Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сы-Е У, Твистованные множества характеров, накрывающие пространства и пучки, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 471–494

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:32:20

© 2015 г.

Сы-Е У*

ТВИСТОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА ХАРАКТЕРОВ, НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА И ПУЧКИ

Для подгруппы $\tilde{P}$ конечного индекса конечнопорожденной группы P установлены различные соотношения между (твистованными) множествами характеров групп P и $\tilde{P}$. Дана геометрическая интерпретация результатов в терминах пространств модулей плоских связностей на главных расслоениях, твистованных пучком плоской связности над многообразием с фундаментальной группой P .

Ключевые слова: пространства модулей, многообразия характеров, пучки, твистованные расслоения.

DOI: 10.4213/tmf8952

1. ВВЕДЕНИЕ

Плоские связности играют важную роль в двумерных калибровочных теориях [1]–[3]. Пусть X – многообразие и G – группа Ли. Хорошо известно, что пространство модулей $\mathcal{M}(X, G)$ (редуктивных) плоских G -связностей на X совпадает со множеством G -характеров (или со множеством представлений) $\mathcal{M}(P, G)$ его фундаментальной группы $P = \pi_1(X)$, которое представляет собой пространство классов G -сопряжений для редуктивных гомоморфизмов из P в G .

В работе [4] были изучены плоские связности на неориентируемых поверхностях с использованием их ориентируемых двукратных накрытий. Рассмотрим компактную неориентируемую поверхность X и ее ориентируемое двукратное накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Предположим, что G – связная компактная полупростая группа Ли. Тогда ее центр $Z(G)$ представляет собой конечную абелеву группу. Нетривиальное накрывающее преобразование τ на $\tilde{X}$ индуцирует инволюцию (по-прежнему обозначаемую как τ) на пространстве модулей $\mathcal{M}(\tilde{X}, G)$ плоских G -связностей над $\tilde{X}$,

Часть этой работы была выполнена во время пребывания автора в Гонконге при поддержке UGC (грант № HKU705612P).

*Department of Mathematics, National Tsing Hua University, Taiwan.
E-mail: swu@math.nthu.edu.tw

а (в случае общего положения) τ -инвариантная составляющая $\mathcal{M}(\tilde{X}, G)^\tau$ является несвязным объединением подмножеств $\mathcal{M}(\tilde{X}, G)^\tau_{[r]}$, занумерованных индексами $[r] \in Z(G)/2Z(G)$. При этом (в случае общего положения) пространство модулей $\mathcal{M}(X, G)$ плоских связностей над X отображается сюръективно в компоненту $\mathcal{M}(X, G)_0^\tau$ с помощью $|Z(G)/2Z(G)|$ -листного накрытия [4]. Помимо этого, τ -инвариантные классы плоских G -связностей над $\tilde{X}$ сводятся к классам эквивалентности плоских G_{ad} -связностей над X , где $G_{\text{ad}} = G/Z(G)$ (по поводу смежных и более поздних результатов см. работы [5]–[9]).

В работе [10], мотивированной исследованиями уравнений Хитчина на неориентируемых многообразиях, изучалось пространство модулей $\mathcal{M}(X, G)$ плоских G -связностей на произвольном компактном неориентируемом многообразии X , где G – связная компактная или комплексная полупростая группа Ли. Накрывающее преобразование τ на ориентируемом двойном накрытии $\tilde{X}$ действует на $\mathcal{M}(\tilde{X}, G)$, а (в случае общего положения) подмножество $\mathcal{M}(\tilde{X}, G)^\tau$ по-прежнему представляет собой несвязное объединение множеств $\mathcal{M}(X, G)^\tau_{[r]}$, нумерованных индексом $[r] \in Z(G)/2Z(G)$. Более того, (в общем случае) многообразие $\mathcal{M}(X, G)$ отображается в множество $\mathcal{M}(X, G)_0^\tau$ с помощью регулярного накрытия со структурной группой $\{z \in Z(G) : z^2 = e\}$, порядок которой равен $|Z(G)/2Z(G)|$. Такие же результаты получаются для многообразий характеров $\mathcal{M}(\Pi, G)$ и $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$, где Π – конечнопорожденная группа, а $\tilde{\Pi}$ – подгруппа индекса 2. Цель настоящей работы состоит в обобщении и улучшении приведенных выше результатов работ [4], [10].

Для построения накрытий $\mathcal{M}(X, G)^\tau_{[r]}$ с $[r] \neq 0$ воспользуемся твистованными многообразиями характеров. Пусть X – многообразие с конечнопорожденной фундаментальной группой $\Pi = \pi_1(X)$ и G – связная компактная или редуктивная группа Ли с центром $Z(G)$. Множество G -характеров группы Π , твистованное 2-коциклом m на Π с коэффициентами из $Z(G)$, – это пространство классов G -сопряжений отображений из Π в G , которые отличаются от правильного гомоморфизма на мультипликативный фактор m . Обозначим это множество как $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$. С другой стороны, поскольку препятствие к поднятию элемента из $\text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$ до $\text{Hom}(\Pi, G)$ лежит в $H^2(\Pi, Z(G))$, множество $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})$ является несвязным объединением множеств $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$, нумерованных индексом $[m] \in H^2(\Pi, Z(G))$. Мы показываем, что (в общем положении) множество $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ представляет собой главное расслоение над $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$ со структурной группой $H^1(\Pi, Z(G))$ (теорема 2.1). Твистованные многообразия характеров групп поверхностей возникают в исследованиях голоморфных расслоений ненулевых степеней [1] и связностей полей Янга–Миллса [2] на римановых поверхностях. Сравнительно недавно они возникли в исследованиях системы Хитчина и дуальности Ленглендса [11]–[13].

Рассмотрим произвольное конечное регулярное накрытие $\tilde{X}$ многообразия X . Пусть $\tilde{\Pi} = \pi_1(\tilde{X})$. Группа Γ накрывающих преобразований изоморфна факторгруппе $\Pi/\tilde{\Pi}$ и действует на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$. Мы показываем, что (в случае общего положения) инвариантное подпространство $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma$ является объединением множеств $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma_{[r]}$, $[r] \in H^2(\Gamma, Z(G))$ (предложение 3.1).

Более того, если $[m] \in H^2(\Pi, Z(G))$ – поднятие индекса $[r]$, то в общем случае $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ есть регулярное накрытие $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma_{[r]}$ со структурной группой $H^1(\Gamma, Z(G))$

(теорема 3.1). Если $\tilde{X}$ – двукратное накрытие многообразия X , то $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ и

$$H^1(\mathbb{Z}_2, Z(G)) = \{z \in Z(G) : z^2 = e\}, \quad H^2(\mathbb{Z}_2, Z(G)) = Z(G)/2Z(G).$$

Тем самым воспроизводятся результаты работ [4], [10]. Более того, $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^\Gamma$ представляет собой главное расслоение над множеством $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$, а его структурная группа есть подгруппа группы $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$, изоморфной коядру отображения поднятия (pull-back) $H^1(\Gamma, Z(G)) \rightarrow H^1(\Pi, Z(G))$ (теорема 3.2). Композиция двух слоений согласуется со слоением многообразия $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ над $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$.

Наконец, мы отождествляем твистованное множество характеров $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ с пространством модулей плоских связностей на главном G -расслоении, твистованным плоским пучком $Z(G)$ -расслоения над X , используя отображение голономии. Понятие твистованного главного расслоения восходит к работам [14]–[18], в которых исследуются расслоения пучков, твистованных расслоений и модули пучков расслоений; обзор этих работ приведен в приложении. Похожая конструкция разрабатывалась в работе [19] для случая, когда твистованное главное расслоение является обрамляющим расслоением модуля пучка расслоений. В рассматриваемой нами геометрической интерпретации различные отображения проекции, отмеченные выше, можно реализовать геометрически с помощью операций на расслоениях.

2. ТВИСТОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ

2.1. Многообразия характеров, твистованные 2-коциклом. Пусть G – связная компактная или комплексная редуктивная группа Ли. Для заданной конечнопорожденной группы Π обозначим через $\text{Hom}(\Pi, G)$ множество гомоморфизмов из Π в G . Имеется действие группы G на $\text{Hom}(\Pi, G)$, задаваемое операцией сопряжения, т.е. $g : \phi \mapsto \text{Ad}_g \circ \phi$. Гомоморфизм $\phi : \Pi \rightarrow G$ *редуктивен*, если его композиция $\text{Ad} \circ \phi$ с присоединенным представлением группы G является полностью редуцируемым представлением алгебры Ли группы G . Орбита $G \cdot \phi$ замкнута в $\text{Hom}(\Pi, G)$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм ϕ редуктивен [20]–[22].

Пусть $\text{Hom}^{\text{red}}(\Pi, G)$ – подмножество редуктивных гомоморфизмов. G -многообразии *характеров* или *многообразии G -представлений* группы Π – это факторпространство $\mathcal{M}(\Pi, G) := \text{Hom}^{\text{red}}(\Pi, G)/G$, обладающее свойством хаусдорфовости. При заданном $\phi \in \text{Hom}^{\text{red}}(\Pi, G)$ обозначим через $[\phi]$ его класс в $\mathcal{M}(\Pi, G)$.

Пусть $\text{Hom}^\circ(\Pi, G)$ – множество элементов $\phi \in \text{Hom}^{\text{red}}(\Pi, G)$, стабилизирующая группа которого в G является центром $Z(G)$ этой группы; будем называть такой гомоморфизм ϕ *хорошим* [20]. Обозначим через $\mathcal{M}^\circ(\Pi, G) := \text{Hom}^\circ(\Pi, G)/G$ гладкую составляющую пространства $\mathcal{M}(\Pi, G)$.

2-Коцикл на Π с коэффициентами, лежащими в центре $Z(G)$, – это отображение $m : \Pi \times \Pi \rightarrow Z(G)$, удовлетворяющее соотношению

$$m(a_1, a_2 a_3) m(a_2, a_3) = m(a_1 a_2, a_3) m(a_1, a_2) \quad (2.1)$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \Pi$. Обозначим через $Z^2(\Pi, Z(G))$ множество всех таких отображений m . Будем называть два 2-коцикла $m, m' \in Z^2(\Pi, Z(G))$ *когомологичными* (посредством отображения t), если существует отображение $t : \Pi \rightarrow Z(G)$ такое, что

$$m'(a_1, a_2) = m(a_1, a_2) t(a_1) t(a_2) t(a_1 a_2)^{-1} \quad (2.2)$$

для всех $a_1, a_2 \in \Pi$. Свойство когомологичности представляет собой отношение эквивалентности, таким образом, множество всех классов эквивалентности есть вторая группа когомологий $H^2(\Pi, Z(G))$. Из условия (2.1), определяющего коцикл, вытекает, что $m(a, e) = m(e, a) = m(e, e)$ при всех $a \in \Pi$. Всегда можно вместо m использовать 2-коцикл, когомологичный исходному и удовлетворяющий дополнительному требованию $m(e, e) = e$; такие 2-коциклы называются *нормированными*. Они образуют подмножество $Z^2_{\text{нор}}(\Pi, Z(G))$ в $Z^2(\Pi, Z(G))$. Каждый элемент $m \in Z^2_{\text{нор}}(\Pi, Z(G))$ задает центральное расширение $\hat{\Pi}_m$ группы Π с помощью $Z(G)$, т. е. короткую точную последовательность (с сечением) групп

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow \hat{\Pi}_m \rightarrow \Pi \rightarrow 1.$$

Как множество $\hat{\Pi}_m = \Pi \times Z(G)$; операция умножения элементов $(a_1, z_1), (a_2, z_2) \in \hat{\Pi}_m$ задается формулой $(a_1, z_1) \cdot (a_2, z_2) = (a_1 a_2, z_1 z_2 m(a_1, a_2))$. Ассоциативность умножения следует из условия (2.1). Если $m, m' \in Z^2_{\text{нор}}(\Pi, Z(G))$ являются когомологичными друг другу, то два центральных расширения $\hat{\Pi}_m$ и $\hat{\Pi}_{m'}$ изоморфны.

При заданном 2-коцикле $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$ m -гомоморфизм из Π в $Z(G)$ есть отображение $\phi: \Pi \rightarrow G$ такое, что

$$\phi(a_1)\phi(a_2) = \phi(a_1 a_2)m(a_1, a_2) \quad (2.3)$$

для всех $a_1, a_2 \in \Pi$. Пусть $\text{Hom}_m(\Pi, G)$ – множество всех таких ϕ . Очевидно, что G действует на $\text{Hom}_m(\Pi, G)$ сопряжениями. Так как $Z(G)$ действует тривиально в присоединенном представлении, композиция $\text{Ad} \circ \phi$ является правильным представлением алгебры Ли группы G . Будем называть отображение ϕ *редуктивным*, если композиция $\text{Ad} \circ \phi$ полностью приводима.

ЛЕММА 2.1. *При заданных $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$ и m -гомоморфизме $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G)$ орбита $G \cdot \phi$ под действием сопряжений и группы G замкнута в $\text{Hom}_m(\Pi, G)$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм ϕ редуктивен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО есть прямое обобщение аналогичного результата при $m = 0$. Например, доказательство теоремы 30 из работы [22] применимо дословно.

Пусть $\text{Hom}_m^{\text{red}}(\Pi, G)$ – множество редуктивных m -гомоморфизмов. Назовем *m -твистованным множеством G -характеров группы Π* множество

$$\mathcal{M}_m(\Pi, G) := \text{Hom}_m^{\text{red}}(\Pi, G)/G,$$

являющееся хаусдорфовым топологическим пространством. Как и ранее, обозначим классы G -сопряженности гомоморфизма ϕ символом $[\phi]$.

Пусть $\text{Hom}_m^{\circ}(\Pi, G)$ – множество $\phi \in \text{Hom}_m^{\text{red}}(\Pi, G)$ таких, что стабилизирующее множество гомоморфизма ϕ есть $Z(G)$. Пусть $\mathcal{M}_m^{\circ}(\Pi, G) := \text{Hom}_m^{\circ}(\Pi, G)/G$ представляет собой гладкую составляющую множества $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$. Если $m, m' \in Z^2(\Pi, G)$ когомологичны посредством отображения $t: \Pi \rightarrow Z(G)$, то существует отображение $\sigma_t: \text{Hom}_m(\Pi, G) \rightarrow \text{Hom}_{m'}(\Pi, G)$, задающееся формулой $(\sigma_t(\phi))(a) = \phi(a)t(a)$ для всех $a \in \Pi$. Оно индуцирует гомеоморфизм (также обозначаемый нами как) $\sigma_t: \mathcal{M}_m(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(\Pi, G)$, $[\phi] \mapsto [\sigma_t(\phi)]$, который можно ограничить до диффеоморфизма $\sigma_t: \mathcal{M}_m^{\circ}(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}_{m'}^{\circ}(\Pi, G)$. Если класс $[m] = 0$ в $H^2(\Pi, Z(G))$, то множество $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ гомеоморфно $\mathcal{M}(\Pi, G)$, а $\mathcal{M}_m^{\circ}(\Pi, G)$ диффеоморфно $\mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G)$.

ЛЕММА 2.2. Для каждого 2-коцикла $t \in Z^2(\Pi, Z(G))$ имеется действие группы $H^1(\Pi, Z(G)) \cong \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ на t -твистованном многообразии характеров $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$, которое сохраняет подмножество $\mathcal{M}_m^\circ(\Pi, G)$. Кроме того, если 2-коцикл $t' \in Z^2(\Pi, Z(G))$ когомологичен t посредством отображения $t: \Pi \rightarrow Z(G)$, то действия на многообразиях $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ и $\mathcal{M}_{m'}(\Pi, G)$ коммутируют с гомеоморфизмом $\sigma_t: \mathcal{M}_m(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(\Pi, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $m' = m$ в (2.2), если $t \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$. Поэтому $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ действует на $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ посредством σ_s , и это действие сохраняет $\mathcal{M}_m^\circ(\Pi, G)$. Свойство коммутативности следует из того, что $\sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{st}$ для всех $s, t: \Pi \rightarrow Z(G)$ и, в частности, для $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$.

2.2. Связь с многообразиями G_{ad} -характеров. Пусть, как и раньше, дана группа Ли G и $G_{\text{ad}} := G/Z(G)$, а $\bar{g} \in G_{\text{ad}}$ – образ $g \in G$. Имеется короткая точная последовательность

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow G \rightarrow G_{\text{ad}} \rightarrow 1.$$

Если $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$, то произвольный m -гомоморфизм $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G)$ задает правильный гомоморфизм $\bar{\phi} \in \text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$ с помощью композиции с факторотображением $G \rightarrow G_{\text{ad}}$. Очевидно, $\bar{\phi}$ редуکتивен тогда и только тогда, когда редуکتивен гомоморфизм ϕ , а G -сопряжения на ϕ переводятся в G_{ad} -сопряжения на $\bar{\phi}$. Таким образом, мы получаем отображение $\xi_m: \mathcal{M}_m(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})$.

Подмножество $\text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$ множества $\text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$ состоит из редуکتивных гомоморфизмов из Π в G_{ad} , стабилизаторы которых в G_{ad} тривиальны, и

$$\mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}}) = \text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})/G.$$

Если $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G_{\text{ad}})$, то $\bar{\phi} \in \text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$ влечет $\phi \in \text{Hom}_m^\circ(\Pi, G)$, но обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть $\text{Hom}_m^\circ(\Pi, G)$ – множество $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G)$ таких, что $\bar{\phi} \in \text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$, и пусть $\mathcal{M}_m^\circ(\Pi, G) := \text{Hom}_m^\circ(\Pi, G)/G$. Тогда отображение ξ_m допускает ограничение $\xi_m: \mathcal{M}_m^\circ(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$.

С другой стороны, известно, что препятствие к поднятию элемента из $\text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$ на $\text{Hom}(\Pi, G)$ лежит в $H^2(\Pi, Z(G))$. На самом деле, если $\phi: \Pi \rightarrow G$ – некоторое (теоретико-множественное) поднятие $\bar{\phi} \in \text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$, то для всех $a_1, a_2 \in \Pi$ имеем

$$\phi(a_1)\phi(a_2) = \phi(ab)m(a_1, a_2) \quad (2.4)$$

при некотором $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$. Класс когомологий $[m] \in H^2(\Pi, Z(G))$ не зависит от выбора элемента ϕ и, более того, оказывается инвариантным относительно сопряжений $\bar{\phi}$ с элементами группы G_{ad} . Поэтому имеется непрерывное отображение

$$\mu: \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}}) \rightarrow H^2(\Pi, Z(G)), \quad [\bar{\phi}] \mapsto [m],$$

следовательно, существует несвязное объединение

$$\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}}) = \bigsqcup_{[m] \in H^2(\Pi, Z(G))} \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]} := \mu^{-1}([m])$. Гладкая часть $\mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$ также является несвязным объединением множеств:

$$\mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]} := \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]} \cap \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}}), \quad [m] \in H^2(\Pi, Z(G)).$$

Когда группа G полупростая, $G \rightarrow G_{\text{ad}}$ представляет собой конечно накрывающий гомоморфизм. При этом $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$ является объединением топологических компонент в $\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})$ [23], [24].

ТЕОРЕМА 2.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для каждого 2-коцикла $t \in Z^2(\Pi, Z(G))$ отображение

$$\xi_m: \mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$$

есть главное расслоение с абелевой структурной группой $H^1(\Pi, Z(G))$.

2. Если коциклы $t, t' \in Z^2(\Pi, Z(G))$ когомологичны посредством отображения $t: \Pi \rightarrow Z(G)$, то $\sigma_t: \mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}_{m'}^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$ является изоморфизмом главных $H^1(\Pi, Z(G))$ -расслоений над $\mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, ξ_m отображает $\mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$ в $\mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$. Докажем первое утверждение теоремы в три этапа.

ШАГ 1. Отображение ξ_m сюръективно.

Для $\bar{\phi} \in \text{Hom}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$ выберем поднятие $\phi': \Pi \rightarrow G$; пусть $m' \in Z^2(\Pi, Z(G))$ есть соответствующий 2-коцикл. Так как $[m'] = [m]$, существует отображение $t: \Pi \rightarrow Z(G)$, удовлетворяющее условию (2.2). Тогда получим, что

$$\phi := \sigma_t^{-1}(\phi') \in \text{Hom}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G), \quad \xi_m([\phi]) = [\bar{\phi}].$$

ШАГ 2. Действие $H^1(\Pi, Z(G)) \cong \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ на $\mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$ свободно.

Если $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ и $\phi \in \text{Hom}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$ таковы, что $s \cdot [\phi] = [\phi]$, то существует $h \in G$, удовлетворяющий равенству $\sigma_s(\phi) = \text{Ad}_h \circ \phi$. Поэтому $\bar{\phi} = \text{Ad}_{\bar{h}} \circ \phi$, отсюда, поскольку $\bar{\phi} \in \text{Hom}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})$, получим, что $h \in Z(G)$. Следовательно, $\sigma_s(\phi) = \phi$ и s – единичный элемент.

ШАГ 3. Группа $H^1(\Pi, Z(G))$ действует транзитивно на $\xi_m^{-1}([\bar{\phi}])$ для любого $[\bar{\phi}] \in \mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{\nu_2([r])}$.

Группа $H^1(\Pi, Z(G))$ действует на $\xi_m^{-1}([\bar{\phi}])$, поскольку $\xi_m \circ \sigma_s = \xi_m$ на $\mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$ при всех $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$. При заданных $\phi, \phi' \in \text{Hom}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$, отображающих в $[\bar{\phi}] = [\bar{\phi}'] \in \text{Hom}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})$, существует элемент $h \in G$ (или $\bar{h} \in G_{\text{ad}}$) такой, что $\bar{\phi}'(a) = \text{Ad}_{\bar{h}} \bar{\phi}(a)$ для всех $a \in \Pi$. Таким образом, имеем отображение $s: \Pi \rightarrow Z(G)$ такое, что $\phi'(a) = s(a) \text{Ad}_h \phi(a)$ для всех $a \in \Pi$ (заметим, что Ad_h зависит только от $\bar{h}$). Поскольку отображения $\phi', \text{Ad}_h \phi \in \text{Hom}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G)$, имеем $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ и $[\phi'] = s \cdot [\phi]$.

2. Второе утверждение теоремы вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_m^{\bar{\circ}}(\Pi, G) & \xrightarrow{\sigma_t} & \mathcal{M}_{m'}^{\bar{\circ}}(\Pi, G) \\ & \searrow \xi_m & \swarrow \xi_{m'} \\ & \mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}, & \end{array}$$

и соотношения $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_{st}$, верного для всех $s \in \text{Hom}(\Pi, Z(G))$.

Поскольку центр $Z(G)$ представляет собой (зачастую несвязную) абелеву группу Ли, слой $H^1(\Pi, Z(G)) \cong \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ сам является множеством характеров $\mathcal{M}(\Pi, Z(G))$. Если последний дискретен, то ξ_m – регулярное накрытие. Приведем некоторые достаточные условия, обеспечивающие конечность групп $H^k(\Pi, Z(G))$, $k = 1, 2$.

ЛЕММА 2.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа Π конечна, то $H^1(\Pi, Z(G))$ и $H^2(\Pi, Z(G))$ тоже конечны.*
2. *Если группа G полупростая, то $H^1(\Pi, Z(G))$ конечна. Если в дополнение к этому группа Π конечнопредставима, то $H^2(\Pi, Z(G))$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Запишем представление $Z(G) = (\mathfrak{z}/\ell) \times D$, где $\mathfrak{z}$ – алгебра Ли для $Z(G)$, ℓ – дискретная подгруппа в $\mathfrak{z}$, а D – конечная абелева группа. Если группа Π конечна, то ее образ при гомоморфизме $\Pi \rightarrow Z(G)$ состоит из элементов $|\Pi|$ -кручений в $Z(G)$. Поэтому $H^1(\Pi, Z(G)) \cong \text{Hom}(\Pi, Z(G))$ конечна. Поскольку $\mathfrak{z}/\ell$ имеет делители, $H^2(\Pi, \mathfrak{z}/\ell)$ конечна, равно как и $H^2(\Pi, Z(G))$.

2. Если группа G полупростая, то $Z(G)$ конечна. Поскольку группа Π является конечнопорожденной, $\text{Hom}(\Pi, Z(G))$ также конечна. Более того, $H_1(\Pi) = \Pi/[\Pi, \Pi]$ оказывается конечнопорожденной абелевой группой, а если Π конечнопредставима, ее множитель Шура $H_2(\Pi)$ также является конечнопорожденным. Поэтому $H^2(\Pi, Z(G)) \cong \text{Ext}(H_1(\Pi), Z(G)) \oplus \text{Hom}(H_2(\Pi), Z(G))$ конечна.

Первое утверждение теоремы 2.1 легко обобщить на произвольный групповой гомоморфизм $G \rightarrow \bar{G}$, ядро которого содержится в $Z(G)$. Когда этот гомоморфизм является накрывающим, а $m = 0$, данный результат повторяет теорему 3.6 из работы [25] (см. статью [26] относительно аналогичного утверждения про $\text{Hom}(\Pi, G)$). В случае, когда $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$, $G_{\text{ad}} = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, $Z(G) = \mathbb{Z}_2$, первое утверждение теоремы 2.1 переходит в лемму 3.3 из статьи [27] с поправкой на то, что m -твистованное многообразие характеров $\mathcal{M}_m(\Pi, G)$ в [27] было заменено на многообразие характеров $\mathcal{M}(\hat{\Pi}_m, G)$ центрального расширения $\hat{\Pi}_m$.

2.3. Пространство модулей плоских связностей, твистованных пучком плоских связностей. Предположим, что X – многообразие с конечнопорожденной фундаментальной группой $\Pi := \pi_1(X)$, а G – связная компактная или комплексная редуктивная группа Ли. Хорошо известно, что классы изоморфизмов плоских главных G -расслоений на X находятся во взаимно однозначном соответствии с G -сопряженными классами гомоморфизмов из Π в G .

Пусть $p: \hat{X} \rightarrow X$ – универсальная накрывающая множества X ; по соглашению группа Π действует на $\hat{X}$ слева. Рассмотрим связность произведения $Q := \hat{X} \times G$ над $\hat{X}$. При заданном $\phi \in \text{Hom}(\Pi, G)$ действие группы Π на $\hat{X}$ поднимается на Q как изоморфизм расслоений: при всех $a \in \Pi$ имеем

$$T_a: Q \rightarrow Q, \quad (y, g) \mapsto (a \cdot y, \phi(a)g), \quad y \in \hat{X}, \quad g \in G.$$

Фактор Q/Π есть главное G -расслоение над X , а тривиальная связность на Q переходит в плоскую связность на $Q/\Pi \rightarrow X$. Производя сопряжение с помощью G на ϕ , мы получим изоморфные плоские G -расслоения над X . Обратно, плоское G -расслоение над X задает при выборе точки в слое над точкой базы из X гомоморфизм $\phi: \Pi \rightarrow G$ такой, что $\phi(a)$ представляет собой голономию вдоль петли, реализующей элемент $a \in \Pi$, а различные выборы точки в слое приводят к гомоморфизмам, связанным преобразованиями сопряжений из G . Следовательно, множество характеров $\mathcal{M}(X, G)$ совпадает с пространством модулей (редуктивных) плоских G -связностей на X .

При $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$ и $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G)$ для каждого $a \in \Pi$ отображение T_a , определенное выше, все еще будет изоморфизмом расслоений на $Q = \hat{X} \times G$, сохраняющим тривиальную связность. Вместо того чтобы действовать правильным

образом на Π , отображение T_a удовлетворяет уравнению

$$T_{a_1} \circ T_{a_2} = T_{a_1 a_2} \circ m(a_1, a_2) \quad (2.6)$$

для всех $a_1, a_2 \in \Pi$. Здесь $m(a_1, a_2) \in Z(G)$, будучи элементом структурной группы G , действует на Q справа.

Будем говорить, что отображение T , удовлетворяющее уравнению (2.6), является *m -твистованным поднятием* действия группы Π на $\hat{X}$ на G -расслоение Q . Обратное, если задано m -твистованное поднятие T как изоморфизм G -расслоений на Q , то можно построить соответствующий m -гомоморфизм $\phi \in \text{Hom}_m(\Pi, G)$.

Два m -твистованных поднятия T, T' действия группы Π на Q называются *эквивалентными*, если существует элемент $h \in G$ (действующий на Q справа) такой, что $h \circ T_a = T'_a \circ h$ для всех $a \in \Pi$. Классы эквивалентности m -твистованных поднятий действия группы Π на Q находятся во взаимно однозначном соответствии с классами G -сопряжений m -твистованных гомоморфизмов из Π в G .

Можно задать пучок $Z(G)$ -расслоений над X при заданном произвольном 2-коцикле $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$. Читатель может найти в приложении к настоящей работе логически замкнутый обзор теории пучков расслоений [14], [28], [17] и главных расслоений, твистованных пучком расслоений. Пусть погружение представляет собой универсальное накрытие $p: \hat{X} \rightarrow X$. Главное $Z(G)$ -расслоение над произведением расслоений $\hat{X}^{[2]}$ есть произведение расслоений $L^m := \hat{X}^{[2]} \times Z(G)$. При $(y_1, y_2, y_3) \in \hat{X}^{[3]}$ мультипликативная структура

$$u_{(y_1, y_2, y_3)}: L_{(y_1, y_2)}^m \otimes L_{(y_2, y_3)}^m \rightarrow L_{(y_1, y_3)}^m$$

или $Z(G) \otimes Z(G) \rightarrow Z(G)$ задается формулой $z_1 \otimes z_2 \mapsto z_1 z_2 m(a_1, a_2)$, в которой $a_1, a_2 \in \Pi$ определены соотношениями $a_1 \cdot y_2 = y_1$, $a_2 \cdot y_3 = y_2$. Условие коцикла (2.1) обеспечивает коммутативность диаграммы (П.1) (см. приложение), а потому $(L^m, \hat{X})$ есть пучок $Z(G)$ -расслоения над X . В работе [19] при $Z(G) = U(1)$ он был назван пучком накрывающего расслоения, а тривиальная связность на $L^m \rightarrow \hat{X}^{[2]}$ – плоской связностью пучка $Z(G)$ -расслоения.

При заданном m -твистованном поднятии T действия группы Π на $\hat{X}$ до действия $Q = \hat{X} \times G$ можно интерпретировать Q как главное G -расслоение, твистованное пучком расслоений $(L^m, \hat{X})$ над X .

Для $(y_1, y_2) \in \hat{X}^{[2]}$ определим отображение $v_{(y_1, y_2)}: L_{(y_1, y_2)}^m \otimes Q_{y_2} \rightarrow Q_{y_1}$ соотношением $z \otimes q_2 \mapsto T_{a_1}(q_2)z$, где $a_1 \in \Pi$ задается условием $a_1 \cdot y_2 = y_1$. Соотношение (2.6) означает, что диаграмма (П.2) коммутативна, следовательно, $Q \rightarrow \hat{X}$ представляет собой $(L^m, \hat{X})$ -твистованное главное G -расслоение над X . Более того, тривиальная связность является плоской связностью на твистованном G -расслоении Q , которая при этом эквивалентна m -твистованному поднятию действия группы Π на Q и задает плоские связности, связанные между собой изоморфизмом расслоений. Обратное, если главное G -расслоение, твистованное вышеприведенным пучком расслоений $(L^m, \hat{X})$, допускает плоскую связность, то, поскольку $\hat{X}$ односвязно, существует глобальная тривиализация $Q \cong \hat{X} \times G$ такая, что плоская связность на Q есть тривиальная связность. Изоморфизм v задает поднятие $T_a: Q \rightarrow Q$ действия $a \in \Pi$ на $\hat{X}$, а из коммутативности диаграммы (П.2) следует, что T – m -твистованное поднятие. Выбор другой плоской тривиализации множества Q приводит к эквивалентному m -твистованному поднятию.

Все вышесказанное суммируется в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\hat{X}$ – универсальное накрытие многообразия X , пусть $(L^m, \hat{X})$ – пучок $Z(G)$ -расслоения, построенный с помощью $m \in Z^2(\Pi, Z(G))$. Тогда имеются естественные отождествления элементов следующих множеств:

- 1) классов G -сопряжений m -гомоморфизмов из Π в G ;
- 2) классов эквивалентности m -твистованных поднятий действия группы Π на $Q = \hat{X} \times G$ (или на произвольное плоское G -расслоение над $\hat{X}$);
- 3) классов эквивалентности плоских связностей на главном G -расслоении над X , твистованном с помощью $(L^m, \hat{X})$.

Таким образом, m -твистованное множество характеров $\mathcal{M}_m(X, G)$ можно отождествить с пространством модулей (редуктивных) плоских связностей на главном G -расслоении, твистованном пучком $Z(G)$ -расслоений $(L^m, \hat{X})$ над X . Если рассмотреть модули пучка расслоений вместо твистованных главных расслоений, получим, что Q задается обрамляющим расслоением и $Z(G) = S^1$. В этом случае процедура перехода от третьего пункта предложения 2.1 к первому была также объяснена в работе [19].

В соответствии с результатами, изложенными в приложении, плоское G_{ad} -расслоение $\bar{Q} \rightarrow X$ получается из плоского G -расслоения Q , твистованного с помощью пучка $(L^m, \hat{X})$. Это дает геометрическое объяснение отображения

$$\xi_m: \mathcal{M}_m^{\bar{Q}}(\Pi, G) \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$$

из первого утверждения теоремы 2.1. Кроме того, имеется следующая возможность непосредственного построения $\bar{Q}$. Центральное расширение $\hat{\Pi}_m$ действует правильным образом на Q как изоморфизм расслоений. Действие $(a, z) \in \hat{\Pi}_m$ на Q имеет вид $(y, g) \mapsto (a \cdot y, \phi(a)gz)$. Фактор $\bar{Q} := Q/\hat{\Pi}_m$ этого действия есть плоское G_{ad} -расслоение над X . Эквивалентно, m -твистованное поднятие T приводится к правильному действию группы Π на $Q_{\text{ad}} := Q/Z(G)$ как изоморфизма G_{ad} -расслоений, и при этом $\bar{Q} = Q_{\text{ad}}/\Pi$.

Препятствие к поднятию $\bar{Q}$ до G -расслоения над X содержится в $H^2(X, Z(G))$, и оно совпадает с классом Диксмера–Дуади пучка $(L^m, \hat{X})$ или с классом поднятий пучка расслоений $\bar{Q}$. С другой стороны, препятствие к поднятию плоского G_{ad} -расслоения до плоского G -расслоения лежит в $H^2(\Pi, Z(G))$. Эти два препятствия, вообще говоря, различны, но их можно связать друг с другом следующим образом. Π -расслоение $\hat{X} \rightarrow X$ задает классифицирующее отображение $f: X \rightarrow B\Pi$ (с точностью до гомотопии). Его поднятие (pull-back) на когомологии,

$$f^*: H^2(B\Pi, Z(G)) = H^2(\Pi, Z(G)) \rightarrow H^2(X, Z(G)),$$

вместе с отображением $H^2(X, Z(G)) \rightarrow H^2(X, Z(G))$, индуцированным естественным образом, определяет отображение $H^2(\Pi, Z(G)) \rightarrow H^2(X, Z(G))$, связывающее между собой два указанных препятствия. В случае, когда X является компактной (не обязательно ориентируемой) поверхностью рода не менее чем один, а группа G полупростая, две группы когомологий становятся изоморфными друг другу, т. е. $H^2(\Pi, Z(G)) \cong H^2(X, Z(G))$, поскольку X представляет собой классифицирующее пространство группы Π , а центр $Z(G)$ дискретный. В этом случае два класса препятствий совпадают; они были явно описаны в работе [5].

3. МНОЖЕСТВО ХАРАКТЕРОВ НОРМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Пусть Π – конечнопорожденная группа и пусть $\tilde{\Pi}$ – нормальная подгруппа конечного индекса. Тогда группа $\tilde{\Pi}$ также будет конечнопорожденной и будет существовать короткая точная последовательность

$$1 \rightarrow \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi \rightarrow \Gamma \rightarrow 1, \quad (3.1)$$

где фактор $\Gamma := \Pi/\tilde{\Pi}$ является конечной группой. В этом разделе устанавливаются соотношения между различными многообразиями характеров групп Π и $\tilde{\Pi}$. Исходным пунктом будет пример, в котором $\tilde{X}$ – конечное регулярное накрытие многообразия X с конечнопорожденной фундаментальной группой $\Pi = \pi_1(X)$, а $\tilde{\Pi} = \pi_1(\tilde{X})$.

Пусть, как и ранее, G – связная компактная или комплексная редуктивная группа Ли. Из первого утверждения леммы 2.3 следует, что как $H^1(\Gamma, Z(G))$, так и $H^2(\Gamma, Z(G))$ – конечные множества.

3.1. Γ -инвариантная часть множества характеров группы $\tilde{\Pi}$. Для элемента $a \in \Pi$ обозначим через $\bar{a}$ его образ в Γ . В частности, $\bar{e}$ обозначает единичный элемент в Γ . Выберем отображение $c: \Gamma \rightarrow \Pi$ такое, что $\overline{c(\gamma)} = \gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда $\text{Ad}_{c(\gamma)}|_{\tilde{\Pi}} \in \text{Aut}(\tilde{\Pi})$ – автоморфизм группы $\tilde{\Pi}$. При другом выборе элемента c' для всех $\gamma \in \Gamma$ выполнено включение $c(\gamma)^{-1}c'(\gamma) \in \tilde{\Pi}$, а потому $\text{Ad}_{c'(\gamma)} \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1}|_{\tilde{\Pi}} \in \text{Inn}(\tilde{\Pi})$ – внутренний автоморфизм группы $\tilde{\Pi}$. Тем самым получаем гомоморфизм из Γ в группу $\text{Out}(\tilde{\Pi}) := \text{Aut}(\tilde{\Pi})/\text{Inn}(\tilde{\Pi})$ внешних автоморфизмов группы $\tilde{\Pi}$.

ЛЕММА 3.1. *Ядро гомоморфизма $\Gamma \rightarrow \text{Out}(\tilde{\Pi})$ есть*

$$\tilde{\Pi} Z_{\Pi}(\tilde{\Pi})/\tilde{\Pi} \cong Z_{\Pi}(\tilde{\Pi})/\tilde{\Pi} \cap Z_{\Pi}(\tilde{\Pi}).$$

Гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда $Z_{\Pi}(\tilde{\Pi}) \subset \tilde{\Pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм $\Pi \rightarrow \text{Aut}(\tilde{\Pi})$ отображает $\tilde{\Pi}$ в $\text{Inn}(\tilde{\Pi})$, и его ядро есть $Z_{\Pi}(\tilde{\Pi})$, откуда получим искомые соотношения.

ЛЕММА 3.2. *Группа Γ действует на $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G)) \cong \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$ и на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$, сохраняя подмножество $\mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$. Более того, действие группы Γ коммутирует с действием группы $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))$ на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие $\tau \in \text{Aut}(\tilde{\Pi})$ на $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$ записывается следующим образом: $s \mapsto s \circ \tau^{-1}$. Поскольку подгруппа $\text{Inn}(\tilde{\Pi})$ действует на $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$ тривиально, $\text{Out}(\tilde{\Pi})$ действует на $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$, и поэтому Γ действует, как гомоморфизм $\Gamma \rightarrow \text{Out}(\tilde{\Pi})$.

Действие $\tau \in \text{Aut}(\tilde{\Pi})$ на группе $\text{Hom}^{\text{red}}(\tilde{\Pi}, G)$, определенное аналогичным отображением $\phi \mapsto \phi \circ \tau^{-1}$, коммутирует с преобразованиями сопряжений элементами G и сводится к действию $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$. Подгруппа $\text{Inn}(\tilde{\Pi})$ действует на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$ тривиально, поскольку в случае, когда $\tau = \text{Ad}_a \in \text{Inn}(\tilde{\Pi})$ (где $a \in \tilde{\Pi}$), получаем, что $\phi \circ \tau^{-1} = \text{Ad}_{\phi(a)}^{-1} \circ \phi$ сопряжено ϕ . Поэтому $\text{Out}(\tilde{\Pi})$ действует на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$, и в силу этого действие группы Γ тоже определено. Наконец, если $\phi \in \text{Hom}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$, то $\phi \circ \tau^{-1} \in \text{Hom}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$ для всех $\tau \in \text{Aut}(\tilde{\Pi})$.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить очевидное равенство $\sigma_s(\phi) \circ \tau^{-1} = \sigma_{s \circ \tau^{-1}}(\phi \circ \tau^{-1})$ при всех $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$, $\phi \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$ и $\tau \in \text{Aut}(\tilde{\Pi})$.

На самом деле, поскольку $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$ само является множеством характеров $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, Z(G))$, действие группы Γ на нем имеет то же происхождение, что и действие на $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$. Пусть $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$, $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma$ и $\mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma$ — Γ -инвариантные части соответственно $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$, $\mathcal{M}(\tilde{\Pi}, G)$ и $\mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Существует непрерывное отображение*

$$\lambda: \mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma \rightarrow H^2(\Gamma, Z(G)).$$

Соответственно, имеется несвязное объединение

$$\mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma = \bigsqcup_{[r] \in H^2(\Gamma, Z(G))} \mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^\Gamma, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^\Gamma := \lambda^{-1}([r])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[\phi] \in \mathcal{M}^\circ(\tilde{\Pi}, G)^\Gamma$, при каждом $\gamma \in \Gamma$ существует элемент $g(\gamma) \in G$ (единственный с точностью до $Z(G)$) такой, что $\phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \phi$. Пусть $\tilde{c}: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \tilde{\Pi}$ — (единственное) отображение, заданное равенством

$$c(\gamma_1)c(\gamma_2) = c(\gamma_1\gamma_2)\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2), \quad (3.3)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{g(\gamma_1\gamma_2)}^{-1} \circ \phi &= \phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma_1\gamma_2)}^{-1} = \text{Ad}_{\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))}^{-1} \circ \phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma_1)c(\gamma_2)}^{-1} = \\ &= \text{Ad}_{\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))}^{-1} \circ \text{Ad}_{g(\gamma_1)g(\gamma_2)}^{-1} \circ \phi. \end{aligned}$$

Поскольку $\phi \in \text{Hom}^\circ(\tilde{\Pi}, G)$, существует элемент $r(\gamma_1, \gamma_2) \in Z(G)$ такой, что

$$g(\gamma_1)g(\gamma_2) = g(\gamma_1\gamma_2)\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))r(\gamma_1, \gamma_2). \quad (3.4)$$

В силу ассоциативности относительно Π и Γ из соотношения (3.3) следует, что

$$\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)\tilde{c}(\gamma_2, \gamma_3) = \tilde{c}(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3)\text{Ad}_{c(\gamma_3)}^{-1}\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)$$

для всех $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$. В силу ассоциативности относительно G и Γ из соотношения (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3))r(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)\phi(\tilde{c}(\gamma_2, \gamma_3))r(\gamma_2, \gamma_3) &= \\ &= \phi(\tilde{c}(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3))r(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3)\text{Ad}_{g(\gamma_3)}^{-1}\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))r(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Применяя эти два тождества в совокупности с инвариантностью

$$\phi(\text{Ad}_{c(\gamma_3)}^{-1}\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)) = \text{Ad}_{g(\gamma_3)}^{-1}\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)),$$

получим

$$r(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)r(\gamma_2, \gamma_3) = r(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3)r(\gamma_1, \gamma_2). \quad (3.5)$$

Таким образом, $r \in Z^2(\Gamma, Z(G))$ – 2-коцикл на Γ с коэффициентами из $Z(G)$. Если мы выберем другие отображения s или g , то r будет отличаться кограницей. Таким образом, класс $[r] \in H^2(\Gamma, Z(G))$ хорошо определен. Непрерывность отображения $\lambda: [\phi] \mapsto [r]$ очевидна. Отсюда непосредственно получается разбиение $\mathcal{M}^\circ(\tilde{P}, G)^\Gamma$ в несвязное объединение множеств. Предложение доказано.

Когда $\tilde{P}$ – подгруппа P индекса два, $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ и $H^2(\mathbb{Z}_2, Z(G)) \cong Z(G)/2Z(G)$. В этом случае предложение 3.1 переходит в предложение 3.4 из работы [10]. Результат был основан на лемме 3.4 из работы [4] в случае, когда $P = \pi_1(X)$ и $\tilde{P} = \pi_1(\tilde{X})$, где $\hat{X}$ – ориентируемое двойное накрытие компактной неориентируемой поверхности X .

Для нахождения дополнительных структур множества $\mathcal{M}^\circ(\tilde{P}, G)^\Gamma$ нам понадобится гомоморфизм $\delta: H^1(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma \rightarrow H^2(\Gamma, Z(G))$. Напомним, что имеется отображение $\tilde{c}: \Gamma \times \Gamma \rightarrow Z(G)$, определенное соотношением (3.3). При $s \in \text{Hom}(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma$ положим $r := s \circ \tilde{c}$. Тогда $r: \Gamma \times \Gamma \rightarrow Z(G)$ удовлетворяет условию коцикла (3.5).

Определим теперь $\delta: s \mapsto [r] \in H^2(\Gamma, Z(G))$, которое не будет зависеть от выбора элемента s .

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Существует действие группы $H^1(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma$ на $\mathcal{M}(\tilde{P}, G)^\Gamma$, сохраняющее подмножество $\mathcal{M}^\circ(\tilde{P}, G)^\Gamma$. Более того, если $[\phi] \in \mathcal{M}^\circ(\tilde{P}, G)^\Gamma$, то соотношение $\lambda(s \cdot [\phi]) = \lambda([\phi]) - \delta(s)$ справедливо при всех $s \in H^1(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 3.1 действие группы $H^1(\tilde{P}, Z(G))$ на $\mathcal{M}(\tilde{P}, G)$ ограничивается до искомого действия. При $[\phi] \in \mathcal{M}^\circ(\tilde{P}, G)^\Gamma$ выберем $g: \Gamma \rightarrow G$ так же, как и в доказательстве предложения 3.1, т.е. таким образом, чтобы $\phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \phi$. При всех $s \in H^1(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma \cong \text{Hom}(\tilde{P}, Z(G))^\Gamma$ имеем $\sigma_s(\phi) \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \sigma_s(\phi)$. Поэтому можно взять тот же элемент $g: \Gamma \rightarrow G$ для определения $s \cdot [\phi]$. Тожество $\lambda(s \cdot [\phi]) = \lambda([\phi]) - \delta(s)$ при этом следует из (3.4) и вышеприведенного определения величины δ .

3.2. Связь с твистованными многообразиями характеров группы P . Начнем с обозначений. Напомним, что существует короткая точная последовательность (3.1). Пусть $\iota_k: Z^k(P, Z(G)) \rightarrow Z^k(\tilde{P}, Z(G))$, а $\iota_k: H^k(P, Z(G)) \rightarrow H^k(\tilde{P}, Z(G))$ индуцируется отображением включения $\tilde{P} \rightarrow P$. Пусть $\nu_k: Z^k(\Gamma, Z(G)) \rightarrow Z^k(P, Z(G))$, а отображение $\nu_k: H^k(\Gamma, Z(G)) \rightarrow H^k(P, Z(G))$ индуцируется фактор-отображением $P \rightarrow \Gamma$. Мы рассмотрим только случаи $k = 1, 2$.

ЛЕММА 3.3. *При заданном 2-коцикле $t \in Z^2(P, Z(G))$ ограничение*

$$\phi \in \text{Hom}_m(P, G) \mapsto \phi|_{\tilde{P}} \in \text{Hom}_{\iota_2(m)}(\tilde{P}, G)$$

индуцирует непрерывное отображение $\eta_m: \mathcal{M}_m(P, G) \rightarrow \mathcal{M}_{\iota_2(m)}(\tilde{P}, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $\phi \in \text{Hom}_m^{\text{red}}(P, G)$ тогда и только тогда, когда $\phi|_{\tilde{P}} \in \text{Hom}_{\iota_2(m)}^{\text{red}}(\tilde{P}, G)$. Как и в доказательстве леммы 3.1 из работы [10], этот факт следует из утверждений работы [29] и леммы 2 в главе 3, § 9.8 монографии [30].

Если $\phi|_{\tilde{P}} \in \text{Hom}_{\iota_2(m)}^\circ(\tilde{P}, G)$, то $\phi \in \text{Hom}_m^\circ(P, G)$, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Пусть $\text{Hom}_m^{\tilde{c}}(P, G)$ – множество таких $\phi \in \text{Hom}_m(P, G)$,

что $\phi|_{\tilde{H}} \in \text{Hom}_{\iota_2(m)}^{\circ}(\tilde{H}, G)$. Тогда $\mathcal{M}_m^{\circ}(P, G) := \text{Hom}_m^{\circ}(P, G)/G$ есть гладкая часть $\mathcal{M}_m(P, G)$, лежащая внутри $\mathcal{M}_m^{\circ}(P, G)$, а отображение η_m приводится к гладкому отображению $\eta_m: \mathcal{M}_m^{\circ}(P, G) \rightarrow \mathcal{M}_{\iota_2(m)}^{\circ}(\tilde{P}, G)$. В частности, если $r \in Z_{\text{пор}}^2(\Gamma, Z(G))$ и $m = \nu_2(r)$, то $\iota_2(m) = 0$ как 2-коцикл на $\tilde{P}$, и η_m отображает $\mathcal{M}_m^{\circ}(P, G)$ в $\mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Для каждого нормированного 2-коцикла $r \in Z_{\text{пор}}^2(\Gamma, Z(G))$ отображение*

$$\eta_{\nu_2(r)}: \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G) \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r]}^{\Gamma}$$

есть регулярное накрытие со структурной группой $H^1(\Gamma, Z(G))$.

2. *Если $r, r' \in Z_{\text{пор}}^2(\Gamma, Z(G))$ суть два нормированных 2-коцикла таких, что $\nu_2([r]) = \nu_2([r']) \in H^2(P, Z(G))$, то два накрытия*

$$\eta_{\nu_2(r)}: \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G) \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r]}^{\Gamma}, \quad \eta_{\nu_2(r')}: \mathcal{M}_{\nu_2(r')}^{\circ}(P, G) \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r']}^{\Gamma}$$

взаимно изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для простоты выберем $c: \Gamma \rightarrow P$ так, что $c(\bar{e}) = e$. Тогда $\tilde{c}(\bar{e}, \gamma) = \tilde{c}(\gamma, \bar{e}) = e$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Доказательство утверждения 1 разбивается на четыре части.

ШАГ 1. Докажем, что $\eta_{\nu_2(r)}(\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G)) \subset \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r]}^{\Gamma}$.

Для каждого $[\phi] \in \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G)$ имеем $[\phi|_{\tilde{H}}] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)^{\Gamma}$. Необходимо показать, что $\lambda([\phi|_{\tilde{H}}]) = [r]$. Пусть $g := \phi \circ c$. Тогда $\phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \phi$ на $\tilde{H}$ при всех $\gamma \in \Gamma$, откуда следует, что $[\phi|_{\tilde{H}}]$ Γ -инвариантно и

$$g(\gamma_1)g(\gamma_2) = \phi(c(\gamma_1)c(\gamma_2))r(\gamma_1, \gamma_2) = g(\gamma_1\gamma_2)\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))r(\gamma_1, \gamma_2)$$

для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Искомый результат следует из определения отображения λ с применением равенства (3.4).

ШАГ 2. Докажем, что $\eta_{\nu_2(r)}(\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G)) = \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r]}^{\Gamma}$ (сюръективность).

При заданном $\tilde{\phi} \in \text{Hom}^{\circ}(\tilde{P}, G)$ таком, что $[\tilde{\phi}] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{P}, G)_{[r]}^{\Gamma}$, существует такое отображение $g: \Gamma \rightarrow G$, что $\tilde{\phi} \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \tilde{\phi}$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Величины $g(\gamma)$ можно подкрутить с помощью $Z(G)$, чтобы достичь согласия с условием (3.4). Пусть $\phi(a) = g(\bar{a})\tilde{\phi}(c(\bar{a})^{-1}a)$ для всех $a \in P$. Тогда $\phi|_{\tilde{H}} = \tilde{\phi}$, и для всех $a_1, a_2 \in P$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \phi(a_1)\phi(a_2) &= g(\bar{a}_1)\tilde{\phi}(c(\bar{a}_1)^{-1}a_1)g(\bar{a}_2)\tilde{\phi}(c(\bar{a}_2)^{-1}a_2) = \\ &= g(\bar{a}_1)g(\bar{a}_2)(\text{Ad}_{g(\bar{a}_2)}^{-1}\tilde{\phi}(c(\bar{a}_1)^{-1}a_1))\tilde{\phi}(c(\bar{a}_2)^{-1}a_2) = \\ &= g(\bar{a}_1\bar{a}_2)\tilde{\phi}(\tilde{c}(\bar{a}_1, \bar{a}_2))r(\bar{a}_1, \bar{a}_2)\tilde{\phi}(\text{Ad}_{c(\bar{a}_2)}^{-1}(c(\bar{a}_1)^{-1}a_1))\tilde{\phi}(c(\bar{a}_2)^{-1}a_2) = \\ &= g(\bar{a}_1\bar{a}_2)\tilde{\phi}(\tilde{c}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)c(\bar{a}_2)^{-1}c(\bar{a}_1)^{-1}a_1a_2)r(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \\ &= g(\bar{a}_1\bar{a}_2)\tilde{\phi}(c(\bar{a}_1\bar{a}_2)^{-1}a_1a_2)r(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \phi(a_1a_2)r(\bar{a}_1, \bar{a}_2). \end{aligned}$$

Поэтому $\phi \in \text{Hom}_{\nu_2(r)}^{\circ}(P, G)$ и $\eta_{\nu_2(r)}([\phi]) = [\tilde{\phi}]$. Заметим, что если применить преобразование $c': \Gamma \rightarrow P$ вместо c , то можно выбрать такое $g'(\gamma) = g(\gamma)\tilde{\phi}(c(\gamma)^{-1}c'(\gamma))$ (где $\gamma \in \Gamma$), что $g'(\bar{a})\tilde{\phi}(c'(\bar{a})^{-1}a) = \phi(a)$ (где $a \in P$) сохраняется.

ШАГ 3. Имеется свободное действие группы $H^1(\Gamma, Z(G)) \cong \text{Hom}(\Gamma, Z(G))$ на множестве $\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\tilde{\circ}}(\Pi, G)$.

Действие $s \in \text{Hom}(\Gamma, Z(G))$ на $[\phi] \in \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\tilde{\circ}}(\Pi, G)$ имеет вид $s \cdot [\phi] := [\sigma_{\nu_2(s)}(\phi)]$. Предположим, что $s \cdot [\phi] = [\phi]$. Тогда найдется такой элемент $h \in G$, что $\sigma_s(\phi) = \text{Ad}_h \circ \phi$, откуда следует, что $\phi|_{\tilde{\Pi}} = \text{Ad}_h \circ \phi|_{\tilde{\Pi}}$. Поскольку $\phi|_{\tilde{\Pi}} \in \text{Hom}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$, мы имеем $h \in Z(G)$, откуда получаем равенство $\sigma_s(\phi) = \phi$. В силу этого элемент s единичный.

ШАГ 4. Докажем, что $\text{Hom}(\Gamma, Z(G))$ действует транзитивно на $\eta_{\nu_2(r)}^{-1}([\tilde{\phi}])$ при каждом $[\tilde{\phi}] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^{\Gamma}$.

Очевидно, это действие сохраняет $\eta_{\nu_2(r)}^{-1}([\tilde{\phi}])$. Если $\phi, \phi' \in \text{Hom}_{\nu_2(r)}^{\tilde{\circ}}(\Pi, G)$ удовлетворяют соотношению $\eta_{\nu_2(r)}([\phi']) = \eta_{\nu_2(r)}([\phi])$, то существует такой элемент $h \in G$, что $\phi'|_{\tilde{\Pi}} = \text{Ad}_h \circ (\phi|_{\tilde{\Pi}})$. Поэтому при всех $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\phi'(c(\gamma))h} \circ \phi|_{\tilde{\Pi}} &= \text{Ad}_{\phi'(c(\gamma))} \circ \phi'|_{\tilde{\Pi}} = \phi' \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}|_{\tilde{\Pi}} = \\ &= \text{Ad}_h \circ \phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}|_{\tilde{\Pi}} = \text{Ad}_{h\phi(c(\gamma))} \circ \phi|_{\tilde{\Pi}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\phi|_{\tilde{\Pi}} \in \text{Hom}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$, получаем $s(\gamma) := \phi'(c(\gamma)) \text{Ad}_h \phi(c(\gamma))^{-1} \in Z(G)$. Более того, при всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} s(\gamma_1)s(\gamma_2) &= \phi'(c(\gamma_1))s(\gamma_2) \text{Ad}_h \phi(c(\gamma_1))^{-1} = \\ &= \phi'(c(\gamma_1))\phi'(c(\gamma_2)) \text{Ad}_h (\phi(c(\gamma_2))^{-1} \phi(c(\gamma_1))^{-1}) = \\ &= \phi'(c(\gamma_1)c(\gamma_2))r(\gamma_1, \gamma_2) \text{Ad}_h \phi(c(\gamma_2)^{-1}c(\gamma_1)^{-1})r(\gamma_1, \gamma_2)^{-1} = \\ &= \phi'(c(\gamma_1\gamma_2)\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)) \text{Ad}_h \phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)^{-1}c(\gamma_1\gamma_2)^{-1}) = \\ &= \phi'(c(\gamma_1\gamma_2)) \text{Ad}_h \phi(c(\gamma_1\gamma_2))^{-1} = s(\gamma_1\gamma_2). \end{aligned}$$

Поэтому $s \in \text{Hom}(\Gamma, Z(G))$.

Наконец, для всех $a \in \Pi$ имеет место равенство

$$\phi'(a) = \phi'(c(\bar{a}))\phi'(c(\bar{a})^{-1}a) = s(\bar{a}) \text{Ad}_h \phi(c(\bar{a})) \text{Ad}_h \phi(c(\bar{a})^{-1}a) = s(\bar{a}) \text{Ad}_h \phi(a).$$

Поэтому $[\phi'] = s \cdot [\phi]$.

2. Предположим, что $\nu_2(r)$ и $\nu_2(r')$ когомологичны и связаны преобразованием $t: \Pi \rightarrow Z(G)$. Пусть $s := t|_{\tilde{\Pi}}$. Для любых $a \in \Pi$, $b \in \tilde{\Pi}$ из уравнения (2.2) следует, что $t(ab) = t(a)s(b)$, откуда, в свою очередь, мы получаем, что $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$. Более того, при $a \in \Pi$, $b \in \tilde{\Pi}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} r'(\bar{a}, \bar{a}^{-1})r(\bar{a}, \bar{a}^{-1})^{-1} &= r'(\bar{a}\bar{b}, \bar{a}^{-1})r(\bar{a}\bar{b}, \bar{a}^{-1})^{-1} = \\ &= t(ab)t(a^{-1})s(\text{Ad}_a b)^{-1} = t(a)s(b)t(a^{-1})s(\text{Ad}_a b)^{-1}. \end{aligned}$$

Положив в этих выражениях $b = e$, получим, что левая часть равна $t(a)t(a^{-1})$. Поэтому $s(\text{Ad}_a b) = s(b)$. Таким образом, $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))_{[r]}^{\Gamma}$, и оно действует на $\mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^{\Gamma}$. Результат теперь следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\tilde{\circ}}(\Pi, G) & \xrightarrow{\sigma_t} & \mathcal{M}_{\nu_2(r')}^{\tilde{\circ}}(\Pi, G) \\ \downarrow \eta_{\nu_2(r)} & & \downarrow \eta_{\nu_2(r')} \\ \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^{\Gamma} & \xrightarrow{\sigma_s} & \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r']}^{\Gamma} \end{array}$$

и того факта, что σ_t перепутывает действия группы $H^1(\Gamma, Z(G))$ на $\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(\Pi, G)$ и $\mathcal{M}_{\nu_2(r')}^{\circ}(\Pi, G)$. Здесь σ_t очевидным образом отображает $\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(\Pi, G)$ на $\mathcal{M}_{\nu_2(r')}^{\circ}(\Pi, G)$, в то время как σ_s отображает $\mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^{\Gamma}$ на $\mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r']}^{\Gamma}$ благодаря соотношению $[r] - \delta(s) = [r']$ (см. следствие 3.1). Теорема доказана.

Условие совместности соотношения $[r'] = [r] - \delta(s)$ и предположение о том, что $\nu_2([r]) = \nu_2([r'])$, требуют выполнения равенства $\nu_2(\delta(s)) = 0$ в $H^2(\Gamma, Z(G))$. Это равенство можно также доказать непосредственно. Если $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))^{\Gamma}$, то для всех $a_1, a_2 \in \Pi$

$$(\nu_2(\delta(s)))(a_1, a_2) = s(\tilde{c}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)) = t(a_1)t(a_2)t(a_1a_2)^{-1},$$

где $t: \Pi \rightarrow Z(G)$ задается соотношением $t(a) = s(c(\bar{a})^{-1}a)$, $a \in \Pi$. Доказательство второго утверждения теоремы 3.1 также говорит о том, что $\ker \nu_2 = \text{im } \delta$. Мы обсудим это соотношение с более алгебраической точки зрения ниже.

Если $\tilde{\Pi}$ – подгруппа в Π индекса два, то $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ и

$$H^1(\mathbb{Z}_2, Z(G)) = \{z \in Z(G) : z^2 = e\}, \quad H^2(\mathbb{Z}_2, Z(G)) = Z(G)/2Z(G).$$

Эти две группы имеют один и тот же порядок. Случай $[r] = 0$ в первом пункте теоремы 3.1 воспроизводит теорему 1.1 в работе [4] (для $\Pi = \pi_1(X)$, $\tilde{\Pi} = \pi_1(\tilde{X})$, где X – компактная неориентируемая поверхность, а $\tilde{X}$ – ее ориентируемое двукратное накрытие) и предложение 3.6 из работы [10].

3.3. Связь со множеством G_{ad} -характеров группы Π . Определим еще одно отображение $\zeta: \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)^{\Gamma} \rightarrow \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})$. Если $[\phi] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)^{\Gamma}$, то для всех $\gamma \in \Gamma$ выберем $g(\gamma) \in G$ так же, как и в доказательстве предложения 3.1. Поскольку $g(\gamma)$ определено с точностью до действия $Z(G)$, отображение $\bar{g}: \Gamma \rightarrow G_{\text{ad}}$, $\gamma \mapsto \overline{g(\gamma)}$ определено однозначно. Кроме того, для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\bar{g}(\gamma_1)\bar{g}(\gamma_2) = \bar{g}(\gamma_1\gamma_2)\overline{\phi(\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))}.$$

Вычисления, аналогичные второму шагу доказательства первого пункта теоремы 2.1, показывают, что отображение

$$\bar{\phi}: \Pi \rightarrow G_{\text{ad}}, \quad a \mapsto \bar{g}(\bar{a})\phi(c(\bar{a})^{-1}a)$$

есть гомоморфизм. Положим $\zeta([\phi]) = [\bar{\phi}]$; правая часть не зависит от выбора элемента ϕ , представляющего $[\phi]$, или от $c: \Gamma \rightarrow \Pi$.

ЛЕММА 3.4. *Имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)^{\Gamma} & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}}) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \\ H^2(\Gamma, Z(G)) & \xrightarrow{\nu_2} & H^2(\Pi, Z(G)) \end{array}.$$

Отсюда следует, что образ ζ содержится в

$$\mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})' := \mu^{-1}(\text{im } \nu_2) = \bigsqcup_{[m] \in \nu_2(H^2(\Gamma, Z(G)))} \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[\phi] \in \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^G$, $[\bar{\phi}] \in \mathcal{M}(\Pi, G_{\text{ad}})$ и пусть отображение $g: \Pi \rightarrow G$ задано, как прежде, а r определяется соотношением (3.4). Тогда $[r] = \lambda([\phi])$. С другой стороны, отображение $\psi: \Pi \rightarrow G$, определяющееся равенством $\psi(a) = g(a)\phi(c(\bar{a})^{-1}a)$, $a \in \Pi$, является поднятием гомоморфизма $\bar{\phi}$. Тогда из рассуждений на втором шаге доказательства первого пункта теоремы 2.1 следует, что $\psi \in \text{Hom}_{\nu_2(r)}(\Pi, G)$. Поэтому $\mu([\bar{\phi}]) = \nu_2([r])$. Лемма доказана.

Покажем, что ζ – накрывающее отображение при ограничении на подходящее плотное подпространство. Напомним, что $\text{Hom}^\circ(\tilde{H}, G)$ – подмножество в $\text{Hom}(\tilde{H}, G)$, которое отображает на $\text{Hom}^\circ(\tilde{H}, G_{\text{ad}})$, а $\mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G) = \text{Hom}^\circ(\tilde{H}, G)/G$ – подмножество в $\mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)$, сохраняющееся при действии группы Γ . Поэтому $\mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^\Gamma$ представляет собой несвязное объединение, аналогичное (3.2).

С другой стороны, $\text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$ – подмножество в $\text{Hom}(\Pi, G_{\text{ad}})$, которое ограничивается на $\text{Hom}^\circ(\tilde{\Pi}, G_{\text{ad}})$, и

$$\mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}}) = \text{Hom}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})/G_{\text{ad}} \subset \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})$$

есть несвязное объединение, аналогичное (2.5). Пусть

$$\mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})' := \mu^{-1}(\text{im } \nu_2) \cap \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}}) = \bigsqcup_{[m] \in \nu_2(H^2(\Gamma, Z(G)))} \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Ограничение (все еще обозначенное) $\zeta: \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^\Gamma \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})'$ есть главное расслоение с абелевой структурной группой $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$. Следовательно:

1) при каждом $[m] \in \nu_2(H^2(\Gamma, Z(G)))$ ограничение

$$\zeta^{[m]}: \bigsqcup_{[r] \in \nu_2^{-1}([m])} \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)_{[r]}^\Gamma \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})_{[m]}$$

отображения ζ есть главное расслоение со структурной группой $\text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$;

2) при каждом $[r] \in H^2(\Gamma, Z(G))$ ограничение

$$\zeta_{[r]}: \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)_{[r]}^\Gamma \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})_{\nu_2([r])}$$

отображения ζ представляет собой главное расслоение со структурной группой $\ker(\delta) \subset \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отображение ζ может быть ограничено до $\zeta: \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^\Gamma \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})'$.

ШАГ 1. Покажем, что отображение ζ сюръективно. Предположим, что $[\bar{\phi}] \in \mathcal{M}^\circ(\Pi, G_{\text{ad}})_{\nu_2([r])}$, где потребуем, чтобы $r \in Z_{\text{nor}}^2(\Gamma, Z(G))$. Пусть $\phi: \Pi \rightarrow G$ – поднятие $\bar{\phi}: \Pi \rightarrow G_{\text{ad}}$. Поправляя элемент ϕ путем умножения элементов из группы $Z(G)$, добьемся, чтобы ϕ удовлетворял соотношению (2.3) с $m = \nu_2(r)$. Тогда $\tilde{\phi} := \phi|_{\tilde{\Pi}} \in \text{Hom}^\circ(\tilde{\Pi}, G)$ и ζ отображает $[\tilde{\phi}] \in \mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^\Gamma$ на $[\bar{\phi}]$.

ШАГ 2. Воспользуемся теми же рассуждениями, что и на втором этапе при доказательстве первого пункта теоремы 2.1, получим, что действие $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))^\Gamma$ на $\mathcal{M}^\circ(\tilde{H}, G)^\Gamma$ в следствии 3.1 является свободным.

ШАГ 3. Так как ζ инвариантно при действии группы $H^1(\Gamma, Z(G))^{\Gamma}$, эта группа действует на $\zeta^{-1}([\bar{\phi}])$ для всех $[\bar{\phi}] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G_{\text{ad}})'$. Покажем, что это действие транзитивно. Предположим, что ζ отображает $[\phi], [\phi'] \in \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)^{\Gamma}$ в $[\bar{\phi}] = [\bar{\phi}']$. Тогда найдется элемент $h \in G$ или $\tilde{h} \in G_{\text{ad}}$ такой, что $\bar{\phi}' = \text{Ad}_{\tilde{h}} \circ \bar{\phi}$. Следовательно, существует такой $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))$, что $\phi' = \sigma_s(\text{Ad}_h \circ \phi)$. Поскольку $[\phi], [\phi']$ представляют собой Γ -инварианты, существуют отображения $g, g': \Gamma \rightarrow G$ такие, что для всех $\gamma \in \Gamma$ имеем

$$\phi \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g(\gamma)}^{-1} \circ \phi, \quad \phi' \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \text{Ad}_{g'(\gamma)}^{-1} \circ \phi'.$$

Следовательно, для всех $\gamma \in \Gamma$

$$\sigma_s(\text{Ad}_{g'(\gamma)^{-1}h} \circ \phi) = \text{Ad}_{g'(\gamma)}^{-1} \circ \phi' = (\sigma_s(\text{Ad}_h \circ \phi)) \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1} = \sigma_{s \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1}}(\text{Ad}_{hg(\gamma)^{-1}} \circ \phi)$$

как отображения из $\tilde{\Pi}$ в G . Вычисляя композицию с фактор-отображением $G \rightarrow G_{\text{ad}}$ с учетом того, что стабилизирующее множество отображения $\bar{\phi}: \tilde{\Pi} \rightarrow G_{\text{ad}}$ есть $Z(G)$, получим, что два элемента $g'(\gamma)^{-1}h$ и $hg(\gamma)^{-1}$ могут отличаться только на $Z(G)$. Следовательно, $s = s \circ \text{Ad}_{c(\gamma)}^{-1}$, и поэтому $s \in \text{Hom}(\tilde{\Pi}, Z(G))^{\Gamma}$. Теорема доказана.

Объединяя несколько теорем, приведенных выше, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_r^{\circ}(\tilde{\Pi}, G) & \xrightarrow{\eta_{\nu_2(r)}} & \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)_{[r]}^{\Gamma} \\ & \searrow \xi_{\nu_2(r)} \quad \swarrow \zeta_{[r]} & \\ & \mathcal{M}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G_{\text{ad}})_{\nu_2([r])} & \end{array},$$

где $r \in Z_{\text{nos}}^2(\Gamma, Z(G))$ и $\mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G) := \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G) \cap \mathcal{M}_{\nu_2(r)}^{\circ}(\tilde{\Pi}, G)$. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна. Поскольку $\eta_{\nu_2(r)}$ – регулярное накрытие со структурной группой $H^1(\Gamma, Z(G))$ (см. теорему 3.1) и поскольку $\xi_{\nu_2(r)}$ – главное расслоение со структурной группой $H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))$ (см. теорему 2.1), $\zeta_{[r]}$ является главным расслоением со структурной группой $\text{soker}(\nu_1) = H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))/H^1(\Gamma, Z(G))$. Сравнение с теоремой 3.2 приводит к соотношению $\text{soker}(\nu_1) \cong \ker(\delta)$. Этот изоморфизм представляет собой часть длинной точной последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\Gamma, Z(G)) &\xrightarrow{\nu_1} H^1(\tilde{\Pi}, Z(G)) \xrightarrow{\iota_1} H^1(\tilde{\Pi}, Z(G))^{\Gamma} \xrightarrow{\delta} \\ &\xrightarrow{\delta} H^2(\Gamma, Z(G)) \xrightarrow{\nu_2} H^2(\tilde{\Pi}, Z(G)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

которая, в свою очередь, является следствием спектральной последовательности Линдона–Хохшильда–Серра (ЛХС) когомологий групп [31], [32], связанной с точной последовательностью (3.1). Изоморфизм $\ker \nu_2 \cong \text{im } \delta$ был объяснен выше в другой части соотношения (3.6).

Если $\Pi = \pi_1(X)$ и $\tilde{\Pi} = \pi_1(\tilde{X})$, где X – компактная неориентируемая поверхность, а $\tilde{X}$ – ее ориентируемое двукратное накрытие, то $\delta = 0$, и при этом ν_2 является изоморфизмом между группами $H^2(\Gamma, Z(G))$ и $H^2(\tilde{\Pi}, Z(G))$, причем обе эти группы имеют структуру $Z(G)/2Z(G)$. Поскольку X – классифицирующее пространство для Π , получаем еще один изоморфизм $H^2(X, Z(G)) \cong H^2(\Pi, Z(G))$. Поэтому из второй части теоремы 3.2 (которая в данном случае совпадает с первой частью теоремы 3.2) восстанавливаются результаты § 5 работы [4] и предложения 3.10 в [10]

(в которых многообразия характеров ограничивались на часть, неприводимую относительно присоединенного действия).

В дополнение структурная группа накрытия $\zeta_{[r]}$ имеет вид

$$H^1(\tilde{P}, Z(G))^{\mathbb{Z}_2} \cong \text{Hom}(H_1(X), Z(G)) / \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, Z(G)).$$

В общем случае ни одно из этих утверждений относительно δ или ν_2 не остается справедливым даже для ориентируемого двукратного накрытия. Выберем $\tilde{X} = S^n \times S^1$ и $X = S^n \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$, где нетривиальный элемент из $\mathbb{Z}_2$ действует на $\tilde{X}$ как диагональное антиподальное отображение. При четном $n \geq 2$ многообразие X неориентируемо, а $\tilde{X}$ есть ориентируемое двукратное накрытие многообразия X . Поскольку $\Pi \cong \mathbb{Z}$, $\tilde{\Pi} \cong \mathbb{Z}$ и отображение $\tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$ действует как умножение на два, длинная точная последовательность (3.6) сводится к

$$0 \rightarrow \{z \in Z(G) : z^2 = e\} \xrightarrow{\nu_1} Z(G) \xrightarrow{\times 2} Z(G) \xrightarrow{\delta} Z(G)/2Z(G) \xrightarrow{\nu_2} 0,$$

где ν_1 – отображение включения, δ – фактор-отображение и $\nu_2 = 0$. Изоморфизм $H^2(\Pi, Z(G)) \cong H^2(M, Z(G))$ также теряется в этом примере. Поскольку $H^2(\Pi, Z(G)) = 0$ для всех $n \geq 2$, получим, что $H^2(M, Z(G)) = 0$ при $n > 2$, но $H^2(M, Z(G)) = \{z \in Z(G) : z^2 = e\}$ при $n = 2$. Этот пример будет исследован более детально с применением спектральной последовательности ЛХС в последующих публикациях.

3.4. Геометрическая интерпретация. Рассмотрим регулярное накрытие

$$p: \tilde{X} \rightarrow X$$

со структурной группой Γ . Выберем базисные точки $x_0 \in X$ и $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$. Тогда фундаментальная группа $\Pi := \pi_1(X, x_0)$ содержит

$$\tilde{\Pi} := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

как нормальную подгруппу, и существует точная последовательность (3.1). Будем использовать соглашение, что Γ действует на $\tilde{X}$ слева как накрывающее преобразование.

Пусть G – связная компактная или комплексная редуктивная группа Ли и пусть $Q \rightarrow \tilde{X}$ – главное G -расслоение. При заданном 2-коцикле $r \in Z^2(\Gamma, Z(G))$ r -твистованное поднятие действия группы Γ на $\tilde{X}$ определяется как правило, которое ставит в соответствие каждому $\gamma \in \Gamma$ изоморфизм расслоений T_γ на множестве Q с помощью такого поднятия действия γ на $\tilde{X}$, что для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ выполняется условие композиции

$$T_{\gamma_1} \circ T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1 \gamma_2} \circ r(\gamma_1, \gamma_2), \quad (3.7)$$

в котором $r(\gamma_1, \gamma_2) \in Z(G)$ как элемент структурной группы G действует на Q справа. Как и в п. 2.3, определим эквивалентность r -твистованных поднятий с помощью изоморфизма расслоений.

С другой стороны, можно построить пучок $Z(G)$ -расслоений $(L^r, \tilde{X})$, называемый накрывающим пучком расслоений [19]. При этом $L^r = \tilde{X}^{[2]} \times Z(G)$ представляет собой произведение $Z(G)$ -расслоения, а мультипликативная структура для всех $(y_1, y_2, y_3) \in \tilde{X}^{[3]}$ такова:

$$u_{(y_1, y_2, y_3)} : L^r_{(y_1, y_2)} \otimes L^r_{(y_2, y_3)} \rightarrow L^r_{(y_1, y_3)}, \quad z_1 \otimes z_2 \mapsto z_1 z_2 r(\gamma_1, \gamma_2),$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi$ определяются с помощью операций $\gamma_1 \cdot y_2 = y_1$, $\gamma_2 \cdot y_3 = y_2$. Тривиальная связность на L определяет плоскую связность на $(L^r, \tilde{X})$. Аналогично п. 2.3 главные G -расслоения, твистованные с помощью пучка $(L^r, \tilde{X})$ (классы эквивалентности), соответствуют r -твистованным поднятиям действия группы Γ (классам эквивалентности). Плоская связность на G -расслоении $Q \rightarrow \tilde{X}$, инвариантная относительно r -твистованного поднятия, задает плоскую связность твистованного G -расслоения.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для каждого 2-коцикла $r \in Z^2(\Gamma, Z(G))$ имеется взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизмов плоских главных G -расслоений на X , твистованных с помощью пучка $(L^r, \tilde{X})$, и классами G -сопряжений в $\text{Hom}_{\nu_2(r)}(\Pi, G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главное G -расслоение Q , твистованное с помощью $(Y, \tilde{X})$, задает r -твистованное поднятие T действия группы Γ на $Q \rightarrow \tilde{X}$. Пусть $\hat{X}$ – универсальное накрытие многообразия X . Выберем базовую точку $\hat{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{x}_0) \subset \hat{X}$. Тогда группа Π действует свободно на $\hat{X}$ и $\tilde{p}: \hat{X} \rightarrow \tilde{X} = \hat{X}/\tilde{\Pi}$ – универсальное накрытие. Для произвольного $a \in \Pi$ обозначим через ε_a путь в $\hat{X}$ из точки $\hat{x}_0$ в точку $a \cdot \hat{x}_0$. Тогда $\tilde{p} \circ \varepsilon_a$ есть путь в $\tilde{X}$ из точки $\tilde{x}_0$ в точку $\tilde{a} \cdot \tilde{x}_0$. Поскольку Q – плоская связность, голономия $U_a := \text{Hol}_{\tilde{p} \circ \varepsilon_a}: Q_{\tilde{x}_0} \rightarrow Q_{\tilde{a} \cdot \tilde{x}_0}$ зависит только от $a \in \Pi$ и не зависит от выбора ε_a . Как U_a , так и $T_{\tilde{a}}: Q_{\tilde{x}_0} \rightarrow Q_{\tilde{a} \cdot \tilde{x}_0}$ коммутируют с правым действием группы G , что также остается справедливым для $T_{\tilde{a}}^{-1} \circ U_a: Q_{\tilde{x}_0} \rightarrow Q_{\tilde{x}_0}$.

Зафиксируем элемент $q_0 \in Q_{\tilde{x}_0}$ и определим отображение $\phi: \Pi \rightarrow G$ соотношением $(T_{\tilde{a}}^{-1} \circ U_a)q_0 = q_0\phi(a)^{-1}$. Если $a_1, a_2 \in \Pi$, то $a_1 \cdot \varepsilon_{a_2}$ представляет собой путь в $\hat{X}$ из точки $a_1 \cdot \hat{x}_0$ в точку $a_1 \cdot (a_2 \cdot \hat{x}_0) = (a_1 a_2) \cdot \hat{x}_0$. С помощью отображения $\tilde{p}$ этот путь сводится к пути $\tilde{a}_1 \cdot (\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_2})$ в $\tilde{X}$ из точки $\tilde{a}_1 \cdot \tilde{x}_0$ в точку $(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2) \cdot \tilde{x}_0$. Поскольку поднятие T действия группы Γ сохраняет плоскую связность, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q_{\tilde{x}_0} & \xrightarrow{U_{a_2} = \text{Hol}_{\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_2}}} & Q_{\tilde{a}_2 \cdot \tilde{x}_0} \\ \downarrow T_{\tilde{a}_1} & & \downarrow T_{\tilde{a}_1} \\ Q_{\tilde{a}_1 \cdot \tilde{x}_0} & \xrightarrow{\text{Hol}_{\tilde{a}_1 \cdot (\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_2})}} & Q_{(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2) \cdot \tilde{x}_0} \end{array}$$

является коммутативной. Композиция $\varepsilon_{a_1} * (a_1 \cdot \varepsilon_{a_2})$ представляет собой путь в многообразии $\hat{X}$ из точки $\hat{x}_0$ в точку $(a_1 a_2) \cdot \hat{x}_0$, и с помощью отображения $\tilde{p}$ он приводится к пути $(\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_1}) * (\tilde{a}_1 \cdot (\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_2}))$ в $\tilde{X}$ из точки $\tilde{x}_0$ в точку $(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2) \cdot \tilde{x}_0$. Отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} T_{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}^{-1} \circ U_{a_1 a_2} &= (T_{\tilde{a}_1} \circ T_{\tilde{a}_2} \circ r(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)^{-1})^{-1} \circ \text{Hol}_{\tilde{a}_1 \cdot (\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_2})} \circ \text{Hol}_{\tilde{p} \circ \varepsilon_{a_1}} = \\ &= T_{\tilde{a}_2}^{-1} \circ U_{a_2} \circ T_{\tilde{a}_1}^{-1} \circ U_{a_1} \circ r(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), \end{aligned}$$

где было использовано равенство (3.7). Применяя это тождество к q_0 , получим

$$\begin{aligned} q_0\phi(a_1 a_2)^{-1} &= (T_{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}^{-1} \circ U_{a_1 a_2})q_0 = \\ &= (T_{\tilde{a}_2}^{-1} \circ U_{a_2} \circ T_{\tilde{a}_1}^{-1} \circ U_{a_1})q_0 r(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = q_0\phi(a_2)^{-1}\phi(a_1)^{-1}r(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2). \end{aligned}$$

Тем самым ϕ удовлетворяет соотношению (2.3) и является $\nu_2(r)$ -гомоморфизмом. Если выбрать другой элемент $\hat{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{x}_0)$ или другой $q_0 \in Q_{\tilde{x}_0}$, то получающийся гомоморфизм ϕ будет отличаться на сопряженное действие группы G .

Обратно, при выбранном $\phi \in \text{Hom}_{\nu_2(r)}(\Pi, G)$ построим плоское главное G -расслоение над X , твистованное с помощью $(L^r, \tilde{X})$. Для простоты будем предполагать, что $r(\gamma, \bar{e}) = r(\bar{e}, \gamma) = e$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда ограничение $\phi|_{\tilde{\Pi}}$ является правильным гомоморфизмом. Рассмотрим произведение расслоений $\tilde{X} \times G$, снабженное тривиальной связностью. Тогда имеется (правильное) свободное действие группы $\tilde{\Pi}$ на $\tilde{X} \times G$, имеющее структуру изоморфизмов расслоений, задаваемых $\gamma: (\hat{x}, g) \mapsto (a \cdot \hat{x}, \phi(a)g)$, где $a \in \tilde{\Pi}$, $\hat{x} \in \tilde{X}$ и $g \in G$. Поэтому $Q := (\tilde{X} \times G)/\tilde{\Pi}$ – главное G -расслоение над $\tilde{X}$.

Обозначим через $[(\hat{x}, g)] \in Q$ фактор $(\hat{x}, g) \in \tilde{X} \times G$. Поскольку действие группы $\tilde{\Pi}$ на $\tilde{X} \times G$ сохраняет тривиальную связность, на Q имеется плоская G -связность. Выберем $c: \Gamma \rightarrow \Pi$ так, что $c(\bar{e}) = e$. Тогда отображение $\tilde{c}$, заданное формулой (3.3), удовлетворяет условию $\tilde{c}(\gamma, \bar{e}) = \tilde{c}(\bar{e}, \gamma) = e$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Определим поднятие T_γ действия $\gamma \in \Gamma$ на $\tilde{X}$ формулой

$$T_\gamma[(\hat{x}, g)] = [(c(\gamma) \cdot \hat{x}, \phi(c(\gamma))g)].$$

Проверим, что T_γ корректно определено. Во-первых, для всех $a \in \Pi$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} [(c(\gamma) \cdot (a \cdot \hat{x}), \phi(c(\gamma))\phi(a)g)] &= [(\text{Ad}_{c(\gamma)} a \cdot (c(\gamma) \cdot \hat{x}), \phi(\text{Ad}_{c(\gamma)} a)\phi(c(\gamma))g)] = \\ &= [(c(\gamma) \cdot \hat{x}, \phi(c(\gamma))g)], \end{aligned}$$

поскольку $\text{Ad}_{c(\gamma)} a \in \tilde{\Pi}$. Во-вторых, если взять другой элемент $c': \Gamma \rightarrow \Pi$, то получим

$$\begin{aligned} [(c'(\gamma) \cdot \hat{x}, \phi(c'(\gamma))g)] &= [((c'(\gamma)c(\gamma)^{-1}) \cdot (c(\gamma) \cdot \hat{x}), \phi(c'(\gamma)c(\gamma)^{-1})\phi(c(\gamma))g)] = \\ &= [(c(\gamma) \cdot \hat{x}, \phi(c(\gamma))g)], \end{aligned}$$

поскольку $c'(\gamma)c(\gamma)^{-1} \in \tilde{\Pi}$. Очевидно, T_γ есть изоморфизм расслоений из Q , сохраняющий плоскую связность.

Покажем теперь, что T представляет собой r -твистованное поднятие. Для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, поскольку $\text{Ad}_{c(\gamma_1\gamma_2)} \tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2) \in \tilde{\Pi}$, имеем

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1} T_{\gamma_2}[(\hat{x}, g)] &= [((c(\gamma_1)c(\gamma_2)) \cdot \hat{x}, \phi(c(\gamma_1))\phi(c(\gamma_2))g)] = \\ &= [(c(\gamma_1\gamma_2)\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2)) \cdot \hat{x}, \phi(c(\gamma_1\gamma_2)\tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))g]r(\gamma_1, \gamma_2) = \\ &= [(\text{Ad}_{c(\gamma_1\gamma_2)} \tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2) \cdot (c(\gamma_1\gamma_2) \cdot \hat{x}), \phi(\text{Ad}_{c(\gamma_1\gamma_2)} \tilde{c}(\gamma_1, \gamma_2))\phi(c(\gamma_1\gamma_2))g)]r(\gamma_1, \gamma_2) = \\ &= T_{\gamma_1\gamma_2}[(\hat{x}, g)]r(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Отображение T задает главное G -расслоение над X , твистованное пучком $(L^r, \tilde{X})$. Если элементы ϕ и ϕ' различаются на сопряженное действие, то получаемые на их основе твистованные G -расслоения оказываются изоморфными друг другу. Теорема доказана.

Теорема 3.3 дает геометрическую интерпретацию наших результатов на (твистованных) многообразиях характеров. Во-первых, плоское G -расслоение Q , твистованное пучком расслоений $(L^r, \tilde{X})$, можно рассматривать как плоское G -расслоение над $\tilde{X}$, допускающее действие группы Γ . Это наблюдение придает смысл отображению $\eta_{\nu_2(r)}$ из теоремы 3.1. Во-вторых, Q индуцирует плоское G_{ad} -расслоение

$\bar{Q} \rightarrow X$ с помощью конструкции, описанной в приложении. Это объясняет природу отображения $\zeta_{[r]}$ из второй части теоремы 3.2.

Когда Q представляет собой обрамляющее расслоение для модуля плоских пучков расслоений, построение гомоморфизма ϕ с помощью голономий Q (см. первый шаг доказательства теоремы 3.3) также было описано в работе [19]. Когда $\tilde{X} \rightarrow X$ является двукратным накрытием или $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ теорема 3.3 становится эквивалентной предложению 4.1 из работы [10]. В указанной работе элемент $z \in Z(G)$ определял 2-коцикл в $Z_{\text{пор}}^2(\Gamma, Z(G)) \cong Z(G)$, а τ_Q , удовлетворяющее условию $\tau_Q^2 = z$ на плоском расслоении $Q \rightarrow \tilde{X}$, представляло собой z -твистованное поднятие накрывающего отображения на $\tilde{X}$. Поэтому предложение 4.1 в [10] содержит классы изоморфизмов плоских G -расслоений, твистованных элементами пучка $(L^z, \tilde{X})$.

С другой стороны, вследствие рассуждений на втором шаге доказательства первого пункта теоремы 3.1, данные в предложении 4.1 из работы [10] задают класс G -сопряжений твистованных гомоморфизмов из $\text{Hom}_{\nu_2(z)}(\Pi, G)$. Поэтому теорема 3.3 в случае $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ оказывается более внутренне согласованной версией утверждения, содержащегося в предложении 4.1 из работы [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пучки расслоений и твистованные главные расслоения

Пусть X – связное многообразие, а Z – абелева группа Ли, которая не обязательно связна, и в нашем приложении Z является центром некоторой группы Ли. Следуя работе [14], будем называть пару (L, Y) *пучком Z -расслоений* над X , если $p: Y \rightarrow X$ есть отображение погружения, а L – главное Z -расслоение над произведением расслоений $Y^{[2]} := Y \times_X Y$, удовлетворяющее нижеприведенному условию коцикла. Отметим, что при всех $(y_1, y_2) \in Y^{[2]}$ слой $L_{(y_1, y_2)}$ представляется правым Z -торсором, а тензорное произведение двух правых Z -торсоров также является правым Z -торсором. Условие коцикла состоит в существовании изоморфизма $u_{(y_1, y_2, y_3)}: L_{(y_1, y_2)} \otimes L_{(y_2, y_3)} \rightarrow L_{(y_1, y_3)}$ (или $u_{(y_1, y_2, y_3)} = u$ в сокращенной форме записи) правых Z -торсоров, гладко зависящих от $(y_1, y_2, y_3) \in Y^{[3]}$, такого, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_{(y_1, y_2)} \otimes L_{(y_2, y_3)} \otimes L_{(y_3, y_4)} & \xrightarrow{u \otimes 1} & L_{(y_1, y_3)} \otimes L_{(y_3, y_4)} \\ \downarrow 1 \otimes u & & \downarrow u \\ L_{(y_1, y_2)} \otimes L_{(y_2, y_4)} & \xrightarrow{u} & L_{(y_1, y_4)} \end{array} \quad (\text{П.1})$$

коммутативна для всех $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y^{[4]}$. В глобальном смысле отображение $u: p_{12}^* L \otimes p_{23}^* L \rightarrow p_{13}^* L$, где $p_{ij}: Y^{[3]} \rightarrow Y^{[2]}$ – проекции $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_i, y_j)$ (здесь $1 \leq i < j \leq 3$), является изоморфизмом главных Z -расслоений таким, что диаграмма (П.1) коммутативна.

Пучок Z -расслоений (L, Y) имеет *дуальный* пучок $(L, Y)^{-1} := (L^{-1}, Y)$, где L^{-1} – дуальное главное Z -расслоение для L над $Y^{[2]}$. Если и (L, Y) , и (L', Y') суть пучки Z -расслоений над X , то их *тензорное произведение* имеет вид

$$(L, Y) \otimes (L', Y') := (\hat{L} \otimes \hat{L}', Y \times_X Y'),$$

где $\hat{L}$ и $\hat{L}'$ – соответственно поднятия (pull-back) расслоений L и L' на $Y \times_X Y'$. Два пучка Z -расслоений (L, Y) и (L', Y') считаются *изоморфными*, если два погружения

$Y, Y' \rightarrow X$ можно отождествить с помощью диффеоморфизма $Y \rightarrow Y'$, который поднимается до изоморфизма Z -расслоений из $L \rightarrow Y^{[2]}$ в $L' \rightarrow Y'^{[2]}$ и сохраняет соответствующие мультипликативные структуры u, u' . Пучок Z -расслоений (L, Y) считается тривиальным, если существует главное Z -расслоение $P \rightarrow Y$ такое, что $(L, Y) \cong (p_1^* P^{-1} \otimes p_2^* P, Y)$, где $p_1, p_2: Y^{[2]} \rightarrow Y$ – проекции соответственно первой и второй копий многообразия Y . В этом случае P называется *тривиализацией* пучка (L, Y) . Два пучка Z -расслоений (L, Y) и (L', Y') называются *стабильно изоморфными*, если существуют тривиальные пучки Z -расслоений T и T' над X такие, что $(L, Y) \otimes T$ и $(L', Y') \otimes T'$ взаимно изоморфны пучкам Z -расслоений.

Пучок Z -расслоений обладает классом Диксмера–Дуади в $H^2(X, \underline{Z})$, где $\underline{Z}$ – пучок гладких отображений из X в Z . Записав $Z = \mathfrak{z}/\ell \times D$, где $\mathfrak{z}$ – алгебра Ли группы Z , ℓ – дискретная подгруппа в $\mathfrak{z}$, а D – конечная абелева группа, получим, что $H^2(X, \underline{Z}) \cong H^3(X, \ell) \oplus H^2(X, D)$, и указанный класс допускает аналогичное разложение. Класс Диксмера–Дуади равен нулю тогда и только тогда, когда пучок расслоений тривиален [14]. Два пучка Z -расслоений (L, Y) и (L', Y') имеют один и тот же класс Диксмера–Дуади тогда и только тогда, когда они стабильно изоморфны, а это происходит, в свою очередь, тогда и только тогда, когда $(L, Y)^{-1} \otimes (L', Y')$ тривиально [28].

Связность на пучке расслоений (L, Y) – это связность главного Z -расслоения $L \rightarrow Y$, согласованная с изоморфизмом u , и дополнительно необходимо выбрать *искривление* $B \in \Omega^2(Y, \mathfrak{z})$ такое, что $p_2^* B - p_1^* B$ совпадает с кривизной многообразия L . *Кривизна* многообразия (L, Y) задается замкнутой 3-формой $H \in \Omega^3(X, \mathfrak{z})$ такой, что $dB = p^* H$. Часть класса Диксмера–Дуади, лежащая в $H^3(X, \ell)$, отображается в класс когомологий де Рама в $H^3(X, \mathfrak{z})$, представляемый H . Когда связность на L является плоской, можно выбрать $B = 0$ (или взять поднятие (pull-back) замкнутой формы на X [19]). В этом случае можно утверждать, что связность на (L, Y) или сам пучок (L, Y) плоские. Плоский пучок Z -расслоений задает класс в $H^2(X, Z)$, который отображается в класс Диксмера–Дуади с помощью естественного отображения $H^2(X, Z) \rightarrow H^2(X, \underline{Z})$.

Пусть теперь G – связная компактная или комплексная редуктивная группа Ли, а $Z = Z(G)$ – ее центр. На основе определений модулей пучков расслоений [17], твистованных (векторных) расслоений [15], [16], [33] и твистованных главных расслоений [18] (когда Y представляет собой несвязное объединение открытых множеств в X), определим *главное G -расслоение, твистованное пучком $Z(G)$ -расслоений (L, Y) над X* как главное G -расслоение $Q \rightarrow Y$, снабженное изоморфизмами G -торсоров $v_{(y_1, y_2)}: L_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{y_2} \rightarrow Q_{y_1}$ (или, кратко, $v_{(y_1, y_2)} = v$), гладко зависящих от $(y_1, y_2) \in Y^{[2]}$ и таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_{(y_1, y_2)} \otimes L_{(y_2, y_3)} \otimes Q_{y_3} & \xrightarrow{1 \otimes v} & L_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{y_2} \\ \downarrow u \otimes 1 & & \downarrow v \\ L_{(y_1, y_3)} \otimes Q_{y_3} & \xrightarrow{v} & Q_{y_1} \end{array} \quad (\text{П.2})$$

коммутативна для всех $(y_1, y_2, y_3) \in Y^{[3]}$. Здесь тензорное произведение $L_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{y_2}$ правого $Z(G)$ -торсора $L_{(y_1, y_2)}$ и правого G -торсора Q_{y_2} является правым G -торсором. Глобально существует изоморфизм главных G -расслоений $v: L \otimes p_2^* Q \rightarrow p_1^* Q$ такой, что диаграмма (П.2) коммутативна. Если пучок (L, Y) тривиален и $Z(G)$ -

расслоение $P \rightarrow Y$ есть тривиализация, то $Q \otimes P \rightarrow Y$ сводится к правильному главному G -расслоению над X . В общем случае, если $Q \rightarrow Y$ – главное G -расслоение, твистованное пучком (L, Y) , и существует представление группы G на векторном пространстве V , то связанное с ним векторное расслоение $Q \times_G V \rightarrow Y$ есть модуль пучка расслоений в смысле работы [17]. Если $Z(G)$ действует на V тривиально, то ассоциированный модуль пучка расслоений есть правильное векторное расслоение над X . Обратно, если $E \rightarrow Y$ – модуль пучка расслоений (L, Y) , то обрамляющее расслоение E есть главное расслоение, твистованное с помощью пучка (L, Y) .

Пусть дано главное G -расслоение Q , твистованное с помощью (L, Y) . Рассмотрим главное G_{ad} -расслоение $Q_{\text{ad}} := Q/Z(G)$ над Y . Для всех $(y_1, y_2) \in Y^{[2]}$, поскольку $L_{(y_1, y_2)}$ представляет собой $Z(G)$ -торсор, существует естественный изоморфизм G_{ad} -торсоров, имеющий вид $(L_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{y_2})/Z(G) \cong (Q_{\text{ad}})_{y_2}$. Поэтому v индуцирует отображение $\bar{v}: (Q_{\text{ad}})_{y_2} \rightarrow (Q_{\text{ad}})_{y_1}$ G_{ad} -торсоров, а из коммутативной диаграммы (П.2) следует, что совокупность $\bar{v}$ (для всех $(y_1, y_2) \in Y^{[2]}$) образует множество данных спуска [34] для Q_{ad} . Поэтому Q_{ad} спускается до G_{ad} -расслоения $\bar{Q}$ над X такого, что $Q_{\text{ad}} = p^* \bar{Q}$ как G_{ad} -расслоения.

Связность на главном G -расслоении Q , твистованном пучком (L, Y) , есть связность на главном G -расслоении $Q \rightarrow Y$, совместимом со связностью на L с помощью изоморфизма v . Ее кривизна лежит в $\Omega^2(Y, \text{ad } Q) = \Omega^2(Y, \mathfrak{z}) \oplus \Omega^2(Y, \text{ad}(Q_{\text{ad}}))$. Часть $\Omega^2(Y, \text{ad}(Q_{\text{ad}}))$ можно опустить на X , и там она становится кривизной индуцированной связности на $\bar{Q}$. Если (L, Y) – пучок плоских $Z(G)$ -расслоений, то кривизна расслоения Q полностью опускается на X . Связность на твистованном G -расслоении Q называется *плоской*, если она является таковой как связность G -расслоения над Y . В этом случае индуцированная связность на $\bar{Q}$ также плоская.

Поднимающий пучок расслоений [14] $\bar{Q}$ есть пучок $Z(G)$ -расслоений $(J, \bar{Q})$ такой, что над $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in \bar{Q}^{[2]}$ его слой имеет вид $J_{(\bar{q}_1, \bar{q}_2)} = \{g \in G : \bar{q}_2 = \bar{q}_1 g\}$. Изоморфизм

$$J_{(\bar{q}_1, \bar{q}_2)} \otimes J_{(\bar{q}_2, \bar{q}_3)} \rightarrow J_{(\bar{q}_1, \bar{q}_3)}$$

$Z(G)$ -торсоров для $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) \in \bar{Q}^{[3]}$ задается как умножение в G . Поднимающий пучок расслоений $(J, \bar{Q})$ тривиален тогда и только тогда, когда $\bar{Q} \rightarrow X$ допускает поднятие до главного G -расслоения над X . С другой стороны, если пучок (L, Y) тривиален с тривиализацией $P \rightarrow Y$, то $Q \otimes P$ опускается на X и становится поднятием пучка $\bar{Q}$. Фактически пучок $(J, \bar{Q})$ стабильно изоморфен пучку (L, Y) [17], [19], так как $Y \times_X \bar{Q} = Q_{\text{ad}}$ и $Z(G)$ -расслоение $Q \rightarrow Q_{\text{ad}}$ представляет собой тривиализацию произведения $(L, Y)^{-1} \otimes (J, \bar{Q})$. Оказывается, что эти два пучка расслоений имеют один и тот же класс Диксмера–Дуади.

Благодарности. Автор глубоко признателен Н.-К. Хо и Г. Вилкину за сотрудничество при написании работы [10] и ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, *Ann. Math.*, **82**:3 (1965), 540–567.
- [2] M. F. Atiyah, R. Bott, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **308**:1505 (1983), 523–615.
- [3] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **141**:1 (1991), 153–209.
- [4] N.-К. Хо, *Int. Math. Res. Notices*, **2004**:61 (2004), 3263–3285, arXiv:math.SG/0312426.
- [5] N.-К. Хо, C.-C. M. Liu, *Int. Math. Res. Notices*, **2003**:44 (2003), 2359–2371, arXiv:math.SG/0303255.

- [6] N.-K. Ho, C.-C.M. Liu, *Commun. Anal. Geom.*, **16**:3 (2008), 617–679, arXiv: math.SG/0605587.
- [7] N.-K. Ho, C.-C.M. Liu, D. A. Ramras, *Commun. Anal. Geom.*, **17**:5 (2009), 903–953, arXiv: 0810.4882.
- [8] T. J. Baird, *Q. J. Math.*, **61**:2 (2010), 141–170, arXiv: 0806.1975.
- [9] F. Schaffhauser, *Geom. Dedicata*, **151** (2011), 187–206, arXiv: 0912.0659.
- [10] N.-K. Ho, G. Wilkin, S. Wu, *Hitchin's equations on a nonorientable manifold*, arXiv: 1211.0746.
- [11] T. Hausel, F. Rodriguez-Villegas, *Invent. Math.*, **174**:3 (2008), 555–624, arXiv: math.AG/0612668.
- [12] M. A. A. de Cataldo, T. Hausel, L. Migliorini, *Ann. Math.*, **175**:3 (2012), 1329–1407, arXiv: 1004.1420.
- [13] M. Mulase, “Geometry of character varieties of surface groups”, *Geometry Related to the Theory of Integrable Systems*, RIMS Kôkyûroku, **1605**, ed. R. Miyaoka, RIMS, Kyoto, 2008, 1–21, arXiv: 0710.5263.
- [14] M. K. Murray, *J. London Math. Soc.*, **54**:2 (1996), 403–416, arXiv: dg-ga/9407015.
- [15] A. Kapustin, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **4**:1 (2000), 127–154, arXiv: hep-th/9909089.
- [16] P. Bouwknegt, V. Mathai, *JHEP*, **03** (2000), 007, 11 pp., arXiv: hep-th/0002023.
- [17] P. Bouwknegt, A. L. Carey, V. Mathai, M. K. Murray, D. Stevenson, *Commun. Math. Phys.*, **228**:1 (2002), 17–49, arXiv: hep-th/0106194.
- [18] M. Mackaay, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, **44**:1 (2003), 39–62, arXiv: math/0106019.
- [19] U. Pennig, *J. K-Theory*, **14**:1 (2014), 47–71, arXiv: 1108.3701.
- [20] D. Johnson, J. J. Millson, “Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds”, *Discrete Groups in Geometry and Analysis*, Progress in Mathematics, **67**, ed. R. Howe, Birkhäuser, Boston, MA, 1987, 48–106.
- [21] R. W. Richardson, *Duke Math. J.*, **57**:1 (1988), 1–35.
- [22] A. S. Sikora, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:10 (2012), 5173–5208, arXiv: 0902.2589.
- [23] M. Culler, *Adv. Math.*, **59**:1 (1986), 64–70.
- [24] W. M. Goldman, J. J. Millson, *Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math.*, **67** (1988), 43–96.
- [25] S. Lawton, D. Ramras, *New York J. Math.*, **21** (2015), 383–416, arXiv: 1402.0781.
- [26] W. M. Goldman, *Invent. Math.*, **93**:3 (1988), 557–607.
- [27] S. Boyer, X. Zhang, *Ann. Math.*, **148**:3 (1998), 737–801, arXiv: math/9811182.
- [28] M. K. Murray, D. Stevenson, *J. London Math. Soc.*, **62**:3 (2000), 925–937, arXiv: math/9908135.
- [29] A. Clifford, *Ann. Math.*, **38**:3 (1937), 533–550.
- [30] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. II, III, Мир, М., 1972.
- [31] R. C. Lyndon, *Duke Math. J.*, **15**:1 (1948), 271–292.
- [32] G. Hochschild, J.-P. Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 110–134.
- [33] E. Lupercio, B. Uribe, *Commun. Math. Phys.*, **245**:3 (2004), 449–489, arXiv: math/0105039.
- [34] J.-L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Progress in Mathematics, **107**, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.