Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, Решения типа “волн-убийц” уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура: единый подход, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 191–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8958>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:37:42

© 2016 г.

В. Б. Матвеев^{*†}, А. О. Смирнов^{*}

РЕШЕНИЯ ТИПА “ВОЛН-УБИЙЦ” УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИИ АБЛОВИЦА–КАУПА–НЬЮЭЛЛА–СИГУРА: ЕДИНЫЙ ПОДХОД

Описывается единая структура решений для всех уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура и их комбинаций. Приведены примеры решений, которые при разных значениях параметров удовлетворяют разным уравнениям. В частности, рассмотрено квазирациональное решение ранга 2, которое может быть использовано при исследовании многих интегрируемых моделей нелинейной оптики. Преимуществом нашего подхода является возможность исследования изменения поведения решения вследствие изменения используемой модели.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Хироты, иерархия АКНС.

DOI: 10.4213/tmf8958

1. ВВЕДЕНИЕ

Как правило, явление, называемое в гидродинамике “волнами-убийцами”, а в нелинейной оптике – “странными волнами”, описывается с помощью квазирациональных решений некоторых нелинейных уравнений. Это явление привлекает к себе в последнее время большое внимание, поэтому в настоящее время опубликовано достаточно большое количество работ, посвященных анализу квазирациональных решений фокусирующего уравнения нелинейного уравнения Шредингера (уравнения НШ) и других уравнений, связанных с ним. Причем, как правило, каждое уравнение исследуется заново и каждому решению каждого уравнения посвящается отдельная статья. В результате такого положения дел число статей, посвященных различным решениям фокусирующего уравнения НШ и его обобщениям, стало двузначным, если не трехзначным. С нашей точки зрения, такое количество работ явно

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00589_a).

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: alsmir@guap.ru

[†]Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université de Bourgogne-Franche Comté, Dijon, France. E-mail: vladimir.matveev@u-bourgogne.fr

излишне, и мы решили подвести в данной статье некоторые итоги наших исследований как квазирациональных, так и алгебро-геометрических решений уравнения НШ и его обобщений. Соответственно, в данной работе мы упоминаем только те статьи, которые важны для понимания нашей точки зрения на проблему построения и исследования свойств данных решений. Несмотря на это ограничение, библиография настоящей работы все равно достаточно большая.

Структура работы следующая. В разделе 2 указывается процедура построения уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура (АКНС) и приводятся примеры первых пяти уравнений. Раздел 3 посвящен нелинейным уравнениям, решения которых могут быть получены из решений уравнений иерархии АКНС. В разделе 4 описывается метод получения квазирациональных решений ранга n , зависящих от $2n$ произвольных параметров. Остальные разделы иллюстрируют нашу точку зрения, вытекающую из следующих фактов и предположений.

1. Квазирациональные решения могут быть получены с помощью процедуры вырождения многофазных алгебро-геометрических решений.

2. Квазирациональное решение ранга n (определение дано в разделе 4) является $2n$ -фазным и может быть получено в результате вырождения $2n$ -фазного алгебро-геометрического решения.

3. g -Фазное алгебро-геометрическое решение выражается через g -мерные тета-функции Римана, аргументами которых являются g -мерные векторы.

4. Пространственная координата x и все времена t_k входят в алгебро-геометрические решения уравнений иерархии АКНС как коэффициенты линейной комбинации g -мерных векторов периодов некоторых нормированных абелевых интегралов второго рода. Пространственной координате соответствует интеграл с полюсами первого порядка в бесконечно удаленных точках, времени t_k – интеграл с полюсами порядка $k + 1$.

5. Векторы U_k периодов интегралов с полюсами порядка $k \leq g$ линейно независимы. Векторы U_m периодов интегралов с полюсами $m > g$ являются линейными комбинациями векторов U_k , $k \leq g$.

6. Изменение локальных параметров в окрестностях бесконечно удаленных точек ведет к изменению асимптотик интегралов и их периодов. При этом новые векторы $\tilde{U}_k$ линейно выражаются через старые векторы U_m , где $m \leq k$.

Исходя из этого мы считаем, что фазам g -фазного алгебро-геометрического решения соответствуют пространственная координата x и времена t_k , $k \leq g - 1$, причем старшие времена t_m , $m \geq g$, входят в фазы, соответствующие младшим временам линейным образом. Кроме того, любое время t_k может входить линейно в фазы, соответствующие временам t_m , где $m < k$. Также мы считаем, что при вырождениях алгебро-геометрических решений фазы сохраняются, и, следовательно, квазирациональные решения уравнений иерархии АКНС представляют собой произведение рациональной функции от фаз, являющихся линейными комбинациями x и t_k , на экспоненту от аргумента, линейного по t_k .

Таким образом, в частности, однофазное решение любого из уравнений иерархии АКНС имеет вид

$$u(x, t_k) = \psi(x + c_k t_k) e^{d_k t_k},$$

где ψ – однофазное решение уравнения НШ, c_k, d_k – некоторые постоянные. Если же рассматривать двухфазное решение, каковым является и солитон Перегринна,

и бризер Ахмедиева, и солитон Кузнецова–Ма, то оно для любого из уравнений иерархии АKNС записывается в виде

$$u(x, t_k) = \psi(x + c_{1k}t_k, c_{2k}t_k)e^{d_k t_k}.$$

Следующим по сложности можно назвать квазирациональное решение ранга 2 уравнений иерархии АKNС, которое является четырехфазным решением. Динамика соответствующего решения уравнения НШ описывается первыми двумя его фазами. Две старшие его фазы содержат параметры, от которых оно зависит. При рассмотрении высших уравнений иерархии в старших фазах появляются старшие времена, которые входят в свои и младшие фазы линейно. Квазирациональное решение ранга 3 имеет уже шесть фаз, и полная динамика его описывается первыми пятью уравнениями иерархии АKNС. При этом снова динамика решения уравнения НШ определяется двумя первыми фазами, а в старших фазах находятся параметры решения. У решений ранга 3 высших уравнений иерархии координата x находится также в первой фазе, а высшие времена входят в свою и младшие фазы линейно. Аналогичная структура будет и у квазирациональных решений более высокого ранга.

Отметим, что рассмотренные ниже примеры полностью подтверждают нашу точку зрения. Более того, даже перераспределив переменные в решениях с помощью преобразования Галилея, мы увидим, что все времена находятся только в своих и младших фазах. Желаящие более подробно ознакомиться с алгебро-геометрическими решениями уравнений иерархии АKNС могут обратиться к работам [1]–[12]. Процедуры вырождения алгебро-геометрических решений уравнений иерархии АKNС в квазирациональные и тригонометрические можно найти в работах [13]–[15] и в главе 4 монографии [3] (разделы 4.4, 4.5; в частности, выражение для солитона Кузнецова–Ма может быть извлечено из формул раздела 4.4).

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗ ИЕРАРХИИ АKNС

Как известно, интегрируемые нелинейные уравнения могут быть получены как условие совместности некоторых систем линейных дифференциальных уравнений. Уравнения иерархии АKNС получаются как результат совместного рассмотрения уравнений

$$\begin{aligned}\Psi_x &= \mathfrak{U}\Psi, \\ \Psi_{t_k} &= \mathfrak{V}_k\Psi,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &:= \lambda J + \mathfrak{U}^0, & \mathfrak{V}_1 &:= 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, & \mathfrak{V}_{k+1} &:= 2\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, & k &\geq 1, \\ J &:= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, & \mathfrak{U}^0 &:= \begin{pmatrix} 0 & i\psi \\ -i\phi & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Из условий $(\Psi_x)_{t_k} = (\Psi_{t_k})_x$ вытекают вид матриц $\mathfrak{V}_k$, рекуррентные соотношения для внедиагональных элементов матриц $\mathfrak{V}_k^0$, соотношения между диагональными и внедиагональными элементами этих матриц

$$[J, \mathfrak{V}_1^0] = 2(\mathfrak{U}^0)_x, \quad [J, \mathfrak{V}_{k+1}^0] = 2(\mathfrak{V}_k^0)_x + 2[\mathfrak{V}_k^0, \mathfrak{U}^0], \quad k \geq 1.$$

В частности,

$$\mathfrak{V}_1^0 = \begin{pmatrix} -i\psi\phi & -\psi_x \\ -\phi_x & i\psi\phi \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V}_2^0 = \begin{pmatrix} \psi_x\phi - \phi_x\psi & 2i\psi^2\phi - i\psi_{xx} \\ -2i\phi^2\psi + i\phi_{xx} & \phi_x\psi - \psi_x\phi \end{pmatrix}.$$

Также из условия совместности вытекают уравнения, описывающие динамику элементов матрицы $\mathfrak{U}^0$:

$$(\mathfrak{U}^0)_{t_k} = (\mathfrak{V}_k^0)_x + [\mathfrak{V}_k^0, \mathfrak{U}^0] = \frac{1}{2}[J, \mathfrak{V}_{k+1}^0].$$

Последние уравнения и являются интегрируемыми нелинейными уравнениями из иерархии АКС.

Первым уравнением этой иерархии является спаренное уравнение НШ

$$\begin{aligned} i\psi_{t_1} + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi &= 0, \\ -i\phi_{t_1} + \psi_{xx} - 2\phi^2\psi &= 0, \end{aligned}$$

которое при $\phi = -\psi^*$ переходит в фокусирующее уравнение НШ

$$i\psi_{t_1} + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (2.1)$$

Следующим уравнением является спаренное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (уравнение мКдФ)

$$\begin{aligned} \psi_{t_2} + \psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x &= 0, \\ \phi_{t_2} + \phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x &= 0, \end{aligned}$$

переходящее при $\phi = -\psi^*$ в комплексное уравнение мКдФ

$$\psi_{t_2} + \psi_{xxx} + 6|\psi|^2\psi_x = 0. \quad (2.2)$$

Отметим, что обычное уравнение мКдФ не содержит знака модуля и у него рассматриваются только вещественные решения. Вещественные формы уравнения мКдФ могут быть получены из спаренного уравнения с помощью редукции $\phi = \pm\psi$.

Третьим уравнением иерархии является уравнение

$$\begin{aligned} i\psi_{t_3} - \psi_{xxxx} + 8\psi\phi\psi_{xx} + 2\psi^2\phi_{xx} + 6\psi_x^2\phi + 4\psi\psi_x\phi_x - 6\psi^3\phi^2 &= 0, \\ -i\phi_{t_3} - \phi_{xxxx} + 8\psi\phi\phi_{xx} + 2\phi^2\psi_{xx} + 6\psi\phi_x^2 + 4\phi\psi_x\phi_x - 6\psi^2\phi^3 &= 0, \end{aligned}$$

которое при $\phi = -\psi^*$ и $t_3 = -t$ становится уравнением Лакшманана–Порсециана–Даниеля (ЛПД) [16]–[18]:

$$i\psi_t + \psi_{xxx} + 8|\psi|^2\psi_{xx} + 2\psi^2\psi_{xx}^* + 6\psi_x^2\psi^* + 4\psi|\psi_x|^2 + 6|\psi|^4\psi = 0. \quad (2.3)$$

Обычно уравнения более высокого порядка физиками не рассматриваются. Но для построения общей картины мы рассмотрим еще два уравнения из иерархии АКС. Четвертое уравнение этой иерархии при $\phi = -\psi^*$ и $t_4 = -t$ имеет вид

$$\psi_t + \psi_{5x} + 10|\psi|^2\psi_{xxx} + 20\psi_{xx}\psi_x\psi^* + 10(|\psi_x|^2\psi)_x + 30|\psi|^4\psi_x = 0. \quad (2.4)$$

Пятое уравнение иерархии АКНС при $\phi = -\psi^*$ имеет вид

$$\begin{aligned} i\psi_{t_5} + \psi_{6x} + 12|\psi|^2\psi_{xxxx} + 2\psi^2\psi_{xxx}^* + 30\psi_{xxx}\psi_x\psi^* + 18\psi_{xxx}\psi\psi_x^* + \\ + 8\psi_x\psi\psi_{xx}^* + 50\psi_{xx}|\psi_x|^2 + 50\psi_{xx}|\psi|^4 + 20\psi_{xx}^2\psi^* + 22|\psi_{xx}|^2\psi + \\ + 20\psi_x^2\psi_{xx}^* + 20|\psi|^2\psi^2\psi_{xx}^* + 10\psi^3(\psi_x^*)^2 + 70\psi_x^2|\psi|^2\psi^* + \\ + 60|\psi|^2|\psi_x|^2\psi + 20|\psi|^6\psi = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее для уравнений (2.1)–(2.5) мы будем также использовать обозначения

$$\begin{aligned} i\psi_{t_1} + H_1(\psi) = 0, \quad \psi_{t_2} + H_2(\psi) = 0, \quad -i\psi_{t_3} + H_3(\psi) = 0, \\ -\psi_{t_4} + H_4(\psi) = 0, \quad i\psi_{t_5} + H_5(\psi) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\psi_{t_k} = i^k H_k(\psi).$$

В заключение раздела отметим, что все уравнения из (любой) иерархии обладают одной очень важной особенностью, которая заключается в том, что существуют функции $\Psi(x, t_1, \dots, t_k)$, которые являются решениями всех уравнений иерархии одновременно. При этом если порядок уравнения меньше числа фаз, то переменные, находящиеся в старших фазах решения, являются параметрами. Если же порядок уравнения n больше числа фаз k , то эта функция либо не зависит от t_n , либо t_n вследствие преобразования Галилея входит в меньшие фазы линейным образом.

3. ДРУГИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ ИЕРАРХИИ АКНС

Обычно физики используют самый простой способ получения интегрируемых моделей нелинейной оптики. Этот способ заключается в подстановке переменной t сразу в несколько фаз одновременно. Например, интегрируемое уравнение Хироты [19]–[23] имеет вид

$$i\psi_t + \alpha H_1(\psi) - i\beta H_2(\psi) = 0. \quad (3.1)$$

Легко видеть, что это уравнение имеет решения в виде $\Psi(x, \alpha t, -\beta t, \dots, t_k)$, где $\Psi(x, t_1, \dots, t_k)$ – произвольное решение иерархии АКНС. Более сложная модель, рассмотренная в [24], [25], описывается уравнением

$$i\psi_t + \alpha H_1(\psi) - i\beta H_2(\psi) + \gamma_1 H_3(\psi) = 0. \quad (3.2)$$

Нетрудно понять, что она имеет решения в виде $\Psi(x, \alpha t, -\beta t, -\gamma_1 t, \dots, t_k)$. Следующие по порядку модели описываются уравнениями

$$i\psi_t + \alpha H_1(\psi) - i\beta H_2(\psi) + \gamma_1 H_3(\psi) - i\gamma_2 H_4(\psi) = 0 \quad (3.3)$$

и

$$i\psi_t + \alpha H_1(\psi) - i\beta H_2(\psi) + \gamma_1 H_3(\psi) - i\gamma_2 H_4(\psi) + \gamma_3 H_5(\psi) = 0, \quad (3.4)$$

но пока можно указать только одну статью [26], посвященную частному случаю ($\beta = 0$, $\gamma_1 = 0$) уравнения (3.3). Рассмотрение в [26] уравнения более высокого

порядка позволило исследовать более сложные решения. В частности, в [26] рассматриваются двухбризерное решение и квазирациональное решение ранга 2 уравнения (3.3) при $\beta = 0$, $\gamma_1 = 0$. Причем квазирациональное решение в [26] было получено как предельный случай двухбризерного решения.

Другой способ заключается в комбинировании уравнений (2.1)–(2.5) с их производными, как, например, в работе [27], где рассматривается двумерное уравнение НШ в конических координатах

$$i\psi_t + \psi_{xy} + i(H_2(\psi) - [H_1(\psi)]_x) = 0,$$

решением которого является функция $\Psi(x, y, t, \dots, t_k)$.

Отметим также, что есть еще один простой метод получить интегрируемую модель – сделать в уравнении замену функции и/или независимых переменных. Например, если решение уравнения (2.1) записать в виде

$$\psi(x, t) = \tau u(\xi, \tau) e^{-i\xi^2/4\tau},$$

где $\xi = x/t$, $\tau = -1/t$, $x = -\xi/\tau$, $t = -1/\tau$, то функция $u(\xi, \tau)$ будет являться решением цилиндрического уравнения НШ (цНШ) [28]–[35]

$$iu_\tau + u_{\xi\xi} + i\frac{u}{2\tau} + 2|u|^2u = 0. \quad (3.5)$$

Соответственно, решения уравнения НШ (3.5) могут быть получены из решений уравнения НШ (2.1) с помощью подстановки

$$u(\xi, \tau) := \frac{1}{\tau} \psi\left(-\frac{\xi}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) e^{i\xi^2/4\tau}. \quad (3.6)$$

Менее активно [10], [36]–[40] используется связь между уравнением НШ и уравнением Кадомцева–Петвиашвили–I (КП-I), установленная более 20 лет назад [41], [42]. В настоящей работе мы будем использовать ее в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(x, t_1, t_2, \dots, t_n)$ – решение уравнений иерархии АКНС. Тогда функция

$$u(x, y, t) = 2(|\psi(x + 3t, y, t, \dots, t_n)|^2 - 1)$$

является решением уравнения КП-I

$$3u_{yy} = (4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x. \quad (3.7)$$

Поскольку уравнение КП-I тесно связано с уравнением Джонсона–I [43]–[45]

$$\frac{3v_{\eta\eta}}{\tau^2} = \left(4v_\tau + v_{\xi\xi\xi} + 6vv_\xi + \frac{2v}{\tau}\right)_\xi, \quad (3.8)$$

которое называют еще цилиндрическим уравнением КП-I (цКП-I), и с эллиптико-цилиндрическим уравнением КП-I [46], то эти уравнения также имеют рациональные решения. В частности, решения уравнения цКП-I (3.8) выражаются через решения уравнений КП-I (3.7) по формуле [44], [45]

$$v(\xi, \eta, \tau) := u\left(\xi + \frac{\eta^2\tau}{3}, \eta\tau, \tau\right).$$

4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Первоначальная версия данного метода появилась в 1986 году в работе Елеонского, Кричевера и Кулагина [47], но была не востребована долгое время. Лишь с 2010 года модифицированная версия данного метода стала активно использоваться одним из авторов (В.Б. Матвеев) и его соавторами [36]–[40]. Исходя из целей настоящей работы мы проведем дальнейшие небольшие изменения данного метода.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ определим полиномы $q_{2n}(k)$ и $\Phi(k)$ следующими формулами:

$$q_{2n}(k) := \prod_{j=1}^n \left(k^2 + i \operatorname{ctg} \frac{\alpha_j}{2} \right), \quad \alpha_j := \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}, \quad (4.1)$$

$$\Phi(k) := i \sum_{l=1}^{2n} \varphi_l (ik)^l, \quad \varphi_l \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь функцию f , определяемую формулой

$$f(k, x, t) := \frac{e^{kx + ik^2 t + \Phi(k)}}{q_{2n}(k)} \quad (4.3)$$

и при любом значении параметра k являющуюся решением линейного нестационарного уравнения Шредингера с нулевым потенциалом:

$$-i f_t = f_{xx}. \quad (4.4)$$

Нетрудно проверить, что функции $f_1, \dots, f_{2n}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} f_j(x, t) &:= D_k^{2j-1} f(k, x, t) \Big|_{k=1}, \\ f_{n+j}(x, t) &:= D_k^{2j-1} f(k, x, t) \Big|_{k=-1}, \end{aligned} \quad D_k := \frac{k^2}{k^2 + 1} \frac{\partial}{\partial k}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

также являются решениями уравнения (4.4).

Обозначим через W_1, W_2 определители Вронского, составленные из функций f_j и f , определенных выше:

$$\begin{aligned} W_1 &:= W(f_1, \dots, f_{2n}) \equiv \det A, & A_{lj} &:= \partial_x^{l-1} f_j, \\ W_2 &:= W(f_1, \dots, f_{2n}, f). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция*

$$\Psi_n(x, t) := (-1)^n q_{2n}(0) e^{2it} \frac{W_2 \Big|_{k=0}}{W_1} \quad (4.6)$$

описывает семейство решений уравнения (2.1), зависящее от $2n$ вещественных параметров $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$, которые соответствуют фазам этого решения.

Будем называть это решение квазирациональным решением ранга n . В обозначениях, не использующих определителей Вронского, это решение было впервые получено в работе [47]. При $n = 1$ оно совпадает с так называемым солитоном Перегрина [48] или, как мы будем называть его для краткости, P_1 -бризером.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, как будет видно ниже, если число фаз φ_j не ограничивать удвоенным рангом решения, то этим методом можно получать квазирациональные решения любых рангов для всех уравнений иерархии АКНС.

5. РЕШЕНИЯ РАНГА 1

При $n = 1$ решение (4.6) принимает вид

$$\Psi_1(x, t) = \left(1 - \frac{4(1 + iT)}{X^2 + T^2 + 1}\right) e^{2it}, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} X &= 2x - 2\varphi_1 + 6\varphi_3 - 10\varphi_5 + \dots, \\ T &= 4t + \sqrt{3} - 4\varphi_2 + 8\varphi_4 - 12\varphi_6 + \dots. \end{aligned}$$

Подставляя в (5.1) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \sqrt{3}/4$, $\varphi_j = 0$, $j \geq 3$, получим хорошо известный солитон Перегрин [48] или P_1 -бризер [39].

Вместе с тем нетрудно проверить, что функция

$$\Psi_1(X, T) = \left(1 - \frac{4(1 + iT)}{X^2 + T^2 + 1}\right) e^{2it_1 - 6it_3 + 20it_5} \quad (5.2)$$

при

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad t = t_1, \quad \varphi_3 = -2t_2, \quad \varphi_4 = -3t_3, \\ \varphi_5 &= -6t_4, \quad \varphi_6 = -10t_5 \end{aligned}$$

или при

$$X = 2x - 12t_2 + 60t_4 + \dots, \quad (5.3)$$

$$T = 4t_1 - 24t_3 + 120t_5 + \dots \quad (5.4)$$

является квазирациональным решением ранга 1 уравнений (2.1)–(2.5).

Иначе говоря, простейшие квазирациональные (рациональные) решения $P_1^j(x, t)$ ранга 1 уравнения с номером (2.j) из иерархии АКНС имеют вид

$$P_1^1 = \left(1 - \frac{4(1 + 4it)}{4x^2 + 16t^2 + 1}\right) e^{2it}, \quad (5.5a)$$

$$P_1^2 = \left(1 - \frac{4(1 + iT)}{4(x - 6t)^2 + T^2 + 1}\right), \quad (5.5б)$$

$$P_1^3 = \left(1 - \frac{4(1 + 24it)}{4x^2 + 576t^2 + 1}\right) e^{6it}, \quad (5.5в)$$

$$P_1^4 = \left(1 - \frac{4(1 + iT)}{4(x - 30t)^2 + T^2 + 1}\right), \quad (5.5г)$$

$$P_1^5 = \left(1 - \frac{4(1 + 120it)}{4x^2 + 14400t^2 + 1}\right) e^{20it}. \quad (5.5д)$$

Здесь $T \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр решения.

Как нетрудно видеть, все решения ранга 1 уравнений иерархии АКНС разбиваются на два множества. В одном из них находятся решения уравнений с нечетным значением j , а в другом – с четным j . В качестве примера приведем изображения

Рис. 1. Амплитуда решения ранга 1 (5.5а) уравнения НШ (2.1).

Рис. 2. Амплитуда решения ранга 1 (5.5б) комплексного уравнения мКдФ (2.2) при $T = 1$.

решений уравнений (2.1) (рис. 1) и (2.2) (рис. 2). Остальные решения отличаются от данных масштабным преобразованием по времени, т.е. наличие старших производных в модельном уравнении приводит к более быстрому и более внезапному появлению “волны-убийцы”.

Отметим, что при $T = 0$ функция (5.5б) является гладким вещественным рациональным решением

$$v(x, t) = 1 - \frac{4}{4(x - 6t)^2 + 1}$$

вещественного уравнения мКдФ

$$v_t + v_{xxx} + 6v^2v_x = 0, \quad (5.6)$$

а функция

$$u(x, t) := 1 - v(x, t) = \frac{4}{4(x - 6t)^2 + 1} \quad (5.7)$$

Рис. 3. Решение ранга 1 (5.7) уравнения Гарднера (5.8).

– гладким вещественным рациональным решением уравнения Гарднера [49]

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x - 12uu_x + 6u_x = 0. \quad (5.8)$$

При этом решение (5.7), в отличие от $v(x, t)$, положительно определено и имеет нулевую асимптотику на бесконечности (рис. 3). Аналогично, функция (5.5r) при $T = 0$ является гладким вещественным рациональным решением

$$v(x, t) = 1 - \frac{4}{4(x - 30t)^2 + 1}$$

уравнения

$$v_t + v_{5x} + 10v^2v_{xxx} + 40v_{xx}v_xv + 10v_x^3 + 30v^4v_x = 0,$$

а функция

$$u(x, t) := 1 - v(x, t) = \frac{4}{4(x - 30t)^2 + 1},$$

так же как и решение (5.7), положительно определена и имеет нулевую асимптотику на бесконечности. При этом она удовлетворяет очень громоздкому уравнению пятого порядка, которое мы здесь не приводим.

Переходя к уравнениям (3.1)–(3.4), связанным с уравнениями (2.1)–(2.5), получаем, что решения ранга 1 этих уравнений имеют один и тот же вид, с точностью до значений параметров:

$$P_1^{1,2} = \left(1 - \frac{4(1 + 4i\alpha t)}{4(x + 6\beta t)^2 + 16(\alpha t)^2 + 1}\right) e^{2i\alpha t}, \quad (5.9a)$$

$$P_1^{1-3} = \left(1 - \frac{4(1 + 4i\alpha_1 t)}{4(x + 6\beta t)^2 + 16(\alpha_1 t)^2 + 1}\right) e^{2i(\alpha + 3\gamma_1)t}, \quad (5.9б)$$

$$P_1^{1-4} = \left(1 - \frac{4(1 + 4i\alpha_1 t)}{4(x + 6\beta_1 t)^2 + 16(\alpha_1 t)^2 + 1}\right) e^{2i(\alpha + 3\gamma_1)t}, \quad (5.9в)$$

$$P_1^{1-5} = \left(1 - \frac{4(1 + 4i\alpha_2 t)}{4(x + 6\beta_1 t)^2 + 16(\alpha_2 t)^2 + 1}\right) e^{2i(\alpha + 3\gamma_1 + 10\gamma_3)t}, \quad (5.9г)$$

Рис. 4. Амплитуда решения ранга 1 (5.9а) уравнения Хироты (3.1) при $\alpha = 1, \beta = 0.1$ (а), $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$ (б), $\alpha = 1, \beta = 1$ (в).

Рис. 5. Амплитуда решения ранга 1 (5.10) уравнения цНШ (3.5).

где

$$\alpha_1 := \alpha + 6\gamma_1, \quad \beta_1 := \beta + 5\gamma_2, \quad \alpha_2 := \alpha + 6\gamma_1 + 30\gamma_3.$$

Изображения решений ранга 1 уравнения Хироты при разных значениях параметров приведены на рис. 4. Решения ранга 1 остальных уравнений имеют аналогичный вид. Отметим, что параметр β_j отвечает за симметрию решений, и при $\beta_j \neq 0$ амплитуда решений (5.9a)–(5.9r) не является четной функцией по времени и по координате,

$$|P(-x, t)| \neq |P(x, t)|, \quad |P(x, -t)| \neq |P(x, t)|,$$

хотя и обладает симметрией

$$|P(-x, -t)| = |P(x, t)|.$$

В то же время параметр α_j отвечает за локализацию решения по t . При $\alpha_j \neq 0$ решение локализовано в окрестности начала координат, но, чем ближе α_j к нулю, тем шире по t область локализации амплитуды решения. Отметим также, что область локализации по x зависит от асимметрии, т. е. от β_j . Чем больше β_j , тем шире по x область локализации решения. Это хорошо видно на рис. 4.

Совсем другим поведением обладает решение ранга 1 уравнения цНШ (3.5)

$$U_1(\xi, \tau) = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{4(\tau - 4i)}{4\xi^2 + \tau^2 + 16} \right) e^{i(\xi^2 - 8)/4\tau}, \quad (5.10)$$

амплитуда которого почти не отличается от τ^{-1} . На рис. 5, 6 показана амплитуда решения $U_1(\xi, \tau)$ и разность $|U_1(\xi, \tau)| - \tau^{-1}$.

Рис. 6. Разность между амплитудой решения ранга 1 $U_1(\xi, \tau)$ и τ^{-1} .

Рис. 7. Решение ранга 1 (5.11) уравнения КП-I (3.7) при $t = 0$ (а) и $t = 1$ (б).

Рис. 8. Решение ранга 1 (5.12) уравнения цКП-I (3.8) при $\tau = 0.1$ (а) и $\tau = 0.5$ (б).

Решение ранга 1 уравнения КП-I (3.7) имеет вид

$$u(x, y, t) = \frac{16(1 - 4(x - 3t)^2 + 16y^2)}{(1 + 4(x - 3t)^2 + 16y^2)^2}. \quad (5.11)$$

Из формулы (5.11) следует, что это решение представляет собой бегущую “волну-убийцу” (см. рис. 7), которую в первые годы исследования интегрируемых уравнений называли “ламп” (lump).

Решение ранга 1 уравнения цКП-I (3.8) имеет вид (см. рис. 8)

$$v(\xi, \eta, \tau) = \frac{16(1 - 4(\xi + \eta^2\tau/3 - 3\tau)^2 + 16\eta^2\tau^2)}{(1 + 4(\xi + \eta^2\tau/3 - 3\tau)^2 + 16\eta^2\tau^2)^2}. \quad (5.12)$$

Поведение этого решения легко понять исходя из физического смысла координаты η . Поскольку η является углом, под которым рассматривается решение, то, естественно, при убегании “волны-убийцы” от наблюдателя эта величина уменьшается.

Рис. 9. Амплитуда солитона Кузнецова–Ма (6.1) при $\theta = \pi/3$ (а) и $\theta = \pi/6$ (б).

6. СОЛИТОН КУЗНЕЦОВА–МА И ЕГО АНАЛОГИ

Солитоном Кузнецова–Ма [50], [51] является периодическое по x двухфазное решение уравнения НШ (рис. 9). Запишем это решение в следующем виде:

$$\Upsilon_1(X, T) = \left(1 - \frac{2k(k \operatorname{ch}(k\kappa T) + i\kappa \operatorname{sh}(k\kappa T))}{\sqrt{\kappa^2 + k^2} \operatorname{ch}(k\kappa T) - \kappa \cos(kX)} \right) e^{2i(\kappa^2 + k^2)t}, \quad (6.1)$$

где $X = 2x$, $T = 4t$, $k = \sin \theta$, $\kappa = \cos \theta$; θ – параметр решения. К сожалению, в работе [7] в данной формуле имеется опечатка. Нетрудно проверить, что функция (6.1) удовлетворяет уравнению (2.1) и переходит в решение ранга 1 (5.5а) при $\theta \rightarrow 0$.

Также нетрудно проверить, что при учете высших времен функция

$$\Upsilon(x, t_1, \dots) = \left(1 - \frac{2k(k \operatorname{ch}(k\kappa T) + i\kappa \operatorname{sh}(k\kappa T))}{\operatorname{ch}(k\kappa T) - \kappa \cos(kX)} \right) e^{2it_1 + \dots}$$

является решением всех уравнений иерархии АКНС. Заметим, что соотношения $X = X_\theta(x, t_2, t_4, \dots)$ и $T = T_\theta(t_1, t_3, \dots)$ зависят от вспомогательного параметра θ

Рис. 10. Амплитуда решения (6.5) комплексного уравнения мКдФ (2.2) при $\theta = \pi/6$, $T = 1$.

и переходят при $\theta \rightarrow 0$ в (5.3) и (5.4). Мы не будем выписывать здесь решения всех упомянутых выше уравнений иерархии АКНС и их комбинаций. Вместо этого укажем решение уравнения (3.4)

$$\Upsilon(x, t) = \left(1 - \frac{2k(k \operatorname{ch}(k\kappa T) + i\kappa \operatorname{sh}(k\kappa T))}{\operatorname{ch}(k\kappa T) - \kappa \cos(kX)}\right) e^{2i\alpha t + 6i\gamma_1 t + 20i\gamma_3 t}, \quad (6.2)$$

$$X = 2[x + (2 + 4\kappa^2)\beta t + (6 + 8\kappa^2 + 16\kappa^4)\gamma_2 t], \quad (6.3)$$

$$T = 4[\alpha t + (2 + 4\kappa^2)\gamma_1 t + (6 + 8\kappa^2 + 16\kappa^4)\gamma_3 t], \quad (6.4)$$

из которого можно получить решение любого уравнения. В частности, положив $\alpha = \gamma_j = 0$ и $\beta = -1$, получим решение комплексного уравнения мКдФ (2.2), изображенное на рис. 10:

$$\Upsilon_2(x, t) = 1 - \frac{2k(k \operatorname{ch}(k\kappa T) + i\kappa \operatorname{sh}(k\kappa T))}{\operatorname{ch}(k\kappa T) - \kappa \cos(2k(x - \nu t))}, \quad (6.5)$$

где $k = \sin \theta$, $\kappa = \cos \theta$, $\nu = 2 + 4\kappa^2$; θ , T – параметры решения. Если же взять $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\gamma_j = 0$, то получим решение уравнения Хироты (3.1). Пример такого решения изображен на рис. 11.

Естественно, периодические по X решения Υ_j уравнений иерархии АКНС, как и в случае решений ранга 1, образуют две группы. Решение уравнений с нечетными номерами похоже на солитон Кузнецова–Ма и отличаются от него только крутизной фронтов и фазой, а решения уравнений с четными номерами напоминают решение (6.5).

Что касается других уравнений, то соответствующее решение уравнения Гарднера (5.8) задается формулой

$$u := \frac{2k^2}{1 - \kappa \cos(2k[x - (2 + 4\kappa^2)t])} \quad (6.6)$$

и представляет собой периодическую бегущую волну (рис. 12).

Рис. 11. Амплитуда решения (6.2) уравнения Хироты (3.1) при $\theta = \pi/6$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma_j = 0$.

Рис. 12. Решение (6.6) уравнения Гарднера (5.8) при $\theta = \pi/6$.

Рис. 13. Амплитуда решения (6.7) уравнения цНШ (3.5) при $\theta = \pi/3$.

Рис. 14. Решение (6.8) уравнения КП-I (3.7) при $\theta = \pi/3$ и $t = 0$. Рис. 15. Решение (6.9) уравнения цКП-I (3.8) при $\theta = \pi/3$, $\tau = 0.5$.

Отметим, что решение уравнения цНШ (3.5)

$$U(\xi, \tau) = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2k(k \operatorname{ch}(4k\kappa/\tau) - i\kappa \operatorname{sh}(4k\kappa/\tau))}{\tau(\kappa \cos(2k\xi/\tau) - \operatorname{ch}(4k\kappa/\tau))} \right) e^{-i(\xi^2 - 8)/4\tau}, \quad (6.7)$$

полученное из (6.1), имеет достаточно своеобразный вид (рис. 13). Нетрудно видеть, что амплитуда этого решения заметно отличается от τ^{-1} .

Решение уравнения КП-I (3.7)

$$u(x, y, t) = \frac{8k^2\kappa(\operatorname{ch}(4k\kappa y) \cos(2k[x + (1 - 4\kappa^2)t]) - \kappa)}{(\operatorname{ch}(4k\kappa y) - \kappa \cos(2k[x + (1 - 4\kappa^2)t]))^2}, \quad (6.8)$$

полученное из солитона Кузнецова–Ма, представляет собой периодическую цепочку пиков,двигающуюся вдоль оси x (рис. 14). Нетрудно видеть, что данному решению уравнения КП-I соответствует решение уравнения цКП-I (3.8) следующего вида (рис. 15):

$$v(\xi, \eta, \tau) = \frac{8k^2\kappa(\operatorname{ch}(4k\kappa\eta\tau) \cos(2k[\xi + \eta^2\tau/3 + (1 - 4\kappa^2)\tau]) - \kappa)}{(\operatorname{ch}(4k\kappa\eta\tau) - \kappa \cos(2k[\xi + \eta^2\tau/3 + (1 - 4\kappa^2)\tau]))^2}. \quad (6.9)$$

7. БРИЗЕР АХМЕДИЕВА И ЕГО АНАЛОГИ

Бризер Ахмедиева [52] (рис. 16)

$$\tilde{\Upsilon}_1(X, T) = \left(1 + \frac{2k(k \cos(k\kappa T) + i\kappa \sin(k\kappa T))}{\sqrt{\kappa^2 - k^2} \cos(k\kappa T) - \kappa \operatorname{ch}(kX)} \right) e^{2i(\kappa^2 - k^2)t}, \quad (7.1)$$

где $X = 2x$, $T = 4t$, $k = \operatorname{sh} \theta$, $\kappa = \operatorname{ch} \theta$, легко может быть получен из солитона Кузнецова–Ма (6.1) заменой $\theta \rightarrow i\theta$.

Естественно, соответствующее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\tilde{\Upsilon}(x, t) = \left(1 + \frac{2k(k \cos(k\kappa T) + i\kappa \sin(k\kappa T))}{\cos(k\kappa T) - \kappa \operatorname{ch}(kX)} \right) e^{2i\alpha t + 6i\gamma_1 t + 20i\gamma_3 t}, \quad (7.2)$$

$$X = 2[x + (2 + 4\kappa^2)\beta t + (6 + 8\kappa^2 + 16\kappa^4)\gamma_2 t], \quad (7.3)$$

$$T = 4[\alpha t + (2 + 4\kappa^2)\gamma_1 t + (6 + 8\kappa^2 + 16\kappa^4)\gamma_3 t], \quad (7.4)$$

из этого решения могут быть получены решения всех рассмотренных выше уравнений иерархии АKNС и их комбинаций. В частности, отметим, что решения уравнений с нечетными номерами являются периодическими по t функциями, как и (7.1). В отличие от них, решения уравнений с четными номерами похожи на решения ранга 1. В качестве иллюстрации на рис. 17 приведено изображение амплитуды решения комплексного уравнения мКдФ (2.2)

$$\tilde{\Upsilon}_2(x, t) = 1 + \frac{2k(k \cos(k\kappa T) + i\kappa \sin(k\kappa T))}{\cos(k\kappa T) - \kappa \operatorname{ch}(2k(x - [2 + 4\kappa^2]t))}. \quad (7.5)$$

Если рассматривать решение уравнения Хироты (3.1), то его поведение также довольно очевидно. Это зависящие от параметров α и β гребни волн, расположенные периодически вдоль оси t . В то же время соответствующее решение уравнения Гарднера (5.8) является обычным солитоном:

$$u := \frac{2k^2}{\kappa \operatorname{ch}(2k[x - (2 + 4\kappa^2)t]) - 1}. \quad (7.6)$$

Решение уравнения КП-I (3.7)

$$u(x, y, t) = \frac{8k^2\kappa(\kappa - \cos(4k\kappa y) \operatorname{ch}(2[x - (4\kappa^2 - 1)t]))}{(\kappa \operatorname{ch}(2[x - (4\kappa^2 - 1)t]) - \cos(4k\kappa y))^2}, \quad (7.7)$$

соответствующее бризеру Ахмедиева, представляет собой периодически по y расположенные пики, бегущие вдоль оси x со скоростью $\dot{x} = 4\kappa^2 - 1$ (рис. 18).

Как всегда, самыми необычными являются решения уравнений цНШ (рис. 19)

$$U(\xi, \tau) = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2k(k \cos(4k\kappa/\tau) - i\kappa \sin(4k\kappa/\tau))}{\tau(\cos(4k\kappa/\tau) - \kappa \operatorname{ch}(2k\xi/\tau))} \right) e^{-i(\xi^2 - 8)/4\tau} \quad (7.8)$$

и цКП-I (рис. 20)

$$v(\xi, \eta, \tau) = \frac{8k^2\kappa(\kappa - \cos(4k\kappa\eta\tau) \operatorname{ch}(2k[\xi + \eta^2\tau/3 + (1 - 4\kappa^2)\tau]))}{(\kappa \operatorname{ch}(2k[\xi + \eta^2\tau/3 + (1 - 4\kappa^2)\tau]) - \cos(4k\kappa\eta\tau))^2}. \quad (7.9)$$

Рис. 16. Бризер Ахмедиева (7.1) при $\theta = 1$ (а) и $\theta = 0.5$ (б).

Рис. 17. Решение (7.5) при $\theta = 0.5$, $T = 1$.

Рис. 18. Решение (7.7) уравнения КП-I (3.7) при $\theta = 0.5$, $t = 0$. Рис. 19. Амплитуда решения (7.8) уравнения (3.5) при $\theta = 1$. Рис. 20. Решение (7.9) уравнения (3.8) при $\theta = 1$, $t = 0.5$.

Естественно, существует и решение Υ_θ уравнений иерархии АКНС вида (6.2) с комплексным значением параметра θ . Например, еще в работе 1998 года [53] солитон Кузнецова–Ма Υ (6.1), бризер Ахмедиева $\tilde{\Upsilon}$ (7.1) и их комплексное обобщение Υ_θ рассматривались как единое решение с разными значениями параметров. Единственное отличие бризера Υ_θ с комплексным θ от солитона Кузнецова–Ма Υ и бризера Ахмедиева $\tilde{\Upsilon}$ заключается в том, что пики этого решения расположены на некоторой наклонной прямой, задаваемой уравнением $Ax + Bt + C = 0$.

8. РЕШЕНИЯ РАНГА 2

При $n = 2$ решение (4.6) имеет уже четыре фазы и может быть записано в следующей форме [40]:

$$\Psi_2(X, T_1, T_2, T_3) = \left(1 - 12 \frac{G(X, T_1, T_2, T_3) + iH(X, T_1, T_2, T_3)}{Q(X, T_1, T_2, T_3)}\right) e^{2it_1 - 6it_3 + 20it_5}, \quad (8.1)$$

где

$$\begin{aligned} G(X, T_1, T_2, T_3) &= (X^2 + 3T_1^2 + 3)^2 - 4T_1^4 + 2XT_2 + 2T_1T_3 - 12, \\ H(X, T_1, T_2, T_3) &= T_1(X^2 + T_1^2 + 1)^2 + 2XT_1T_2 + T_3(T_1^2 - X^2 - 1) - 8T_1(X^2 + 2), \\ Q(X, T_1, T_2, T_3) &= (X^2 + T_1^2 + 1)^3 + T_2^2 + 2XT_2(3T_1^2 - X^2 + 3) + T_3^2 + \\ &\quad + 2T_1T_3(T_1^2 - 3X^2 + 9) + 24T_1^4 - 24T_1^2X^2 + \\ &\quad + 96T_1^2 + 24X^2 + 8. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \quad \varphi_2 = \frac{(\sqrt{5} + 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}, \quad X = 2x + 6\varphi_3 - 10\varphi_5, \\ T_1 &= 4t_1 + 8\varphi_4 - 12\varphi_6, \quad T_2 = 96\varphi_3 - 480\varphi_5, \quad T_3 = 192\varphi_4 - 768\varphi_6. \end{aligned}$$

Рассматривая последующие уравнения иерархии АКНС, находим, что, в отличие от решений ранга 1, в фазы φ_1 и φ_2 решения ранга 2 необходимо включить зависимость от высших времен. А именно, функция (8.1) является решением уравнений (2.1)–(2.5) при следующем выборе фаз:

$$\varphi'_1 = 3t_2, \quad \varphi'_2 = 4t_3 - 10t_5, \quad \varphi_3 = -t_2 + 10t_4, \quad \varphi_4 = -t_3 + 10t_5$$

или при

$$\begin{aligned} X &= 2x - 2\varphi'_1 + 6\varphi_3 - 10\varphi_5 = 2x - 12t_2 + 60t_4 + \dots, \\ T_1 &= 4t_1 - 4\varphi'_2 + 8\varphi_4 - 12\varphi_6 = 4t_1 - 24t_3 + 120t_5 + \dots, \\ T_2 &= 96\varphi_3 - 480\varphi_5 = -96t_2 + 960t_4 + \dots, \\ T_3 &= 192\varphi_4 - 768\varphi_6 = -192t_3 + 1920t_5 + \dots. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что первые две фазы четырехфазного решения ранга 2 полностью совпадают с фазами (5.3), (5.4) двухфазного решения ранга 1, т. е. и в двухфазном решении можно было бы придерживаться обозначений четырехфазного решения.

Рис. 21. Амплитуда решения (8.3) уравнения (2.1) при $T_2 = 0, T_3 = 0$ (а) и $T_2 = 0, T_3 = -960$ (б).

Рис. 22. Рациональное решение (8.5) вещественного уравнения мКдФ (5.6).

Соответственно, решение уравнения (3.4) определяется формулой

$$\Psi_2(X, T_1, T_2, T_3) = \left(1 - 12 \frac{G(X, T_1, T_2, T_3) + iH(X, T_1, T_2, T_3)}{Q(X, T_1, T_2, T_3)}\right) e^{2i(\alpha + 3\gamma_1 + 10\gamma_3)t}, \quad (8.2)$$

где

$$\begin{aligned} X &= 2[x + (6\beta + 30\gamma_2)t], & T_2 &= T_2(0) + 96(\beta + 10\gamma_2)t, \\ T_1 &= T_1(0) + 4(\alpha + 6\gamma_1 + 30\gamma_3)t, & T_3 &= T_3(0) + 192(\gamma_1 + 10\gamma_3)t, \end{aligned}$$

и, выбирая подходящим образом коэффициенты α , β , γ_j и начальные фазы $T_j(0)$, из решения (8.2) можно получить решения всех уравнений, связанных с уравнениями иерархии АКНС. В частности, полагая $\alpha = 1$, $\beta = \gamma_j = 0$, мы имеем хорошо известное [36]–[40] решение ранга 2 уравнения НШ (рис. 21)

$$P_2^1(x, t) = \left(1 - 12 \frac{G(2x, 4t, T_2, T_3) + iH(2x, 4t, T_2, T_3)}{Q(2x, 4t, T_2, T_3)}\right) e^{2it}, \quad (8.3)$$

которое при $T_2 = 0$ представляет собой четную по x функцию. При $T_2 \neq 0$ решение ранга 2 также имеет три пика, но расположенные на плоскости (x, t) уже не симметрично. Более подробно данное решение исследовано в работах [36]–[39].

Если же положить $\alpha = \gamma_j = 0$, $\beta = -1$, получаем решение ранга 2 комплексного уравнения мКдФ (2.2)

$$P_2^2(x, t) = 1 - 12 \frac{G(2x - 12t, T_1, -96t, T_3) + iH(2x - 12t, T_1, -96t, T_3)}{Q(2x - 12t, T_1, -96t, T_3)}, \quad (8.4)$$

которое при $T_1 = T_3 = 0$ дает вещественное рациональное решение

$$v(x, t) = 1 - 12 \frac{(X^2 + 3)^2 + 2T_2X - 12}{(X^2 + 1)^3 + T_2^2 - 2T_2X(X^2 - 3) + 24X^2 + 8} \quad (8.5)$$

вещественного уравнения мКдФ (5.6). Здесь $X = 2x - 12t$, $T_2 = -96t$.

Отметить, что вещественное рациональное решение ранга 2

$$u(x, t) = 1 - v(x, t) = 12 \frac{(X^2 + 3)^2 + 2T_2X - 12}{(X^2 + 1)^3 + T_2^2 - 2T_2X(X^2 - 3) + 24X^2 + 8} \quad (8.6)$$

уравнения Гарднера (5.8), в отличие от случая ранга 1, уже не является положительно определенной функцией. Рациональные решения ранга 2 вещественного уравнения мКдФ и уравнения Гарднера изображены на рис. 22 и рис. 23 соответственно.

Рис. 23. Рациональное решение (8.6) уравнения Гарднера (5.8).

Рис. 24. Амплитуда решения ранга 2 уравнения Хироты (3.1) при $\alpha = 1$, $\beta = 0.2$, $T_3 = 0$ (а) и $\alpha = 1$, $\beta = 0.2$, $T_3 = -960$ (б).

Рис. 25. Амплитуда решения (8.2) при $\beta = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\alpha = -6\gamma_1 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$ (а) и $\beta = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\alpha = -6\gamma_1 = 1$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0$ (б).

Как и следовало ожидать, решения ранга 2 уравнения Хироты (3.1), уравнения ЛПД (2.3) и других обобщений уравнения НШ, содержащих H_{2k+1} , также представляют собой три пика, сливающиеся при $T_j = 0$ в начале координат в единственный пик. В качестве примера на рис. 24 приведены изображения решений уравнения Хироты (3.1) при некоторых значениях параметров. Заметим, что изображения решений ранга 2 уравнения ЛПД (2.3) при различных значениях параметров T_j приведены в работе [40].

Вместе с тем существуют отдельные значения параметров, при которых решения принимают специальный вид. Например, решения (8.2), приведенные на рис. 25, за счет специального выбора параметров уравнения ($\beta = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ и $\alpha = -6\gamma_1 = 1$) имеют постоянную вторую фазу $T_1 = \text{const}$ при всех значениях x и t . Мы не будем приводить здесь изображения решения (8.2) при различных комбинациях параметров. Остановимся только на решении уравнения, содержащего H_4 (рис. 26),

Рис. 26. Амплитуда решения (8.2) при $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 0.1$, $T_1 = T_3 = 0$ (а) и $\alpha = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$, $\beta = -5\gamma_2 = -0.5$, $T_1 = T_3 = 0$ (б).

поскольку оно, как и решение (8.4) уравнения мКдФ (2.2), не является локализованным в ограниченной области плоскости (x, t) .

Отметим также, что решение ранга 2 уравнения КП-I

$$u(x, y, t) = \frac{48(6G^2(X, T_1, T_2, T_3) + 6H^2(X, T_1, T_2, T_3) - G(X, T_1, T_2, T_3)Q(X, T_1, T_2, T_3))}{Q^2(X, T_1, T_2, T_3)},$$

где $X = 2x - 6t$, $T_1 = 4y$, $4T_2 = -96t$, описано в работах [36]–[39], а в Интернете¹⁾ даже имеются ссылки на фильмы с этим решением. Поэтому мы не видим необходимости приводить изображение этого решения в настоящей работе. Что касается решений ранга 2 для цилиндрических вариантов уравнений НШ и КП-I, то мы их опустим для краткости, поскольку любой желающий может получить данные решения, используя имеющиеся в работе формулы.

¹⁾<http://iopscience.iop.org/0951-7715/26/12/R93/media>

9. ОДНОФАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ

Поскольку алгебро-геометрические решения могут иметь произвольное число фаз, а все рассмотренные выше решения имеют четное число фаз, то в настоящем разделе мы рассмотрим решение с минимальным нечетным количеством фаз, т. е. однофазное решение. Однофазное решение уравнения (2.1), соответствующее нашему анзацу, должно иметь вид

$$\hat{\Psi} = f(X)e^{2it}, \quad X = 2x, \quad (9.1)$$

где $f(X)$ – гладкая действительная функция при $X \in \mathbb{R}$. Подставляя (9.1) в (2.1) и упрощая, получаем

$$4f'' + 2f^3 - 2f = 0$$

или

$$4(f')^2 + f^4 - 2f^2 = C. \quad (9.2)$$

Если $C \neq 0$, то решением уравнения (9.2) является эллиптическая функция Якоби [54]. Поскольку все эллиптические функции Якоби переходят друг в друга при сдвиге аргумента, то, не теряя общности, мы можем из них выбрать ту, которая удовлетворяет условию $f(X) > 0$ при $X \in \mathbb{R}$, т. е. взять

$$f(X) = 2\kappa \operatorname{dn}(\kappa X; k), \quad (9.3)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{4 - 2k^2}}, \quad C = -\frac{4(1 - k^2)}{(2 - k^2)^2}, \quad 0 < k < 1.$$

Исходя из результатов предыдущих разделов можно предположить, что, поскольку функция (9.1), (9.3) является решением уравнения (2.1), то однофазным решением уравнения (3.4) является функция

$$\hat{\Psi} = 2\kappa \operatorname{dn}(\kappa X; k)e^{2i\alpha t + im_1\gamma_1 t + im_3\gamma_3 t}, \quad (9.4)$$

где

$$X = 2[x + (m_0\beta + m_2\gamma_2)t],$$

а $m_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, 3$, – некоторые постоянные, зависящие от κ . После подстановки (9.4) в (3.4) и упрощения получаем

$$m_0 = 2, \quad m_1 = m_2 = 4 + 16\kappa^2(1 - 2\kappa^2), \quad m_3 = 8 + 96\kappa^2(1 - 2\kappa^2).$$

Решение (9.4) имеет два предельных случая. Если $k = 0$ ($\kappa = 1/2$, $C = -1$), то из уравнения (9.2) следует $f(X) \equiv 1$ и

$$\hat{\Psi} = e^{2i\alpha t + 6i\gamma_1 t + 20i\gamma_3 t}. \quad (9.5)$$

Решая уравнение (9.2) при $k = 1$, т. е. при $C = 0$ и $\kappa = 1/\sqrt{2}$, получаем, что соответствующее предельное значение функции $f(X)$ равно

$$f(X) = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}(X/\sqrt{2})},$$

а однофазное решение уравнения (3.4) при данном выборе параметров имеет вид солитона:

$$\hat{\Psi} = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}(\sqrt{2}[x + (2\beta + 4\gamma_2)t])} e^{2i\alpha t + 4i\gamma_1 t + 8i\gamma_3 t}. \quad (9.6)$$

Анализируя результат вырождения эллиптического однофазного решения (9.4) в квазирациональное решение (9.5), можно предположить, что вырождения других алгебро-геометрических решений с нечетным числом фаз в квазирациональные решения будут происходить также с потерей одной фазы, т. е. из $(2n + 1)$ -фазного алгебро-геометрического решения будет получаться $2n$ -фазное квазирациональное решение.

Заметим, что показатель экспоненты в решении (9.5) совпадает с показателями экспонент остальных квазирациональных решений и отличается от показателя экспоненты у солитона (9.6). Солитон Кузнецова–Ма (6.2) и бризер Ахмедиева (7.2) имеют тот же показатель экспоненты, что и все рассмотренные квазирациональные решения. Поэтому мы предполагаем, что существуют по крайней мере два различных класса решений, выражающихся через элементарные функции. Интересно, что это различие возникает только при рассмотрении решений высших уравнений иерархии АКНС.

10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из-за большого объема статьи и большого количества графиков часть материала пришлось опустить. В частности, мы не рассматривали четырехфазные двухбризерные и шестифазные квазирациональные решения ранга 3 уравнений иерархии АКНС и других, связанных с ними уравнений. Эти решения мы планируем изучить в последующей работе. Также мы планируем отдельно рассмотреть эллиптические по x четырехфазные решения уравнений иерархии АКНС и проанализировать вырождения трехфазного алгебро-геометрического решения [10], [12] в решения, выражающиеся через элементарные функции.

Список литературы

- [1] А. Р. Итс, В. П. Котляров, *Докл. АН УССР. Сер. А*, **11** (1976), 965–968.
- [2] А. Р. Итс, *Вестн. ЛГУ. Сер. Матем., мех., астрон.*, **7:2** (1976), 39–46.
- [3] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Evolution Equations*, Springer, Berlin, 1994.
- [4] А. О. Смирнов, *Матем. сб.*, **185:8** (1994), 103–114.
- [5] А. О. Смирнов, *ТМФ*, **107:2** (1996), 188–200.
- [6] А. О. Смирнов, *Матем. сб.*, **188:1** (1997), 109–128.
- [7] А. О. Смирнов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **398** (2012), 209–222.
- [8] А. О. Смирнов, *ТМФ*, **173:1** (2012), 89–103.
- [9] А. О. Смирнов, *Матем. заметки*, **94:6** (2013), 871–883.
- [10] А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв, *Нелинейная динам.*, **9:3** (2013), 389–407.
- [11] A. O. Smirnov, E. G. Semenova, V. Zinger, N. Zinger, “On a periodic solution of the focusing nonlinear Schrödinger equation”, arXiv:1407.7974.
- [12] A. O. Smirnov, S. G. Matveenko, S. K. Semenov, E. G. Semenova, *SIGMA*, **11** (2015), 032, 14 pp., arXiv:1412.1562 .
- [13] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **101** (1981), 64–76.
- [14] А. Р. Итс, А. В. Рыбин, М. А. Салль, *ТМФ*, **74:1** (1988), 29–45.
- [15] Г. Л. Алфимов, А. Р. Итс, Н. Е. Кулагин, *ТМФ*, **84:2** (1990), 163–172.
- [16] M. Lakshmanan, K. Porsezian, M. Daniel, *Phys. Lett. A*, **133:9** (1988), 483–488.
- [17] K. Porsezian, M. Daniel, M. Lakshmanan, *J. Math. Phys.*, **33:5** (1992), 1807–1816.
- [18] M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan, *Phys. Lett. A*, **174:3** (1993), 237–240.
- [19] R. Hirota, *J. Math. Phys.*, **14:7** (1973), 805–809.

- [20] C. Q. Dai, J. F. Zhang, *J. Phys. A*, **39**:4 (2006), 723–737.
- [21] A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **81**:4 (2010), 046602, 8 pp.
- [22] L. Li, Z. Wu, L. Wang, J. He, *Ann. Phys.*, **334** (2013), 198–211, arXiv:1304.7164.
- [23] C. Z. Li, J. S. He, K. Porsezian, *Phys. Rev. E*, **87**:1 (2013), 012913, 13 pp.
- [24] L. H. Wang, K. Porsezian, J. S. He, *Phys. Rev. E*, **87**:5 (2013), 053202, 10 pp., arXiv:1304.8085.
- [25] A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Lett. A*, **378**:4 (2014), 358–361.
- [26] A. Chowdury, D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **91**:2 (2015), 022919, 11 pp.
- [27] A. Kundu, A. Mukherjee, T. Naskar, *Proc. R. Soc. London A*, **470**:2164 (2014), 20130576, 20 pp.
- [28] G. P. Leclert, C. F. F. Karney, A. Bers, D. J. Kaup, *Phys. Fluids*, **22** (1979), 1545–1553.
- [29] X. Jukui, L. He, *Phys. Plasmas*, **10**:2 (2003), 339–342.
- [30] R. Sabry, S. K. El-Labany, P. K. Shukla, *Phys. Plasmas*, **15**:12 (2008), 122310, 8 pp.
- [31] R. Sabry, W. M. Moslem, P. K. Shukla, H. Saleem, *Phys. Rev. E*, **79**:5 (2009), 056402, 6 pp.
- [32] R. Sabry, W. M. Moslem, P. K. Shukla, *Eur. Phys. J. D*, **51**:2 (2009), 233–240.
- [33] R. Fedele, S. De Nicola, D. Jovanović, D. Grecu, A. Visinescu, *J. Plasma Phys.*, **76**:3–4 (2010), 645–653.
- [34] A. T. Grecu, S. De Nicola, R. Fedele, D. Grecu, A. Visinescu, *AIP Conf. Proc.*, **1203**:1 (2010), 1239–1244.
- [35] R. Fedele, A. Mannan, F. Tanjia, S. De Nicola, D. Jovanović, L. Gianfrani, *J. Plasma Phys.*, **79**:4 (2013), 443–446.
- [36] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 247–261.
- [37] P. Dubard, *Multi-rogue solutions to the focusing NLS equation*, Ph. D. Thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, 2010, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00625446/document>.
- [38] P. Dubard, V. B. Matveev, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **11**:3 (2011), 667–672.
- [39] P. Dubard, V. B. Matveev, *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), R93–R125.
- [40] B. B. Матвеев, Ф. Дюбард, А. О. Смирнов, *Нелинейная динам.*, **11**:2 (2015), 219–240.
- [41] B. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp, *Phys. Lett. A*, **157**:1 (1991), 17–21.
- [42] Y. Cheng, Y.-S. Li, *Phys. Lett. A*, **157**:1 (1991), 22–26.
- [43] R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.*, **97**:4 (1980), 701–719.
- [44] В. Д. Липовский, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **150** (1986), 70–75.
- [45] К. Клейн, В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 304–320.
- [46] K. R. Khusnutdinova, C. Klein, V. B. Matveev, A. O. Smirnov, *Chaos*, **23**:1 (2013), 013126, 13 pp.
- [47] В. М. Елеонский, И. М. Кричевер, Н. Е. Кулагин, *Докл. АН СССР*, **287**:3 (1986), 606–610.
- [48] D. H. Peregrine, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25**:1 (1983), 16–43.
- [49] A. R. Osborne, *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform*, International Geophysics Series, **97**, Academic Press, Boston, MA, 2010.
- [50] Е. А. Кузнецов, *Докл. АН СССР*, **236**:1–3 (1977), 575–577.
- [51] Y.-C. Ma, *Stud. Appl. Math.*, **60**:1 (1979), 43–58.
- [52] Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 189–194.
- [53] M. Tajiri, Y. Watanabe, *Phys. Rev. E*, **57**:3 (1998), 3510–3519.
- [54] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.