Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, Метод комплексного роста Маслова
для систем со связями второго рода, *ТМФ*, 2016, том 186,
номер 3, 423–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:50:06

© 2016 г.

О. Ю. Шведов*

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ВТОРОГО РОДА

Исследуется квазиклассическая механика систем со связями второго рода. Предполагается, что квантовая механика такой системы строится с помощью метода Баталина–Фрадкина–Тютинана, основанного на введении дополнительных координат и импульсов и превращении связей второго рода в связи первого рода. Также предполагается, что расширенная система проквантована методом алгебраического квантования. Квазиклассическое приближение строится с помощью теории комплексного ростка Маслова. Исследуются квазиклассические состояния для системы со связями второго рода, их скалярное произведение и действие квазиклассических наблюдаемых величин в первом порядке квазиклассического разложения. Рассмотрено преобразование квазиклассических состояний в ходе эволюции.

Ключевые слова: системы со связями, квазиклассическое приближение, комплексный росток Маслова, метод Баталина–Фрадкина–Тютинана.

DOI: 10.4213/tmf8957

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Квазиклассическое приближение является важным асимптотическим методом квантовой механики, позволяющим показать, что классическая механика в границах ее применимости не противоречит квантовой механике. Хотя такое соответствие между классической и квантовой механикой было получено еще Эренфестом (1927 г.) на основе анализа средних значений, для математически строгого обоснования более удобными оказались методы Маслова [1]–[3], основанные на непосредственной подстановке предполагаемой волновой функции в уравнение Шредингера.

Будем записывать уравнение эволюции для $\Psi^t(q) \equiv \Psi(t, q)$ в квантово-полевых обозначениях [4]:

$$i \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} H(\sqrt{\hbar} \hat{p}, \sqrt{\hbar} \hat{q}) \Psi^t; \quad (1.1)$$

здесь $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $\hat{p}_j = -i \partial / \partial q_j$, $\hat{q}_j = q_j$ и $[\hat{p}_j, \hat{q}_l] = -i \delta_{jl}$, а $\hbar$ – малый параметр квазиклассического разложения. Для определенности будем использовать вейлевское упорядочение операторов $\hat{q}_j$ и $\hat{p}_j$ [5].

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Один из типов квазиклассических решений возникает в теории комплексного ростка Маслова в точке

$$\Psi^t(q) = e^{(i/h)S^t} e^{(i/h)P^t(q\sqrt{h}-Q^t)} f^t\left(q - \frac{Q^t}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.2)$$

Функция (1.2) приближенно удовлетворяет уравнению (1.1), если $(P^t, Q^t) \in \mathbb{R}^{2n}$ – решение системы Гамильтона, а $S^t \in \mathbb{R}$ – действие на классической траектории. Функция $f^t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, задающая форму волнового пакета, удовлетворяет уравнению Шредингера с квадратичным гамильтонианом. Приближенное решение (1.2) имеет следующий физический смысл: оно соответствует классической системе, имеющей в момент времени t координаты Q^t и проекции импульса P^t , где $P^t, Q^t \in \mathbb{R}^n$. Неопределенности как координат, так и импульсов при этом малы.

Можно рассматривать суперпозиции решений (1.2) (здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$) [6]:

$$\Psi^t(q) = c^h \int d\alpha e^{(i/h)S^t(\alpha)} e^{(i/h)P^t(\alpha)(q\sqrt{h}-Q^t(\alpha))} f^t\left(q - \frac{Q^t(\alpha)}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.3)$$

В частности, волновая функция типа ВКБ также может рассматриваться как частный случай суперпозиции (1.3).

1.2. В моделях квантовой теории поля часто исследуются системы со связями первого и второго рода [7], [8]. Метод комплексного ростка Маслова был обобщен на системы со связями первого рода в работе [9]. В настоящей статье исследуются системы со связями второго рода.

Операторный способ построения квантовой механики системы со связями второго рода был предложен в работах Баталина, Фрадкина и Тютиня (БФТ) [10]–[12] (см. также работу [13]). Идея метода заключается во введении дополнительных степеней свободы: к $2n$ классическим переменным (P, Q) добавляются еще $2k$ переменных (Π, Φ) (где Φ – координаты, Π – импульсы), по числу связей. Вместо исходных связей второго рода $\Theta_a(P, Q)$, скобки Пуассона которых образуют невырожденную матрицу $\{\Theta_a, \Theta_b\}$, рассматривают расширенные связи $T_a(P, Q; \Pi, \Phi)$, скобки Пуассона которых равны нулю: $\{T_a, T_b\} = 0$. При этом выполняется граничное условие $T_a|_{\Pi=0, \Phi=0} = \Theta_a$. При квантовании расширенные связи заменяются на операторы, зависящие от малого параметра $\hbar$ как

$$\hat{T}_a = T_a(\hat{p}\sqrt{\hbar}, \hat{q}\sqrt{\hbar}, \hat{\pi}\sqrt{\hbar}, \hat{\phi}\sqrt{\hbar}).$$

Исходный гамильтониан системы $\mathcal{H}(P, Q)$ заменяется на расширенную функцию Гамильтона $H(P, Q; \Pi, \Phi)$, коммутирующую с расширенными связями, $\{H, T_a\} = 0$, и равную $\mathcal{H}$ при $\Pi = 0$, $\Phi = 0$. В квантовой теории расширенный гамильтониан является оператором, удовлетворяющим свойству $[\hat{H}, \hat{T}_a] = 0$. Аналогично рассматриваются и расширения других наблюдаемых величин. Предполагается, что зависимость от параметра разложения $\hbar$ имеет следующий вид:

$$\hat{A} = A(\hat{p}\sqrt{\hbar}, \hat{q}\sqrt{\hbar}, \hat{\pi}\sqrt{\hbar}, \hat{\phi}\sqrt{\hbar}). \quad (1.4)$$

К расширенной методом БФТ системе применимы все способы квантования систем со связями первого рода. Наиболее удобным для применения комплексного ростка Маслова оказался метод алгебраического квантования (refined algebraic

quantization) [9], основанный не на наложении дополнительных условий на волновые функции, а на модификации скалярного произведения. Применительно к рассматриваемой системе с абелевыми связями волновая функция $\Psi(q, \phi)$ зависит от $n + k$ координат, а вместо обычного скалярного произведения

$$(\Psi, \Psi) \equiv \int dq d\phi |\Psi|^2$$

рассматривается выражение вида

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \left(\Psi, \prod_a 2\pi \delta(\hat{T}_a) \Psi \right). \quad (1.5)$$

Далее мы полагаем две волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 эквивалентными, если их разность имеет нулевую норму:

$$\Psi_1 \sim \Psi_2 \iff \langle \Psi_1 - \Psi_2, \Psi_1 - \Psi_2 \rangle = 0.$$

Факторизуем пространство волновых функций по данному отношению эквивалентности и пополним соответствующее факторпространство.

В настоящей работе исследуются квазиклассические состояния (1.2) для системы со связями второго рода, их скалярное произведение и действие квазиклассических наблюдаемых величин в первом порядке квазиклассического разложения. Мы рассматриваем, как преобразуются квазиклассические состояния (1.2) и (1.3) в ходе эволюции.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Рассмотрим для системы со связями второго рода квазиклассическое состояние, аналогичное (1.2):

$$\Psi(q, \phi) = c^h e^{(i/h)S} e^{(i/h)P(q\sqrt{h}-Q)} f\left(q - \frac{Q}{\sqrt{h}}, \phi\right) \equiv e^{(i/h)S} (K_{P,Q}^h f)(q, \phi). \quad (2.1)$$

Подчеркнем, что классические значения дополнительных координат и импульсов выбираются равными нулю – в соотношение (2.1) входят только классические переменные (S, P, Q) , но не (Π, Φ) .

Рассмотрим оператор $\hat{A}$, зависящий от малого параметра $\hbar$ согласно выражению (1.4) с вейлевским упорядочением операторов умножения на аргумент и дифференцирования. Классическая функция $A(P, Q, \Pi, \Phi)$ называется символом оператора $\hat{A}$.

Применим наблюдаемую (1.4) к состоянию (2.1):

$$\hat{A} K_{P,Q}^h f = K_{P,Q}^h A\left(P - i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \xi}, Q + \sqrt{h} \xi, -i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \phi}, \sqrt{h} \phi\right) f.$$

Видно, что важную роль играет разложение по параметру $\sqrt{h}$ для операторов вида

$$\begin{aligned} A\left(P - i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \xi}, Q + \sqrt{h} \xi, -i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \phi}, \sqrt{h} \phi\right) = \\ = \exp\left\{-i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial P} + \sqrt{h} \xi \frac{\partial}{\partial Q} - i\sqrt{h} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \Pi} + \sqrt{h} \xi \frac{\partial}{\partial \Phi}\right\} A(P, Q, \Pi, \Phi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Используя обозначение [9], [14]

$$\Xi = -i \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial P} + \xi \frac{\partial}{\partial Q} - i \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \Pi} + \xi \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

упростим разложение оператора (2.2):

$$e^{\sqrt{\hbar}\Xi} A = A + \sqrt{\hbar}\Xi A + \frac{\hbar}{2}\Xi^2 A + \dots$$

В этом разделе мы исследуем свойства первой квазиклассической поправки ΞA , линейной по операторам координат и импульсов.

Для систем со связями второго рода удобно представить оператор Ξ в виде суммы $\Xi = \Xi_0 + \Xi_1$ операторов вида

$$\Xi_0 = -i \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial P} + \xi \frac{\partial}{\partial Q}, \quad \Xi_1 = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \Pi} + \xi \frac{\partial}{\partial \Phi}.$$

Аналогичное разложение будем использовать и для скобки Пуассона двух классических функций A и B , выделяя скобки Пуассона по обычным и дополнительным координатам и импульсам:

$$\{A, B\} = \{A, B\}_0 + \{A, B\}_1,$$

$$\{A, B\}_0 = \frac{\partial A}{\partial P} \frac{\partial B}{\partial Q} - \frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial B}{\partial P}, \quad \{A, B\}_1 = \frac{\partial A}{\partial \Pi} \frac{\partial B}{\partial \Phi} - \frac{\partial A}{\partial \Phi} \frac{\partial B}{\partial \Pi}.$$

Проверяя непосредственным вычислением, что коммутатор операторов $\Xi_{0,1} A$ и $\Xi_{0,1} B$ является оператором умножения на число, пропорциональное скобке Пуассона, приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливы следующие свойства:*

- $[\Xi_0 A, \Xi_0 B] = -i\{A, B\}_0$,
- $[\Xi_1 A, \Xi_1 B] = -i\{A, B\}_1$,
- $[\Xi_0 A, \Xi_1 B] = 0$.

2.2. Для исследования скалярного произведения $\langle \Psi, \Psi \rangle$ можно применить общий результат работы [9] для систем со связями первого рода и получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Если значение хотя бы одной из классических связей $T_a(P, Q, 0, 0) \equiv \Theta_a(P, Q)$ отлично от нуля, то скалярное произведение $\langle \Psi, \Psi \rangle$ экспоненциально мало.
2. При условии $\Theta_a(P, Q) = 0$ скалярное произведение волновых функций (2.1) при $\hbar \rightarrow 0$ имеет вид

$$\langle \Psi, \Psi \rangle \simeq |c^h|^2 \hbar^k \left(f, \prod_{a=1}^{2k} 2\pi \delta(\Xi T_a) f \right). \quad (2.3)$$

Таким образом, состояние (2.1) имеет смысл рассматривать, если только классические переменные (P, Q) лежат на поверхности связи. Также из соотношения (2.3) вытекает, что состояние вида $\Xi T_a f$ имеет нулевую норму и поэтому эквивалентно нулю. Будем говорить, что операторы ΞT_a эквивалентны нулю.

2.3. Для исследования квадрата нормы волновой функции (1.3) удобно использовать операторнозначную 1-форму Ω , возникающую в теории абстрактного канонического оператора [15], [16], следующим образом. При малом сдвиге классических переменных волновая функция (2.1) преобразуется как

$$K_{P+\sqrt{h}\delta P, Q+\sqrt{h}\delta Q}^h f \simeq \text{const} \cdot K_{P,Q}^h e^{i\Omega(\delta P, \delta Q)} f,$$

где

$$\Omega(\delta P, \delta Q) = \delta P \xi - \delta Q \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.4)$$

Применительно к системам со связями второго рода следует считать, что как невозмущенное, так и возмущенное классические состояния лежат на поверхности связи. Поэтому на возмущение $(\delta P, \delta Q)$ налагается дополнительное условие

$$\frac{\partial \Theta_a}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \Theta_a}{\partial Q} \delta Q = 0. \quad (2.5)$$

Отметим, что только при этом условии оператор (2.4) коммутирует с оператором ΞT_a и переводит поэтому состояния с нулевой нормой в состояния с нулевой нормой.

Используя предложенные в работах [9], [6] методы, можно исследовать квадрат нормы волновой функции (1.3) и доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $\Theta_a(P, Q) = 0$ при всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, а функции $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и функция $S(\alpha)$ со значениями в $\mathbb{R}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_a} = P \frac{\partial Q}{\partial \alpha_a}. \quad (2.6)$$

Тогда квадрат нормы волновой функции

$$\Psi(q) = c^h \int d\alpha e^{(i/h)S(\alpha)} e^{(i/h)P(\alpha)(q\sqrt{h}-Q(\alpha))} f\left(q - \frac{Q(\alpha)}{\sqrt{h}}\right) \quad (2.7)$$

при $h \rightarrow 0$ удовлетворяет приближенному равенству

$$\langle \Psi, \Psi \rangle \simeq |c^h|^2 h^{k+m/2} \int d\alpha \left(f, \prod_{a=1}^{2k} 2\pi \delta(\Xi T_a) \prod_{b=1}^m 2\pi \delta\left(\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_b}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_b}\right)\right) f \right). \quad (2.8)$$

Если условие (2.6) не выполнено, то квадрат нормы волновой функции оказывается экспоненциально малым.

2.4. Оператор ΞA выражается как через обычные, так и через дополнительные координаты и импульсы $(\hat{\pi}, \hat{\phi})$. Можно ли исключить эти дополнительные степени свободы? Поскольку операторы ΞT_a эквивалентны нулю, оператор ΞA эквивалентен оператору

$$\Xi A - \sum_a \lambda_a \Xi T_a. \quad (2.9)$$

Подберем параметры λ_a таким образом, чтобы выражение (2.9) не содержало операторов $(\hat{\pi}, \hat{\phi})$.

Будем рассматривать функции A на расширенном фазовом пространстве, которые являются классическими наблюдаемыми величинами – их скобка Пуассона с расширенными связями обращается в нуль: $\{A, T_a\} = 0$. Комбинируя это свойство с предложением 2.1, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Справедливо равенство*

$$[\Xi_1 T_a, \Xi_1 A] = i\{T_a, A\}_0. \quad (2.10)$$

Обозначая через

$$C_{ab} = \{T_a, T_b\}_0 = \{\Theta_a, \Theta_b\}$$

невырожденную матрицу, составленную из скобок Пуассона нерасширенных связей, а через C_{ab}^{-1} – обратную матрицу, приходим к следующему предположению, вытекающему из предложения 2.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Операторы $\Xi_1 T_a$ удовлетворяют равенству $[\Xi_1 T_a, \Xi_1 T_b] = iC_{ab}$.*
2. *Операторы $\Xi_1 T_a$ линейно независимы.*
3. *Линейная комбинация операторов координат и импульсов не содержит операторов $\hat{\phi}$ и $\hat{\pi}$ тогда и только тогда, когда она коммутирует со всеми операторами $\Xi_1 T_a$.*

Второй пункт доказывается от противного: предполагая, что для некоторых чисел μ_a линейная комбинация $\sum_a \mu_a \Xi_1 T_a$ обращается в нуль, рассматриваем коммутатор этой комбинации с оператором $\Xi_1 T_b$. Приходим к выводу, что $\sum_a \mu_a C_{ab} = 0$ и (ввиду невырожденности матрицы C_{ab}) $\mu_a = 0$. Чтобы доказать третий пункт предложения, следует представить исходную линейную комбинацию в виде суммы операторов $\hat{p}_i$, $\hat{q}_i$ и $\sum_b \mu_b \Xi_1 T_b$.

Используя п. 3 предложения 2.5, получаем достаточное условие того, что выражение (2.9) не содержит операторов $\hat{\phi}$ и $\hat{\pi}$:

$$0 = \left[\Xi_1 T_b, \Xi A - \sum_a \lambda_a \Xi T_a \right] = i\{T_b, A\}_0 - i \sum_a C_{ba} \lambda_a.$$

Тогда коэффициенты λ_a подбираются однозначно:

$$\lambda_a = \sum_b C_{ab}^{-1} \{T_b, A\}_0. \quad (2.11)$$

Таким образом, выражение

$$\Xi A - \sum_a \lambda_a \Xi T_a = \Xi A - \sum_{ab} C_{ab}^{-1} \{T_b, A\}_0 \Xi T_a \quad (2.12)$$

содержит только операторы нерасширенных координат и импульсов: это означает, что $\Xi_1 A - \sum_a \lambda_a \Xi_1 T_a = 0$.

2.5. Квазиклассическую наблюдаемую величину ΞA можно выразить через операторнозначную форму Ω . Для $\Xi_0 A$ имеем

$$\Xi_0 A = -\Omega(\delta_A P, \delta_A Q), \quad \delta_A P = -\frac{\partial A}{\partial Q}, \quad \delta_A Q = \frac{\partial A}{\partial P}.$$

Следовательно, оператор ΞA эквивалентен оператору

$$\Xi A - \sum_a \lambda_a \Xi T_a = \Xi_0 A - \sum_a \lambda_a \Xi_0 T_a = -\Omega(\nabla_A P, \nabla_A Q),$$

где

$$\nabla_A P = -\frac{\partial A}{\partial Q} + \sum_a \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial Q}, \quad \nabla_A Q = \frac{\partial A}{\partial P} - \sum_a \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial P} \quad (2.13)$$

(здесь коэффициенты λ_a имеют вид (2.11)).

Важно отметить, что вектор $(\nabla_A P, \nabla_A Q)$ определяется только значениями функции A на поверхности связи $\Theta_a = 0$ и не зависит от значений функции A за ее пределами. Это вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть A – функция на расширенном фазовом пространстве, удовлетворяющая свойству $\{A, T_a\} = 0$ и обращающаяся в нуль на поверхности связи $\Theta_a(P, Q) = 0$ при $\Pi = 0$, $\Phi = 0$. Тогда $\nabla_A P = 0$, $\nabla_A Q = 0$.

Для доказательства достаточно отметить, что при смещении вдоль нерасширенного фазового пространства $\{P, Q\}$ справедливо свойство $dA = 0$ при всех (dP, dQ) , удовлетворяющих соотношению $d\Theta_a = 0$. Это означает, что

$$dA = \sum_a \mu_a d\Theta_a, \quad \{A, T_b\}_0 = \{A, \Theta_b\}_0 = \sum_a \mu_a \{\Theta_a, \Theta_b\} = \sum_a \mu_a C_{ab}.$$

Используя соотношения (2.11) и (2.13), находим, что $\lambda_a = \mu_a$ и $\nabla_A P = 0$, $\nabla_A Q = 0$.

Таким образом, квазиклассическая наблюдаемая величина в первом порядке разложения по $\sqrt{\hbar}$ однозначно определяется значением, которое принимает классическая функция $A(P, Q, \Pi, \Phi)$ при $\Pi = 0$, $\Phi = 0$ и $\Theta_a(P, Q) = 0$.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1. Исследуем при $\hbar \rightarrow 0$ решение уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = \hat{H} \Psi^t \quad (3.1)$$

с гамильтонианом, зависящим от малого параметра $\hbar$ следующим образом:

$$\hat{H} = H(\hat{p}\sqrt{\hbar}, \hat{q}\sqrt{\hbar}, \hat{\pi}\sqrt{\hbar}, \hat{\phi}\sqrt{\hbar}). \quad (3.2)$$

Предполагается, что упорядочение операторов вейлевское. Начальное условие выберем в виде $\Psi|_{t=0} = K_{P^0, Q^0}^h f^0$.

Поскольку вектор $\hat{T}_a \Psi^t$ имеет нулевую норму, уравнение (3.1) равносильно следующему:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = \left(\hat{H} - \sum_a \lambda_a \hat{T}_a \right) \Psi^t. \quad (3.3)$$

Зависящие от времени числовые коэффициенты λ_a могут быть подобраны произвольно.

Будем искать решение уравнения (3.1) при $\hbar \rightarrow 0$ в виде

$$\Psi^t = e^{(i/\hbar)S^t} K_{P^t, Q^t}^h f^t. \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Функция (3.4) удовлетворяет уравнениям (3.3), (3.1) с точностью $O(h^{3/2})$, если выполнена следующая совокупность условий:

- функция S^t удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS^t}{dt} = P^t \frac{dQ^t}{dt} - H(P^t, Q^t, 0, 0); \quad (3.5)$$

- функции P^t и Q^t удовлетворяют системе

$$\frac{dP^t}{dt} = \nabla_H P^t, \quad \frac{dQ^t}{dt} = \nabla_H Q^t; \quad (3.6)$$

- функция f^t является решением уравнения с квадратичным гамильтонианом

$$i \frac{\partial f^t}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\Xi^2 H - \sum_a \lambda_a \Xi^2 T_a \right) f^t \quad (3.7)$$

при условии, что

$$\lambda_a = \sum_b C_{ab}^{-1} \{T_b, H\}_0. \quad (3.8)$$

Для доказательства этого предложения следует учесть коммутационные соотношения оператора $K_{P,Q}^h$ с оператором дифференцирования по времени

$$\begin{aligned} ih \frac{d}{dt} e^{(i/h)S^t} K_{P^t, Q^t}^h f^t &= \\ &= e^{(i/h)S^t} K_{P^t, Q^t}^h \left(-\frac{dS^t}{dt} + P^t \frac{dQ^t}{dt} - \frac{dP^t}{dt} \xi \sqrt{h} + \frac{dQ^t}{dt} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{h} + ih \frac{\partial}{\partial t} \right) f^t, \end{aligned}$$

оператором Гамильтона

$$\hat{H} K_{P,Q}^h f = K_{P,Q}^h \left(H + \sqrt{h} \Xi H + \frac{h}{2} \Xi^2 H + \dots \right) f$$

и связями

$$\hat{T}_a K_{P,Q}^h f = K_{P,Q}^h \left(T_a + \sqrt{h} \Xi T_a + \frac{h}{2} \Xi^2 T_a + \dots \right) f.$$

Из этих коммутационных соотношений получаем, что функция (3.4) приближенно удовлетворяет уравнению (3.3) (а значит, и уравнению (3.1)), если выполнены уравнение (3.5), равенство

$$-\frac{dP^t}{dt} \xi + \frac{dQ^t}{dt} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} = \Xi H - \sum_a \lambda_a \Xi T_a \quad (3.9)$$

и уравнение (3.7) с квадратичным гамильтонианом. Поскольку операторы $\hat{\phi}$ и $\hat{\pi}$ должны отсутствовать как в левой, так и в правой частях соотношения (3.9), по аналогии с (2.11) приходим к свойству (3.8) и приводим уравнение (3.9) к виду (3.6).

Если функция Ψ^t удовлетворяет уравнению (3.1) с точностью $O(h^{3/2})$, то решение задачи Коши для этого уравнения совпадает [1] в момент времени t с Ψ^t с точностью $O(h^{1/2})$. Таким образом, оператор эволюции переводит начальное состояние $K_{P^0, Q^0} f^0$ в состояние $e^{(i/h)S^t} K_{P^t, Q^t} f^t + O(h^{1/2})$. При этом S^t определяется из

уравнения (3.5) и начального условия $S^0 = 0$, функции (P^t, Q^t) суть решение задачи Коши для классической системы (3.6), а f^t – решение уравнения Шредингера с квадратичным гамильтонианом (3.7).

Будем предполагать, что коммутатор оператора Гамильтона с операторами расширенных связей равен нулю не только на поверхности связей $([\hat{H}, \hat{T}_a] = 0)$. Это означает, что $\Xi\{H, T_a\} = 0$.

Из результатов работы [9] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Квадрат нормы*

$$\langle f^t, f^t \rangle = \left(f^t, \prod_{a=1}^{2k} 2\pi \delta(\Xi T_a) f^t \right)$$

функции, удовлетворяющей уравнению (3.7), сохраняется со временем.

3.2. Исследуем квазиклассическую эволюцию состояний (2.7), предполагая свойство (2.6) выполненным в начальный момент времени.

По аналогии с предложением 3.1 получаем, что волновая функция

$$c^h \int d\alpha e^{(i/h)S^t(\alpha)} K_{P^t(\alpha), Q^t(\alpha)}^h f^t(\alpha)$$

удовлетворяет уравнениям (3.3) и (3.1) с точностью $O(h^{3/2})$, если функция $S^t(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (3.5), функции $(P^t(\alpha), Q^t(\alpha))$ суть решение задачи Коши для классической системы (3.6), f^t – решение уравнения Шредингера с квадратичным гамильтонианом (3.7). Непосредственным вычислением проверяется, что условие (2.6) сохраняется со временем.

Сохранение скалярного произведения (2.8) вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Оператор*

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\Xi^2 H - \sum_a \lambda_a \Xi^2 T_a \right), \Omega \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} \right) \right]$$

переводит любую функцию в функцию с нулевой нормой.

Доказательство этого предложения основано на следующем свойстве, вытекающем из результатов работы [6]:

$$0 = \left[i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \Xi^2 \left(H - \sum_a \lambda_a T_a \right), \Omega \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} \right) \right].$$

Из него получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \left[i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\Xi^2 H - \sum_a \lambda_a \Xi^2 T_a \right), \Omega \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} \right) \right] = \\ &= \sum_a \left[\Xi \lambda_a \Xi T_a, \Omega \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} \right) \right] = \sum_a \left[\Xi \lambda_a, \Omega \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} \right) \right] \Xi T_a. \end{aligned}$$

Доказываемое утверждение вытекает из того, что $\Xi T_a \sim 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе была исследована квазиклассическая механика систем со связями второго рода. Мы предположили, что квантовая механика такой системы построена с помощью метода Баталина–Фрадкина–Тютин, основанного на введении дополнительных координат и импульсов и превращении связей второго рода в связи первого рода. Эта расширенная система была проквантована с помощью метода алгебраического квантования.

Нами были исследованы свойства квазиклассических состояний (2.1), соответствующих определенной точке классического фазового пространства, и более сложных квазиклассических состояний (2.7), отвечающих подмногообразиям фазового пространства. Также были вычислены скалярные произведения этих состояний (предложения 2.2 и 2.3).

Мы исследовали квазиклассические наблюдаемые величины в первом нетривиальном порядке квазиклассического разложения и показали, что их всегда можно представить через линейные комбинации физических координат и импульсов (2.4), не используя дополнительные степени свободы. Согласно предложению 2.6 оператор квазиклассической наблюдаемой величины в первом порядке разложения однозначно определяется значениями классической величины на поверхности связей и не зависит от значений этой величины вне поверхности.

Мы рассмотрели, как квазиклассические состояния преобразуются в ходе эволюции. В предположении, что расширенный гамильтониан системы коммутирует с расширенными связями не только на поверхности связей, было установлено, что квазиклассическое состояние (3.4) приближенно удовлетворяет уравнению Шредингера в условиях предложения 3.1. При этом квадрат нормы сохраняется со временем. Также мы рассмотрели квазиклассическую эволюцию более сложного квазиклассического состояния (2.7).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, МГУ, М., 1965.
- [2] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [3] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [4] R. Jackiw, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 681–706.
- [5] М. В. Карасёв, В. П. Маслов, *Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [6] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля*, Эдиториал УРСС, М., 2000.
- [7] П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, М., 1968.
- [8] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [9] О. Ю. Шведов, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 418–435.
- [10] I. A. Batalin, E. S. Fradkin, *Phys. Lett. B*, **180**:1–2 (1986), 157–162.
- [11] I. A. Batalin, E. S. Fradkin, *Nucl. Phys. B*, **279**:3–4 (1987), 514–528.
- [12] I. A. Batalin, I. V. Tyutin, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:18 (1991), 3255–3282.
- [13] N. Banerjee, R. Banerjee, S. Ghosh, *Ann. Phys.*, **241**:2 (1995), 237–257, arXiv: hep-th/9403069.
- [14] O. Yu. Shvedov, *Semiclassical mechanics of constrained systems*, arXiv: hep-th/0111265.
- [15] О. Ю. Шведов, *Матем. заметки*, **65**:3 (1999), 437–456.
- [16] О. Ю. Шведов, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 123–157.