_g, \quad (6.6)$$

¹⁾Разумеется, свойство положительности и целочисленности коэффициентов $b_k^{(g)}$ есть частный случай общего утверждения теоремы 7.

 Рис. 5. Две диаграммы, дающие вклад в $b_{g-2}^{(g)}$.

и нам нужно только узнать соответствующий индекс пересечений. В то время как $\langle \tau_{3g-3} \tau_0 \tau_0 \rangle_{g-1} = \langle \tau_{3g-5} \rangle_{g-1}$, в работе [9] был вычислен индекс пересечений $\langle \tau_{3g-3} \tau_2 \rangle_g$ с применением условий Вирасоро для матричной модели Концевича; результат имеет вид

$$\langle \tau_2 \tau_{3g-3} \rangle_g = \frac{1}{5} [12g(g-1) + 5] \langle \tau_{3g-2} \rangle_g, \quad g \geq 2. \quad (6.7)$$

Применяя формулу (5.7) и тот факт, что $B_2 = 1/24$, получим, что коэффициент при T_{6g-6}^+ равен $[12g^2 - 7g + 5]/5$ в полном согласии с формулой (6.4).

Ниже будет представлен третий способ вычисления той же самой величины с применением явного диаграммного счета.

6.2. 2-циклы и рекуррентные соотношения для членов $b_{g-1}^{(g)}$ и $b_{g-2}^{(g)}$.

6.2.1. Контракция ребер в графе рода g . Найдем теперь коэффициент $b_{g-2}^{(g)}$ путем прямого подсчета числа ленточных графов. Для этого рассмотрим множество форм с одной граничной компонентой и одним отмеченным ребром. Обозначим через $\Gamma^{(g)}$ множество комбинаторных типов соответствующих форм рода g , а через $V^{(g)}$ — мощности соответствующих множеств.

Рассмотрим сначала процедуру контракции (сжатия) ребра в графах рода g . Через $\Gamma_{q;3-3}^{(g)}$ обозначим множества форм рода g с отмеченным ребром таких, что все их вершины имеют валентность 3, и эти формы содержат q 2-циклов (все эти 2-циклы имеют вид, изображенный на самой правой диаграмме на рис. 6). Обозначим через $V_{q;3-3}^{(g)}$ число таких диаграмм. Обозначим также через $\Gamma_{4,3-3}^{(g)}$, $\Gamma_{4,4,3-3}^{(g)}$ и $\Gamma_{5,3-3}^{(g)}$ соответственно множества форм рода g с отмеченным ребром и с одной четырехвалентной вершиной, двумя четырехвалентными вершинами и одной пятивалентной вершиной в то время, как все прочие вершины имеют валентность 3. Обозначим через $V_{4,3-3}^{(g)}$, $V_{4,4,3-3}^{(g)}$ и $V_{5,3-3}^{(g)}$ числа соответствующих форм.

Рассмотрим теперь процесс контракции ребер. Отмеченное ребро, отвечающее концам остова, никогда не сжимается, а любое прочее ребро произвольного графа из $\Gamma_{q;3-3}^{(g)}$ можно сжать (тем самым имеется всего $6g-4$ сжимаемых ребер); при этом каждый раз получается граф из $\Gamma_{4,3-3}^{(g)}$. Наоборот, каждый граф из множества $\Gamma_{4,3-3}^{(g)}$ можно получить ровно из двух графов из множества $\Gamma_{q;3-3}^{(g)}$; тем самым имеет место равенство

$$(6g-4) \sum_{q=0}^{\max} V_{q;3-3}^{(g)} = 2V_{4,3-3}^{(g)} = (6g-4)b_{g-1}^{(g)}. \quad (6.8)$$

Более интересная ситуация возникает, если сжимаются два ребра. В этом случае имеются три возможных исхода:

- 1) при сжатии двух непересекающихся в вершинах ребер получается граф из $V_{4,4,3-3}^{(g)}$;
- 2) при сжатии двух ребер, пересекающихся ровно в одной вершине, получается граф из множества $V_{5,3-3}^{(g)}$;
- 3) сжатие двух ребер, пересекающихся в двух вершинах (и тем самым образующих 2-петлю) невозможно.

Начнем с первого варианта. Полное число пар непересекающихся ребер равно

$$\frac{1}{2}(6g-4)(6g-5) - \text{число инцидентных пар ребер.} \quad (6.9)$$

Число пар ребер с одним или двумя пересечениями в графе из множества $V_{q,3-3}^{(g)}$ легко подсчитать: это трижды число вершин минус четыре (в силу наличия отмеченного ребра) минус дважды число 2-петель, т. е. $3(4g-2)-4-2q$. Число пар ребер, пересекающихся в двух вершинах, очевидно, равно q . Тогда легко вычислить полное число пар непересекающихся ребер: оно равно $(3g-4)(6g-5) + q$. Заметим, что из каждой такой пары получается граф из множества $V_{4,4,3-3}^{(g)}$, и каждый граф из множества $V_{4,4,3-3}^{(g)}$ можно получить ровно четырьмя способами из $V_{q,3-3}^{(g)}$ с некоторым q (при этом может случиться, что один и тот же граф из $V_{q,3-3}^{(g)}$ производит граф из $V_{4,4,3-3}^{(g)}$ несколькими сжатиями, этот случай будет учитываться с соответствующей кратностью). В итоге получаем соотношение

$$\sum_{q=0}^{\max} [(3g-4)(6g-5) + q] V_{q,3-3}^{(g)} = 4V_{4,4,3-3}^{(g)}. \quad (6.10)$$

Аналогично каждый граф из $V_{5,3-3}^{(g)}$ можно получить сжатием двух ребер с однократным пересечением ровно пятью способами из графов, принадлежащих множеству $V_{q,3-3}^{(g)}$, т. е. имеет место соотношение

$$\sum_{q=0}^{\max} [12g-10-2q] V_{q,3-3}^{(g)} = 5V_{5,3-3}^{(g)}. \quad (6.11)$$

Полное число диаграмм с $6g-6$ немаркированными ребрами равно в точности сумме $V_{4,4,3-3}^{(g)}$ и $V_{5,3-3}^{(g)}$, и оно задается комбинацией b множителей, так что получаем

$$V_{4,4,3-3}^{(g)} + V_{5,3-3}^{(g)} = b_{g-2}^{(g)} + \frac{(3g-2)(3g-3)}{2} b_{g-1}^{(g)}. \quad (6.12)$$

Тем самым имеются три уравнения, приведенные выше, на три неизвестных $V_{4,4,3-3}^{(g)}$, $V_{5,3-3}^{(g)}$ и $\sum_{q=1}^{\max} q V_{q,3-3}^{(g)}$. Решение имеет вид

$$V_{4,4,3-3}^{(g)} = \frac{1}{4} \left[(3g-4)(6g-5) b_{g-1}^{(g)} + g b_{g-1}^{(g)} - \frac{20}{3} b_{g-2}^{(g)} \right], \quad (6.13)$$

$$V_{5,3-3}^{(g)} = 2(g-1) b_{g-1}^{(g)} + \frac{8}{3} b_{g-2}^{(g)}, \quad (6.14)$$

$$\sum_q q V_{q,3-3}^{(g)} = g b_{g-1}^{(g)} - \frac{20}{3} b_{g-2}^{(g)}. \quad (6.15)$$

Рис. 6. Процедура вклейки ручки в две стороны двух произвольных ребер трехвалентного графа Γ_{3-3} , увеличивающая род поверхности на единицу. Эту процедуру можно представить как раздутие ручки из пары выколотых точек.

Заметим, что еще одна комбинация величин V задает интересное соотношение:

$$(2!)2^2V_{4,4,3-3}^{(g)} + 5V_{5,3-3}^{(g)} = (6g-5)(6g-6)V_{3-3}^{(g)}, \quad V_{3-3}^{(g)} = \sum_{q=0}^{\max} V_{q;3-3}^{(g)}. \quad (6.16)$$

Мы проверили выполнение этого соотношения для $g = 3$ с использованием данных из работы [43].

6.2.2. *Процесс раздутия, $g \rightarrow g+1$.* Рассмотрим теперь “обратный” процесс, изображенный на рис. 6, который позволяет раздуть ручку из пары отмеченных сторон ребер в графе из множества $\Gamma_{q;3-3}^{(g)}$; здесь число 2-циклов не играет роли. На первом этапе выдуваются “пузыри”, как в центральной диаграмме на рис. 6, на двух сторонах ребер; теперь раздутие пузырей возможно также и на отмеченном ребре. Также представим теперь это отмеченное ребро как подграф из трех ребер, соединенных в единственной вершине: два ребра связаны с остальной частью диаграммы (их концы суть концы отмеченного ребра, а потому всегда различны), а третье ребро представляет собой внешнюю линию. Процесс образования пузырей можно рассматривать по порядку, тогда на первой стадии имеются $2(6g-1)$ возможностей расположить пузырь на стороне некоторого ребра, а на второй стадии уже имеется $2(6g+1)$ таких вариантов, поскольку полное число ребер увеличивается на два после первой стадии процесса. Поэтому полное число возможностей равно

$$\frac{1}{2}2^2(6g-1)(6g+1) = 2(6g-1)(6g+1).$$

Каждый раз, когда выдуваются два пузыря в графе $\Gamma_{3-3}^{(g)}$, в итоге получается граф из $\Gamma_{q;3-3}^{(g+1)}$ с $q \neq 0$. Обратно, каждый граф из $\Gamma_{q;3-3}^{(g+1)}$ с ненулевым q можно получить ровно q способами из графов из множества $\Gamma_{3-3}^{(g)}$. (Заметим, что число 2-циклов не обязательно возрастает в ходе этого процесса: если пузырь раздувается на стороне ребра, которое само входит в некоторый 2-цикл исходного графа, то этот исходный 2-цикл разрушается в ходе процесса раздутия, так что в принципе число 2-циклов может даже уменьшаться, но каждый раз получается граф рода $g+1$ с хотя бы одним 2-циклом.)

Таким образом, получаем соотношение

$$2(6g-1)(6g+1)V_{3-3}^{(g)} = \sum_{q=0}^{\max} qV_{q;3-3}^{(g+1)}, \quad (6.17)$$

из которого, после подстановки этого результата в (6.15) и с учетом того факта, что $V_{3-3}^{(g)}$ просто равно $b_{g-1}^{(g)}$, получаем новое соотношение на величины b :

$$2(6g-1)(6g+1)b_{g-1}^{(g)} = (g+1)b_g^{(g+1)} - \frac{20}{3}b_{g-1}^{(g+1)}. \quad (6.18)$$

Из этого соотношения сразу получим, что

$$b_{g-2}^{(g)} = \frac{3}{10} \frac{g(g-1)}{2g-1} b_{g-1}^{(g)}, \quad (6.19)$$

что совпадает с формулой (6.4).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение метода топологической рекурсии к построению производящих функций когомологических теорий поля занимает важное место в современной математической физике (см., например, недавнюю работу [44], в которой все инварианты полей потомков для всех порядков разложения по родам для эквивариантных инвариантов Громова–Виттена проективной прямой $\mathbb{P}^1$ были построены с помощью метода топологической рекурсии). В этой связи представляется интересным исследовать возможность применения разложения гивенталевского типа в подходе квантовой спектральной кривой.

Список литературы

- [1] J. Harer, D. Zagier, *Invent. Math.*, **85**:3 (1986), 457–485.
- [2] É. Brezin, S. Hikami, *Commun. Math. Phys.*, **283**:2 (2008), 507–521, arXiv:0708.2210.
- [3] A. Morozov, Sh. Shakirov, *From Brezin–Hikami to Harer–Zagier formulas for Gaussian correlators*, arXiv:1007.4100.
- [4] L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv:hep-th/0504116.
- [5] B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452.
- [6] S. Gukov, P. Sułkowski, *JHEP*, **2** (2012), 070, 56 pp., arXiv:1108.0002.
- [7] M. Mulase, P. Sułkowski, *Spectral curves and the Schrödinger equations for the Eynard–Orantin recursion*, arXiv:1210.3006.
- [8] O. Dumitrescu, M. Mulase, *Quantization of spectral curves for meromorphic Higgs bundles through topological recursion*, arXiv:1411.1023.
- [9] J. E. Andersen, L. O. Chekhov, P. Norbury, R. C. Penner, *Models of discretized moduli spaces, cohomological field theories, and Gaussian means*, arXiv:1501.05867.
- [10] L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Modern Phys. Lett. A*, **7**:14 (1992), 1223–1236, arXiv:hep-th/9201033.
- [11] J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko, *Nucl. Phys. B*, **404**:1–2 (1993), 127–172, arXiv:hep-th/9302014; Erratum, **449**:3 (1995), 681.
- [12] Y. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **47**, AMS, Providence, RI, 1999.
- [13] L. Chekhov, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **278**:3 (1992), 271–278, arXiv:hep-th/9202006.
- [14] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **265**:1–2 (1991), 99–107.
- [15] P. Norbury, *Quantum curves and topological recursion*, arXiv:1502.04394.
- [16] L. Chekhov, *J. Geom. Phys.*, **12**:3 (1993), 153–164, arXiv:hep-th/9205106.
- [17] P. Norbury, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**:4 (2013), 1687–1709.

- [18] M. Mulase, M. Penkava, *Adv. Math.*, **230**:3 (2012), 1322–1339, arXiv: 1009.2135.
- [19] P. Norbury, *Math. Res. Lett.*, **17**:3 (2010), 467–481.
- [20] L. Chekhov, *Acta Appl. Math.*, **48**:1 (1997), 33–90, arXiv: hep-th/9509001.
- [21] A. B. Givental, *Mosc. Math. J.*, **1**:4 (2001), 551–568.
- [22] B. Eynard, *Commun. Number Theory Phys.*, **8**:3 (2014), 541–588, arXiv: 1110.2949.
- [23] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz, *Commun. Math. Phys.*, **328**:2 (2014), 669–700, arXiv: 1211.4021.
- [24] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv: hep-th/0407261.
- [25] L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, *JHEP*, **12** (2006), 053, 31 pp., arXiv: math-ph/0603003.
- [26] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4165, arXiv: hep-th/0310113.
- [27] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348, arXiv: hep-th/9407018.
- [28] P. Dunin-Barkowski, P. Norbury, N. Orantin, P. Popolitov, S. Shadrin, “Superpotentials and the Eynard–Orantin topological recursion”, In preparation.
- [29] J. E. Andersen, R. C. Penner, C. M. Reidys, M. S. Waterman, *J. Math. Biol.*, **67**:5 (2013), 1261–1278.
- [30] J. Harer, *Invent. Math.*, **84**:1 (1986), 157–176.
- [31] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**, Springer, Berlin, 1984.
- [32] R. C. Penner, *Commun. Math. Phys.*, **113**:2 (1987), 299–339.
- [33] R. C. Penner, *J. Differential Geom.*, **27**:1 (1988), 35–53.
- [34] M. L. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23.
- [35] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275**:3–4 (1992), 311–314, arXiv: hep-th/9111037.
- [36] J. Ambjørn, L. Chekhov, *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, **1**:3 (2014), 337–361, arXiv: 1404.4240.
- [37] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *JHEP*, **11** (2014), 080, 30 pp., arXiv: 1405.1395.
- [38] J. E. Andersen, L. O. Chekhov, C. M. Reidys, R. C. Penner, P. Sułkowski, *Nucl. Phys. B*, **866**:3 (2013), 414–443, arXiv: 1205.0658.
- [39] S. Keel, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330**:2 (1992), 545–574.
- [40] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [41] C. Teleman, *Invent. Math.*, **188**:3 (2012), 525–588.
- [42] U. Haagerup, S. Thorbjørnsen, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **15**:1 (2012), 1250003, 41 pp.
- [43] R. J. Milgram, R. C. Penner, “Riemann’s moduli space and the symmetric group”, *Mapping Class Groups and Moduli Spaces of Riemann Surfaces* (Göttingen, Germany, June 24–28, 1991; Seattle, WA, USA, August 6–10, 1991), Contemporary Mathematics, **150**, eds. C.-F. Bödigheimer, R. M. Hain, AMS, Providence, RI, 1993, 247–290.
- [44] B. Fang, C.-C.M. Liu, Z. Zong, *The Eynard–Orantin recursion and equivariant mirror symmetry for the projective line*, arXiv: 1411.3557.