Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дякин, О. В. Кудряшова, В. Я. Раевский, Один подход к решению основного уравнения магнитостатики для случая неоднородных магнетиков, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 88–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 06:06:22

© 2016 г. В. В. Дякин*, О. В. Кудряшова*[†], В. Я. Раевский*

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕОДНОРОДНЫХ МАГНЕТИКОВ

Предлагается общий подход к решению основного уравнения магнитостатики в случае неоднородных магнитных тел, когда их магнитная проницаемость зависит от координат. Поиск напряженности результирующего поля сводится к определению двух скалярных функций из системы, содержащей интегральное и дифференциальное уравнения для этих функций с определенными граничными условиями. С помощью этого подхода получено аналитическое решение магнитостатического уравнения для шара с модельной магнитной проницаемостью в произвольном внешнем поле.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение магнитостатики, сферические функции, разложение Вейля.

DOI: 10.4213/tmf8956

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих практических задач из области магнетизма (например, задач неразрушающего магнитного контроля) актуальной является проблема создания обоснованных алгоритмов аналитического или численного решения задач магнитостатики применительно к однородным или неоднородным магнитным телам различной формы с возможными инородными включениями. Для решения подобных задач мы исходим из так называемого основного уравнения магнитостатики (см., например, книгу [1]):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus S. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 15-17-2-54).

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия.
E-mail: ovu@imp.uran.ru, ravskii@mail.ru

[†]Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия. E-mail: kudryaschova.olga.valeryevna@yandex.ru

Это уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла для случая магнитостатики и связывает искомую напряженность результирующего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), H_z(\mathbf{r})\}$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (не лежащей на границе магнетика) с заданным полем $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{H_x^0(\mathbf{r}), H_y^0(\mathbf{r}), H_z^0(\mathbf{r})\}$ внешнего источника. В данном уравнении Ω есть область в пространстве $\mathbb{R}^3$, ограниченная поверхностью S и занятая исследуемым магнетиком с заданной магнитной проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$, зависящей в общем случае от координат (неоднородный магнетик). Уравнение (1.1) справедливо для модели, в которой намагниченность магнетика $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ связана с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ соотношением $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = (\mu(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Это соотношение является важным частным случаем общего материального уравнения классической магнитостатики и широко используется в задачах магнитного неразрушающего контроля изделий из технических сталей с мелкодисперсной структурой. В пользу адекватности указанной модели в задачах магнитного неразрушающего контроля говорит и тот факт, что внешнее поле, в которое помещается изделие, является стационарным (перемагничивания нет), а потому явление гистерезиса отсутствует.

Для определения из уравнения (1.1) напряженности результирующего поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ как внутри магнетика (в этом случае обозначим напряженность $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$), так и вне его (обозначим напряженность $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$) поступают следующим образом. Сначала в соотношении (1.1) полагают, что $\mathbf{r} \in \Omega$, и получают уравнение для поля $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ внутри магнетика:

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) - \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (1.2)$$

После решения этого уравнения относительно $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ в соотношении (1.1) полагают $\mathbf{r} \notin \Omega$, откуда вытекает, что формула для вычисления результирующего поля $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$ вне магнетика имеет вид

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \nabla \operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \notin \Omega. \quad (1.3)$$

Поэтому основной проблемой является создание эффективных аналитических или численных методов решения уравнения (1.2). Доказано (см., например, [2]–[6]), что уравнение (1.2), рассматриваемое в вещественном гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ вектор-функций $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ с (конечной) нормой $\|\mathbf{M}\|^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{M}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ и скалярным произведением $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \int_{\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, имеет единственное решение для ограниченных и неограниченных областей Ω .

Ранее для задач неразрушающего магнитного контроля изделий были разработаны разнообразные методы аналитического и численного решения уравнения (1.2) для ограниченных и неограниченных магнетиков с внутренними полостями (дефектами) различной формы (см., например, [7]–[11]). Успешность решения этих задач во многом определялась тем обстоятельством, что магнитная проницаемость магнетика $\mu(\mathbf{r})$ предполагалась постоянной (или кусочно-постоянной), что значительно облегчало поиск решения уравнения (1.2), поскольку ограничивало этот поиск гармоническими векторными полями. В настоящей работе предлагается подход к решению уравнения (1.2) для случая изотропных, но неоднородных магнетиков, когда их магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{r})$ является произвольной функцией от координат.

Поиск напряженности результирующего поля $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ сводится к определению двух скалярных функций из системы, содержащей интегральное и обыкновенное дифференциальное уравнения с определенными граничными условиями. В качестве важной иллюстрации предлагаемого подхода получены аналитические формулы для напряженности результирующего поля $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ внутри и $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$ вне шарового магнетика с модельной (зависящей от координат) магнитной проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$ в произвольном внешнем поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В дальнейшем нам понадобится так называемое разложение Вейля пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на ортогональную сумму трех подпространств [12]:

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{U}(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega) \oplus \mathbf{J}(\Omega), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{U}(\Omega)$ – подпространство градиентов гармонических в Ω функций из соболевского пространства $H^1(\Omega)$, $\mathbf{G}(\Omega)$ – подпространство градиентов функций из $H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на границе S области Ω , а $\mathbf{J}(\Omega)$ – замыкание в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ линейного многообразия гладких соленоидальных в Ω вектор-функций с нулевой нормальной составляющей на границе S :

$$\mathbf{U}(\Omega) = \{\nabla\eta: \Delta\eta(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega, \eta \in H^1(\Omega)\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{G}(\Omega) = \{\nabla\psi: \psi \in H^1(\Omega), \psi|_S = 0\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J}(\Omega) = \overline{\{\mathbf{P}: \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega, P_n|_S = 0\}}. \quad (2.4)$$

Вернемся к уравнению (1.2). Его правая часть $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ представляет собой напряженность известного внешнего поля, созданного сторонними источниками тока. Поскольку предполагается, что область этих токов не пересекается с областью магнетика Ω , согласно системе уравнений Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = 0$ в Ω , а потому $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ есть бесконечно гладкое гармоническое поле в Ω , которое имеет вид

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \nabla\eta^0(\mathbf{r}), \quad \Delta\eta^0(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2.5)$$

Докажем прежде всего, что если достаточно гладкая функция $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ является решением уравнения (1.2), она необходимо удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}[\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}^i(\mathbf{r})] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2.6)$$

Для доказательства первого соотношения достаточно применить операцию rot к обеим частям (1.2) и учесть (2.5). Для доказательства второго соотношения в (2.6) введем вспомогательную функцию

$$W(\mathbf{r}) := -\operatorname{div} \int_{\Omega} \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.7)$$

которую (после внесения операции div под знак интеграла и интегрирования по частям) можно представить в виде

$$W(\mathbf{r}) = \int_S \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)H_{n'}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div}[(\mu(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')] }{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.8)$$

где нижний индекс n' означает переход к нормальной составляющей по внешней нормали в текущей точке интегрирования $\mathbf{r}'$. Учитывая свойства потенциала простого слоя и объемного потенциала, из (2.8) имеем

$$\Delta W(\mathbf{r}) = \operatorname{div}[(\mu(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r})], \quad \mathbf{r} \in \Omega.$$

Записывая уравнение (1.2) в виде

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \nabla W(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

и вычисляя дивергенцию от обеих частей, с учетом (2.5) и приведенного выше выражения для $\Delta W(\mathbf{r})$ получим второе соотношение в (2.6). Отметим, что это соотношение является отражением известного физического свойства – соленоидальности индукции магнитного поля, но здесь важно то, что оно является необходимым свойством решения уравнения (1.2).

Из первого соотношения в (2.6) следует, что в представлении решения $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ уравнения (1.2) в виде суммы трех функций в соответствии с разложением Вейля (2.1) обращается в нуль последнее слагаемое, соответствующее проекции $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ на подпространство $\mathbf{J}(\Omega)$. Таким образом, решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \nabla \eta(\mathbf{r}) + \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

причем

$$\psi|_S = 0, \quad \Delta \eta(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2.11)$$

Поэтому будем искать решение уравнения (1.2) в виде (2.10) с условием (2.11) и получим уравнения для определения скалярных функций ψ и η .

При подстановке (2.10) в первое соотношение в (2.6) с учетом (2.11) легко получить следующую связь искомых функций ψ и η :

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) + (\nabla \psi(\mathbf{r}) + \nabla \eta(\mathbf{r})) \cdot \nabla \ln \mu(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega. \quad (2.12)$$

Далее преобразуем выражения в числителях под интегралами в (2.8) с учетом (2.10). В поверхностном интеграле имеем

$$(\mu(\mathbf{r}) - 1)H_n^i(\mathbf{r}) = (\mu(\mathbf{r}) - 1) \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \eta(\mathbf{r})}{\partial n} \right),$$

в объемном интеграле с учетом второго соотношения в (2.6) имеем

$$\operatorname{div}[(\mu(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{H}^i(\mathbf{r})] = -\operatorname{div} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = -\Delta \psi(\mathbf{r}).$$

Подставляя полученные выражения в (2.8), придем к формуле

$$W(\mathbf{r}) = \int_S \frac{(\mu(\mathbf{r}') - 1)(\partial \psi(\mathbf{r}')/\partial n' + \partial \eta(\mathbf{r}')/\partial n')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \int_\Omega \frac{\Delta \psi(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.13)$$

Учитывая основную интегральную формулу Грина (см., например, книги [13], [14]), представим $\psi(\mathbf{r})$ для $\mathbf{r} \in \Omega$ в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_S \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{r}')/\partial n'}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' - \int_\Omega \frac{\Delta \psi(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.14)$$

Учитывая (2.11), выразим объемный интеграл из (2.14) и подставим его в (2.13), после чего имеем

$$W(\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r}) + \int_S \frac{\mu(\mathbf{r}')\partial\psi(\mathbf{r}')/\partial n' + (\mu(\mathbf{r}') - 1)\partial\eta(\mathbf{r}')/\partial n'}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.15)$$

Подставляя $W(\mathbf{r})$ из (2.15) в (2.9), с учетом (2.5) и (2.10) окончательно запишем соотношение, связывающее искомые функции ψ и η :

$$\nabla\eta(\mathbf{r}) + \nabla \int_S \frac{\mu(\mathbf{r}')\partial\psi(\mathbf{r}')/\partial n' + (\mu(\mathbf{r}') - 1)\partial\eta(\mathbf{r}')/\partial n'}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \nabla\eta^0(\mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Таким образом, учитывая выражения (2.10)–(2.12) и (2.16), получим следующую компактную схему предлагаемого подхода для поиска решения $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ уравнения (1.2) в случае зависимости магнитной проницаемости от координат: для $r \in \Omega$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) &= \nabla\eta(\mathbf{r}) + \nabla\psi(\mathbf{r}), \\ \nabla\eta(\mathbf{r}) + \nabla \int_S \frac{\mu(\mathbf{r}')\partial\psi(\mathbf{r}')/\partial n' + (\mu(\mathbf{r}') - 1)\partial\eta(\mathbf{r}')/\partial n'}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' &= \nabla\eta^0(\mathbf{r}), \\ \Delta\psi(\mathbf{r}) + (\nabla\psi(\mathbf{r}) + \nabla\eta(\mathbf{r})) \cdot \nabla \ln \mu(\mathbf{r}) &= 0, \quad \psi(\mathbf{r})|_S = 0, \quad \Delta\eta(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. СЛУЧАЙ ШАРОВОЙ ФОРМЫ МАГНЕТИКА

В качестве важного примера применим указанный подход (2.17) для решения уравнения (1.2) в случае, когда область магнетика Ω является шаром произвольного радиуса r_0 . Начало декартовой системы координат выберем в центре этого шара, внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ по-прежнему считаем произвольным, а на магнитную проницаемость наложим пока единственное требование сферической симметричности: $\mu(\mathbf{r}) = \mu(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$. В дальнейшем мы часто переходим от декартовой к сферической системе координат по известным формулам $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, поэтому для компактности введем следующее обозначение: $F(\mathbf{r})|_{\text{sph}}$ означает выражение, получающееся после перехода в выражении $F(\mathbf{r})$ от декартовых координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ к сферическим (r, θ, φ) . Для определения напряженности результирующего поля в описанной ситуации будем искать функции $\psi(\mathbf{r})$ и $\eta(\mathbf{r})$ из условий (2.17), точнее, вид этих функций после перехода к сферической системе координат:

$$\psi(r, \theta, \varphi) := \psi(\mathbf{r})|_{\text{sph}}, \quad \eta(r, \theta, \varphi) := \eta(\mathbf{r})|_{\text{sph}}. \quad (3.1)$$

Далее нами используется система сферических функций $\{Y_{lm}(\theta, \varphi)\}$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$, которая (при некоторых разночтениях в литературе) здесь определяется формулами (см., например, [15]):

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad m \geq 0, \\ P_l^m(t) &= (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(t)}{dt^m} \quad (\text{присоединенные полиномы Лежандра}), \\ P_l(t) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l \quad (\text{полиномы Лежандра}), \\ Y_{l,-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m Y_{lm}(\theta, -\varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad m > 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где звездочка в верхнем индексе означает переход к комплексному сопряжению. В дальнейшем нам понадобится базисное свойство системы $\{Y_{lm}(\theta, \varphi)\}$ в пространстве квадратично-суммируемых на единичной сфере функций, их ортонормированность,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad \delta_{nk} := \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \quad (3.3)$$

а также известное разложение (см., например, [15]) вида

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\text{sph}} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'), \quad (3.4)$$

где $r_< = \min(r', r)$, $r_> = \max(r', r)$.

Функция $\eta^0(\mathbf{r})$ в (2.5) является гармонической в Ω и ограниченной в начале координат известной функцией, а потому функцию $\eta^0(r, \theta, \varphi) := \eta^0(\mathbf{r})|_{\text{sph}}$ можно представить в виде

$$\eta^0(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \eta_{lm}^0 r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.5)$$

где коэффициенты разложения $\{\eta_{lm}^0\}$ считаются известными. Внешнее суммирование в (3.5) начато с $l = 1$, а не с $l = 0$, поскольку слагаемое, соответствующее $l = 0$, является константой и его можно опустить, так как $\eta^0(\mathbf{r})$ в (2.5) определяется соотношением $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \nabla \eta^0(\mathbf{r})$ с точностью до аддитивной постоянной. Поскольку функция $\eta(\mathbf{r})$ в (2.17) также является гармонической в Ω и конечной в начале координат, искомая функция $\eta(r, \theta, \varphi)$ в (3.1) представляется в виде ряда

$$\eta(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \eta_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.6)$$

Отметим, что, поскольку в выражение для поля $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ в (2.17) функция $\eta(\mathbf{r})$ входит под знаком градиента, ее можно определить с точностью до аддитивной произвольной постоянной. Поэтому значение η_{00} в (3.6) может быть произвольным. Для определенности будем считать $\eta_{00} = 0$.

Аналогично, из указанного выше базисного свойства сферических функций выведем, что при каждом фиксированном r искомая функция $\psi(r, \theta, \varphi)$ в (3.1) представляется в виде разложения по системе сферических функций с коэффициентами $\{\psi_{lm}(r)\}$, зависящими от r :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.7)$$

причем из условия $\psi(\mathbf{r})|_S = 0$ в (2.17) следует, что для функций $\{\psi_{lm}(r)\}$ должно выполняться соотношение

$$\psi_{lm}(r_0) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad (3.8)$$

Таким образом, для поиска функций $\psi(r, \theta, \varphi)$ и $\eta(r, \theta, \varphi)$ достаточно в представлениях (3.6) и (3.7) найти наборы чисел $\{\eta_{lm}\}$ и функций $\{\psi_{lm}(r)\}$, для которых выполняется условие (3.8).

Зафиксируем во втором уравнении (2.17) вектор $\mathbf{r} \in \Omega$ и умножим (скалярно) обе части уравнения на вектор $\mathbf{n} := \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, получим выражение

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial \eta^0(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad (3.9)$$

где для удобства введена функция

$$V(\mathbf{r}) := \int_S \frac{\mu(\mathbf{r}') \partial \psi(\mathbf{r}') / \partial n' + (\mu(\mathbf{r}') - 1) \partial \eta(\mathbf{r}') / \partial n'}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (3.10)$$

Переходя в (3.9) к сферической системе координат, учтем, что в данном случае $\partial/\partial n$ переходит в $\partial/\partial r$:

$$\frac{\partial \eta(r, \theta, \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \eta^0(r, \theta, \varphi)}{\partial r}, \quad (3.11)$$

где $V(r, \theta, \varphi) := V(\mathbf{r})|_{\text{sph}}$. Найдём выражение для $V(r, \theta, \varphi)$, переходя в формуле (3.10) к сферической системе координат и используя представления (3.6), (3.7) и разложение (3.4):

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \varphi) = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\mu^0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi'_{lm}(r_0) Y_{lm}(\theta', \varphi') + \right. \\ & \left. + (\mu^0 - 1) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l \eta_{lm} r_0^{l-1} Y_{lm}(\theta', \varphi') \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right) r_0^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi', \end{aligned}$$

где $\mu^0 = \mu(r_0)$ – постоянное значение магнитной проницаемости на границе S области Ω . Учитывая ортонормированность сферических функций (3.3), имеем

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l-1}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.12)$$

где

$$q_{lm} := \mu^0 \psi'_{lm}(r_0) + l(\mu^0 - 1) \eta_{lm} r_0^{l-1}. \quad (3.13)$$

Вычисляя в выражениях (3.5), (3.6) и (3.12) производные по r от $\eta^0(r, \theta, \varphi)$, $\eta(r, \theta, \varphi)$, $V(r, \theta, \varphi)$ соответственно и подставляя их в (3.11), придём к следующему соотношению:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l \left(\eta_{lm} + \frac{q_{lm}}{(2l+1)r_0^{l-1}} \right) r^{l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l \eta_{lm}^0 r^{l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Учитывая базисное свойство системы сферических функций и равенство (3.13), получим выражение

$$(l\mu^0 + l + 1) \eta_{lm} + \frac{\mu^0}{r_0^{l-1}} \psi'_{lm}(r_0) = (2l + 1) \eta_{lm}^0, \quad l = 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l. \quad (3.14)$$

Именно такие ограничения налагает уравнение во второй строке системы (2.17) на искомые наборы чисел $\{\eta_{lm}\}$ и функций $\{\psi_{lm}(r)\}$.

Рассмотрим теперь уравнение в третьей строке (2.17), в котором также перейдем к сферическим координатам. Применяя выражение

$$\Delta\psi(\mathbf{r})|_{\text{sph}} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right)$$

для оператора Лапласа в сферической системе координат к представлению (3.7) и учитывая, что сферические функции удовлетворяют известному соотношению (см., например, книгу [16])

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

выпишем равенство

$$\Delta\psi(\mathbf{r})|_{\text{sph}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l r^{-2} (r^2 \psi''_{lm}(r) + 2r \psi'_{lm}(r) - l(l+1) \psi_{lm}(r)) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.15)$$

Далее, учитывая представление градиента в сферической системе координат

$$\nabla U(\mathbf{r})|_{\text{sph}} = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (3.16)$$

и вводя для краткости обозначение $f(r) := \ln \mu(r)$, выведем следующее равенство: $\nabla \ln \mu(\mathbf{r})|_{\text{sph}} = f'(r) \mathbf{e}_r$. Поскольку оно содержит только компоненту $\mathbf{e}_r$, а в уравнение третьей строки системы (2.17) входит скалярное произведение, в выражениях $\nabla \psi(\mathbf{r})|_{\text{sph}}$ и $\nabla \eta(r)|_{\text{sph}}$ нам важны только компоненты $\mathbf{e}_r$. Применяя (3.16) к представлениям (3.6) и (3.7), получим

$$\begin{aligned} \nabla \eta(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l \eta_{lm} r^{l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + \dots, \\ \nabla \psi(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi'_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + \dots \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в уравнение третьей строки системы (2.17), запишем это уравнение в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ r^{-2} (r^2 \psi''_{lm}(r) + 2r \psi'_{lm}(r) - l(l+1) \psi_{lm}(r)) + \\ + (\psi'_{lm}(r) + l \eta_{lm} r^{l-1}) f'(r) \} Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая базисное свойство системы сферических функций, заключаем, что числа $\{\eta_{lm}\}$ и функции $\{\psi_{lm}(r)\}$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$r^2 \psi''_{lm}(r) + r(r f'(r) + 2) \psi'_{lm}(r) - l(l+1) \psi_{lm}(r) = -l \eta_{lm} r^{l+1} f'(r). \quad (3.17)$$

При $l = 0$ (следовательно, $m = 0$) уравнение (3.17) принимает вид

$$r^2 \psi''_{00}(r) + r(rf'(r) + 2)\psi'_{00}(r) = 0.$$

Легко показать, что решение этого уравнения, ограниченное в нуле, необходимо имеет вид $\psi_{00}(r) = \text{const}$. Из начального условия (3.8) тогда следует, что $\psi_{00}(r) = 0$.

Подводя итог вышесказанному, получим, что для решения уравнения (1.2) с помощью схемы (2.17) функции $\eta(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ представляются в виде разложений (3.6) и (3.7), в которых коэффициенты $\{\eta_{lm}\}$ и $\{\psi_{lm}(r)\}$ являются решением следующей системы:

$$\begin{aligned} r^2 \psi''_{lm}(r) + r(rf'(r) + 2)\psi'_{lm}(r) - l(l+1)\psi_{lm}(r) &= -l\eta_{lm}r^{l+1}f'(r), \\ (l\mu^0 + l + 1)\eta_{lm} + \frac{\mu^0}{r_0^{l-1}}\psi'_{lm}(r_0) &= (2l+1)\eta_{lm}^0, \\ \psi_{lm}(r_0) &= 0, \quad \psi_{00}(r) = 0, \quad \eta_{00} = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $l = 1, 2, \dots, m = -l, -l+1, \dots, l$. Отметим, что условия в последней строке (3.18) позволяют начинать внешнее суммирование в (3.6) и (3.7) с $l = 1$.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Найти аналитическое решение дифференциального уравнения в (3.18) для произвольной функции $f(r)$, по всей видимости, нельзя. Поэтому для дальнейшего продвижения по пути поиска аналитических решений мы конкретизируем модель магнитной проницаемости, оставив внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ по-прежнему произвольным. Положим $\mu(r) = c_0 e^{\alpha r}$, где $c_0 > 0$ и α – произвольные параметры. Подобного вида модель может соответствовать магнитной проницаемости шарового изделия (например, шарика как элемента шарикоподшипника), подвергнутого поверхностной закалке или наклепу (равномерному обжатию). Тогда $f(r) := \ln \mu(r) = \ln c_0 + \alpha r$, а потому дифференциальное уравнение в первой строке (3.18) имеет вид

$$r^2 \psi''_{lm}(r) + r(\alpha r + 2)\psi'_{lm}(r) - l(l+1)\psi_{lm}(r) = -l\alpha\eta_{lm}r^{l+1}. \quad (4.1)$$

Это уравнение является линейным уравнением второго порядка. Для определения его общего решения найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$r^2 \psi''_{lm}(r) + r(\alpha r + 2)\psi'_{lm}(r) - l(l+1)\psi_{lm}(r) = 0. \quad (4.2)$$

Совершая в нем замену, будем искать функцию $y(r)$ такую, что $\psi(r) = r^l y(r)$ есть решение уравнения (4.2). После подстановки функции $\psi(r)$ такого вида в (4.2) и некоторых преобразований получим уравнение $[ry'(r) + (\alpha lr + 2l + 1)y(r)]' = 0$, откуда следует уравнение $ry'(r) + (\alpha lr + 2l + 1)y(r) = A$, где A – произвольная постоянная. Последнее уравнение есть линейное уравнение первого порядка. Решая его по стандартной схеме, нетрудно найти общее решение:

$$y(r) = \frac{A}{(\alpha lr)^{2l+1}} \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{(2l)!}{(2l-k)!} (\alpha lr)^{2l-k} + \frac{C}{e^{\alpha lr} r^{2l+1}}, \quad (4.3)$$

где C – произвольная постоянная. Учитывая, что $\psi(r) = r^l y(r)$ и меняя для удобства порядок суммирования в первом слагаемом (4.3), получим общее решение однородного уравнения (4.2):

$$\psi_{lm}(r) = \frac{A(2l)!}{(\alpha l)^{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!} + \frac{C e^{-\alpha l r}}{r^{l+1}}. \quad (4.4)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что функция $-\eta_{lm} r^l$ является частным решением неоднородного уравнения (4.1). Поэтому, учитывая (4.4), выпишем общее решение уравнения (4.1):

$$\psi_{lm}(r) = \frac{A(2l)!}{(\alpha l)^{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!} + \frac{C e^{-\alpha l r}}{r^{l+1}} - \eta_{lm} r^l, \quad (4.5)$$

где A и C – произвольные постоянные.

По смыслу задачи нас интересуют только такие решения в (4.5), которые являются ограниченными в нуле (т.е. верно неравенство $\lim_{r \rightarrow 0+0} \psi_{lm}(r) < \infty$), что накладывает определенные условия на значения постоянных A и C . Действительно, если, используя разложение экспоненты в ряд Маклорена, записать (4.5) в виде

$$\psi_{lm}(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \left\{ \left(\frac{A(2l)!}{(\alpha l)^{2l+1}} + C \right) \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!} + C \sum_{k=2l+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!} \right\} - \eta_{lm} r^l,$$

легко видеть, что ограниченное в нуле решение возможно, только если выражение в больших круглых скобках обратится в нуль, т.е. при $A = -C(\alpha l)^{2l+1}/(2l)!$. Подставляя это выражение в (4.5), получим общий вид ограниченного в нуле решения уравнения (4.1):

$$\psi_{lm}(r) = C F_l(r) - \eta_{lm} r^l, \quad (4.6)$$

где C – произвольная постоянная, а

$$F_l(r) := \frac{1}{r^{l+1}} \left(e^{-\alpha l r} - \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!} \right) = \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{k=2l+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha l r)^k}{k!}. \quad (4.7)$$

Параметры C и η_{lm} в (4.6) легко определяются из двух условий во второй и третьей строках (3.18), после чего можно вывести следующие формулы для искомого набора чисел $\{\eta_{lm}\}$ и функций $\{\psi_{lm}(r)\}$:

$$\eta_{lm} = \frac{(2l+1)\eta_{lm}^0}{\mu^0 E_l + l + 1}, \quad (4.8)$$

$$\psi_{lm}(r) = \eta_{lm} r_0^l \frac{F_l(r)}{F_l(r_0)} - \eta_{lm} r^l, \quad (4.9)$$

где

$$E_l := \frac{r_0 F'_l(r_0)}{F_l(r_0)}, \quad \mu^0 := \mu(r_0) = c_0 e^{\alpha r_0}. \quad (4.10)$$

Согласно (2.17) искомое поле $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \nabla(\eta(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r}))$. С помощью соотношений (3.1), (3.6), (3.7), (4.8) и (4.9) найдем выражение для функции $\eta(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})$ в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} (\eta(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r}))|_{\text{sph}} &= \eta(r, \theta, \varphi) + \psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\eta_{lm} r^l + \psi_{lm}(r)) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \eta_{lm} r_0^l \frac{F_l(r)}{F_l(r_0)} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)r_0^l}{(\mu^0 E_l + l + 1)F_l(r_0)} F_l(r) Q_l(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

где

$$Q_l(\theta, \varphi) := \sum_{m=-l}^l \eta_{lm}^0 Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Подставляя выражение для E_l из (4.10), имеем

$$(\eta(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r}))|_{\text{sph}} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l F_l(r) Q_l(\theta, \varphi),$$

где

$$c_l := \frac{(2l+1)r_0^l}{\mu^0 r_0 F_l'(r_0) + (l+1)F_l(r_0)}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

В результате для описываемой ситуации запишем следующую формулу решения уравнения (1.2), полученную в рамках подхода (2.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) &= \nabla A(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ A(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=1}^{\infty} c_l F_l(r) Q_l(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где c_l , $F_l(r)$, $Q_l(\theta, \varphi)$ определены формулами (4.7), (4.11) и (4.12), $\mu^0 = c_0 e^{\alpha r_0}$, а числа $\{\eta_{lm}^0\}$ определены соотношениями (2.5) и (3.5). Вынося за скобки $F_l(r_0)$ в знаменателе формулы (4.12) и подставляя найденное выражение для c_l в (4.13), выпишем следующую формулу для результирующего поля внутри Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) &= \nabla A(\mathbf{r}), \quad r \in \Omega, \\ A(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)r_0^l}{\mu^0 E_l + l + 1} \frac{F_l(r)}{F_l(r_0)} Q_l(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отметим, что справедливость формулы (4.14) (в качестве решения уравнения (1.2)) проверена непосредственной подстановкой (4.14) в (1.2), однако соответствующие этой проверке выкладки слишком громоздки, а потому не приводятся. Поскольку, как отмечалось выше, решение уравнения (1.2) существует и единственно, выражение (4.14) и определяет это решение.

5. РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЕ ПОЛЕ ВНЕ МАГНЕТИКА И ПОЛЕ РЕАКЦИИ

После получения аналитической формулы (4.14) для напряженности поля $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ внутри шара Ω появилась возможность из соотношения (1.3) вывести аналогичную формулу для напряженности поля $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$ вне Ω при произвольном внешнем поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$. На основе выражения (2.7) формулу (1.3) можно записать в виде

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) - \nabla W(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \quad (5.1)$$

где для $W(\mathbf{r})$ остается в силе представление (2.8), но $\mathbf{r} \notin \Omega$, которое с учетом второго соотношения в (2.6) можно привести к виду

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \int_S \frac{(\mu^0 - 1)H_{n'}^i(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Подставляя в это выражение равенство $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \nabla A(\mathbf{r})$, согласно (4.14) имеем

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\Delta A(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + (\mu^0 - 1) \int_S \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (5.2)$$

Применяя основную формулу Грина (см., например, [14]), с учетом того, что $\mathbf{r} \notin \Omega$, найдем для первого слагаемого справа в (5.2) следующее представление:

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta A(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \int_S \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \int_S A(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Подставляя это выражение в (5.2), определим, что

$$W(\mathbf{r}) = \mu^0 \int_S \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \int_S A(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (5.3)$$

Найдем выражение для $W(\mathbf{r})$ в сферических координатах, переходя к ним в каждом слагаемом в правой части (5.3) по отдельности. Сначала перейдем к сферическим координатам в первом интеграле по $\mathbf{r}$, одновременно делая сферическую замену переменных в интеграле и используя выражение для $A(\mathbf{r})|_{\text{sph}}$ в (4.13) и разложение (3.4) с учетом (3.3):

$$\begin{aligned} & \left(\int_S \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} \cdot \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \Big|_{\text{sph}} = \\ & = r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} A(\mathbf{r}) \right) \Big|_{\text{sph}} \left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\text{sph}} \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ & = r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l F'_l(r_0) \eta_{lm}^0 Y_{lm}(\theta', \varphi') \times \\ & \quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ & = r_0^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{c_l}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} F'_l(r_0) \eta_{lm}^0 Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

С учетом (4.11) имеем

$$\left(\int_S \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \Big|_{\text{sph}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{2l+1} \frac{r_0^{l+2}}{r^{l+1}} F_l'(r_0) Q_l(\theta, \varphi). \quad (5.4)$$

Для преобразования второго интеграла в (5.3) сначала найдем с учетом (3.4), что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\text{sph}} &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{2l+1} \frac{r'^{l-1}}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \end{aligned}$$

Поэтому для второго интеграла в (5.3) с учетом (3.3) и (4.13) определим, что

$$\begin{aligned} \left(\int_S A(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \Big|_{\text{sph}} &= r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l F_l(r_0) \eta_{lm}^0 Y_{lm}(\theta', \varphi') \right) \times \\ &\times \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l}{2l+1} \frac{r_0^{l-1}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l c_l}{2l+1} F_l(r_0) \frac{r_0^{l+1}}{r^{l+1}} Q_l(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Подставляя этот интеграл и (5.4) в (5.3), выведем выражение для $W(\mathbf{r})$ в (5.1):

$$W(\mathbf{r}) \Big|_{\text{sph}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{2l+1} \frac{r_0^{l+1}}{r^{l+1}} (\mu^0 r_0 F_l'(r_0) - l F_l(r_0)) Q_l(\theta, \varphi).$$

Подставляя сюда выражение для c_l из (4.12) и поделив числитель и знаменатель получившейся под знаком суммы дроби на $F_l(r_0)$, имеем с учетом (4.10), что

$$W(\mathbf{r}) \Big|_{\text{sph}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mu^0 E_l - l) r_0^{2l+1}}{\mu^0 E_l + l + 1} \frac{1}{r^{l+1}} Q_l(\theta, \varphi). \quad (5.5)$$

Согласно (2.5), (3.5) и (4.11) внешнее поле можно представить в виде

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \nabla \eta^0(\mathbf{r}), \quad \eta^0(\mathbf{r}) \Big|_{\text{sph}} = \sum_{l=1}^{\infty} r^l Q_l(\theta, \varphi). \quad (5.6)$$

Тогда на основе (5.1) с учетом (5.5) и (5.6) запишем окончательную формулу для результирующего поля вне магнетика:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) &= \nabla B(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\ B(\mathbf{r}) \Big|_{\text{sph}} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(r^l - \frac{(\mu^0 E_l - l) r_0^{2l+1}}{\mu^0 E_l + l + 1} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Q_l(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $Q_l(\theta, \varphi)$, E_l и μ^0 определены в (4.10) и (4.11).

Еще одной проверкой правильности формул (4.14) и (5.7) является тот факт, что напряженности определяемых ими полей $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$ внутри и вне Ω удовлетворяют соотношению $H_n^e|_S = \mu^0 H_n^i|_S$, связывающему нормальные составляющие этих полей на границе магнетика S . Выполнение этого соотношения является одним из необходимых свойств решения общего уравнения (1.1) и отражает непрерывность нормальной составляющей магнитной индукции при переходе через границу магнетиков с разными магнитными проницаемостями.

При решении практических прямых и обратных задач магнитостатики важную роль играет (и может измеряться в эксперименте) напряженность $\mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ так называемого поля реакции, которая показывает величину возмущения напряженности магнитного поля внешних источников в пространстве при внесении в него магнетика. Данная напряженность определяется формулой

$$\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \quad (5.8)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^R(\mathbf{r}). \quad (5.9)$$

Сравнение формул (5.1) и (5.9) дает равенство $\mathbf{H}^R(\mathbf{r}) = -\nabla W(\mathbf{r})$, а потому с учетом (5.5) имеем следующую формулу для напряженности поля реакции:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^R(\mathbf{r}) &= \nabla D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\ D(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mu^0 E_l - l) r_0^{2l+1}}{\mu^0 E_l + l + 1} \frac{1}{r^{l+1}} Q_l(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Зависимость напряженностей внешнего результирующего поля $\mathbf{H}^e(\mathbf{r})$ и поля реакции $\mathbf{H}^R(\mathbf{r})$ от параметров c_0 и α магнитной проницаемости в формулах (5.7) и (5.10) содержится во фрагменте $\mu^0 E_l$ этих формул. Если воспользоваться формулами (4.10), определяющими μ^0 и E_l , после ряда преобразований придем к явной зависимости $\mu^0 E_l$ от параметров магнитной проницаемости:

$$\mu^0 E_l = -c_0 e^{\alpha r_0} \left(\alpha l r_0 + \frac{(\alpha l r_0)^{2l+1} / (2l)!}{e^{-\alpha l r_0} - \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k (\alpha l r_0)^k / k!} + l + 1 \right).$$

Эту формулу можно использовать не только для решения прямой задачи вычисления результирующего поля и поля реакции по формулам (5.7) и (5.10), но и для исследования обратной задачи – возможности восстановления параметров магнитной проницаемости по измеренному полю реакции или результирующему полю вне магнетика.

6. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ИЛИ ПОСТОЯННОГО ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся частные случаи выведенных выше формул напряженности результирующего поля внутри и вне шарового магнетика. Выбранная двухпараметрическая модель магнитной проницаемости $\mu(r) = c_0 e^{\alpha r}$ содержит в себе и случай (в качестве предельного при $\alpha \rightarrow 0$) постоянной магнитной проницаемости $\mu(r) = c_0$. Поэтому, перейдя к такому пределу в формулах (4.14),

(5.7) и (5.10), выпишем формулы для результирующих полей и поля реакции для случая постоянной магнитной проницаемости $\mu(r) = c_0$. Предварительно заметим, что из формулы (4.7) можно получить, что при $\alpha \rightarrow 0$

$$F_l(r) = -\frac{l^{2l+1}r^l}{(2l+1)!}\alpha^{2l+1} + O(\alpha^{2l+2}), \quad F'_l(r) = -\frac{l^{2l+2}r^{l-1}}{(2l+1)!}\alpha^{2l+1} + O(\alpha^{2l+2}),$$

а потому из (4.10) и (4.7) следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_l = l, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F_l(r)}{F_l(r_0)} = \frac{r^l}{r_0^l}. \quad (6.1)$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в (4.14), с учетом (6.1) имеем формулу для результирующего поля внутри шарового магнетика с постоянной магнитной проницаемостью $\mu(r) = c_0$, помещенного в произвольное внешнее поле $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) &= \nabla A(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ A(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{c_0 l + l + 1} r^l Q_l(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Аналогично, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в формулах (5.7) и (5.10), с учетом (6.1) получим формулы для поля реакции и результирующего поля вне шарового магнетика с постоянной магнитной проницаемостью $\mu(r) = c_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) &= \nabla B(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\ B(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(r^l - \frac{l(c_0 - 1)r_0^{2l+1}}{c_0 l + l + 1} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Q_l(\theta, \varphi), \\ \mathbf{H}^R(\mathbf{r}) &= \nabla D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\ D(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(c_0 - 1)r_0^{2l+1}}{c_0 l + l + 1} \frac{1}{r^{l+1}} Q_l(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай постоянного внешнего поля $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$, величину которого обозначим как $H_0 := |\mathbf{H}^0(\mathbf{r})|$. Если ось z направить вдоль этого поля, в этой системе координат $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \{0, 0, H_0\}$. Тогда в формуле (2.5) $\eta^0(\mathbf{r}) = H_0 z$, а потому

$$\eta^0(r, \theta, \varphi) := \eta^0(\mathbf{r})|_{\text{sph}} = H_0 r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} H_0 r Y_{10}(\theta, \varphi).$$

Из выражения (3.5) следует, что описанному случаю соответствует такой набор параметров: $\eta_{10}^0 = \sqrt{4\pi/3} H_0$, а остальные $\{\eta_{lm}^0\}$ равны нулю. Поэтому из формулы (4.11) выведем, что $Q_1(\theta, \varphi) = H_0 \cos \theta$, $Q_l(\theta, \varphi) = 0$, $l = 2, 3, \dots$. Подставляя эти выражения в формулы (4.14), (5.7) и (5.10), найдем формулы для напряженностей результирующих полей и поля реакции в случае постоянного внешнего магнитного

поля:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) &= \nabla A(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\
 A(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= \frac{3r_0 H_0}{(\mu^0 E_1 + 2)F_1(r_0)} F_1(r) \cos \theta, \\
 \mathbf{H}^e(\mathbf{r}) &= \nabla B(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\
 B(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= H_0 \left(r - \frac{(\mu^0 E_1 - 1)r_0^3}{\mu^0 E_1 + 2} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta, \\
 \mathbf{H}^R(\mathbf{r}) &= \nabla D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \Omega, \\
 D(\mathbf{r})|_{\text{sph}} &= -H_0 \frac{(\mu^0 E_1 - 1)r_0^3}{\mu^0 E_1 + 2} \frac{1}{r^2} \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

где μ^0 , E_1 и $F_1(r)$ определяются из формул (4.7), (4.10). Если в формуле (6.3) перейти к пределу $\alpha \rightarrow 0$ либо в формуле (6.2) положить $Q_1(\theta, \varphi) = H_0 \cos \theta$, $Q_l(\theta, \varphi) = 0$, $l = 2, 3, \dots$, придем к известной формуле $\mathbf{H}^i = (3/(c_0 + 2))\mathbf{H}^0$ для напряженности результирующего поля в шаре с постоянной магнитной проницаемостью $\mu = c_0$, помещенном в постоянное внешнее поле $\mathbf{H}^0$.

Список литературы

- [1] Н. А. Хижняк, *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики*, Научова думка, Киев, 1986.
- [2] В. Я. Раевский, *ТМФ*, **100**:3 (1994), 323–331.
- [3] M. J. Friedman, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**:1 (1980), 14–20.
- [4] С. Т. Толмачев, *Специальные методы решения задач магнитостатики*, Вища Школа, Киев, 1983.
- [5] В. Я. Раевский, *О свойствах квазиэрмитовых операторов и их применении к исследованию операторов теории потенциала и основного уравнения электро- и магнитостатики*, 24/48(01), Ин-т физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, 2001.
- [6] В. В. Дякин, О. В. Умергалина, *Дефектоскопия*, **39**:4 (2003), 52–66.
- [7] В. В. Дякин, В. Я. Раевский, О. В. Умергалина, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:1 (2009), 178–188.
- [8] В. В. Дякин, В. Я. Раевский, О. В. Кудряшова, *Дефектоскопия*, **45**:8 (2009), 16–30.
- [9] В. В. Дякин, О. В. Кудряшова, *Дефектоскопия*, **48**:11 (2010), 41–52.
- [10] В. В. Дякин, В. Я. Раевский, О. В. Кудряшова, *Дефектоскопия*, **45**:3 (2009), 67–79.
- [11] В. В. Дякин, В. Я. Раевский, О. В. Умергалина, *Дефектоскопия*, **44**:2 (2008), 36–49.
- [12] Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, *Тр. МИАН СССР*, **59**, 5–36.
- [13] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [14] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1977.
- [15] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Л., 1975.
- [16] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, М., 1970.

Поступила в редакцию 28.04.2015,
после доработки 2.07.2015