Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Жунь-Лян Линь, Тянь-Чэн Цао, Сяо-Цзюн Лю, Юнь-Бо Цзэн, Билинейные тождества для расширенной иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа В, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 3, 357–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8959>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 08:26:09

© 2016 г.

Жунь-Лян Линь*, Тянь-Чэн Цао*,
Сяо-Цзюнь Лю†, Юнь-Бо Цзен*

БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ ТИПА В

Построены билинейные тождества для волновых функций расширенной иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа В, содержащей два типа $(2 + 1)$ -мерных уравнений Савады–Котеры с самосогласованным источником. С помощью введения вспомогательной переменной, соответствующей расширенному потоку иерархии, найдены тау-функция и билинейные тождества для этой расширенной иерархии, которые порождают все билинейные уравнения Хироты для форм нулевой кривизны данной иерархии. В качестве примера получены в явном виде билинейные уравнения Хироты для двух типов $(2 + 1)$ -мерных уравнений Савады–Котеры.

Ключевые слова: иерархия Кадомцева–Петвиашвили типа В, самосогласованный источник, билинейное тождество, тау-функция, билинейная форма Хироты.

DOI: 10.4213/tmf8959

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известная иерархия Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1], [2] – это бесконечномерная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащая различные типы солитонных уравнений. Иерархия КП типа В [3], [1] (ВКР-иерархия для краткости) – это подиерархия системы КП. ВКР-иерархия допускает различные интегрируемые структуры (см., например, работы [1], [4], [5] и ссылки в них), такие как формализм Лакса, тау-функция, билинейные уравнения Хироты и др.

При изучении интегрируемых систем фундаментальное значение имеет теория Сато. Согласно этой теории имеется бесконечномерная грассманова структура на

Работа написана при поддержке National Natural Science Foundation of China (гранты № 11471182, 11171175, 11201477).

*Department of Mathematical Sciences, School of Sciences, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail: rlin@math.tsinghua.edu.cn, ctc12@mails.tsinghua.edu.cn, yzeng@math.tsinghua.edu.cn

†Department of Applied Mathematics, China Agricultural University, Beijing, China.
E-mail: xjliu@cau.edu.cn

пространстве тау-функций, где тау-функции являются решениями билинейной формы Хироты иерархии КП. Билинейное тождество для вычетов волновой и сопряженной волновой функций играет важную роль в доказательстве существования тау-функции, а также определяет производящую функцию билинейных уравнений Хироты для иерархии КП [5]–[7].

В исследовании интегрируемых систем важными составляющими являются редукции и обобщения. Существует несколько возможностей обобщения, например построение новых потоков с целью расширения исходной системы. Добавить новые потоки и получить новые совместные интегрируемые системы можно различными способами. В работе [8] иерархия КП расширена путем подходящего комбинирования дополнительных потоков. В работе [9] расширение иерархии КП производится с помощью введения псевдодифференциальных операторов дробного порядка. В статьях [10], [11] мойал-деформированная иерархия расширена путем включения дополнительных эволюционных уравнений относительно параметров деформации. В работе [12] был определен логарифм разностного оператора Лакса и получена расширенная $(2+1)$ -мерная иерархия Тоды. Позднее билинейный формализм Хироты и соотношения расширенной $(2+1)$ -мерной и одномерной иерархий Тоды изучались в статьях [13], [14]. В работе [15] изучались тау-функции и билинейные тождества для расширенной биградуированной иерархии Тоды. В работе [16] был представлен дискретный аналог симметрично ограниченной иерархии КП.

Солитонные уравнения с самосогласованными источниками имеют множество физических приложений (см., например, труды [17]–[23] и ссылки в них). В частности, скорость солитонов можно менять с помощью источников [19], [23]. Недавно было показано, что конструкция солитонных уравнений с самосогласованными источниками связана с так называемой симметрией квадратов собственных функций и бинарным преобразованием Дарбу исходной солитонной иерархии [24], [25]. В статье [26] построение расширенной ВКР-иерархии проведено на основании идей из работы [27] с помощью симметрий производящих функций (или симметрий квадратов собственных функций) и построены два вида новых многокомпонентных ВКР-иерархий; обсуждаются их n -редукция и k -ограничение. Этот тип расширенной ВКР-иерархии может рассматриваться как обобщение ВКР-иерархии путем введения симметрий квадратов собственных функций.

Полученная в работе [26] расширенная ВКР-иерархия включает два типа $(2+1)$ -мерного уравнения Савады–Котеры с самосогласованным источником (2d-СКСИ-I и 2d-СКСИ-II), где уравнение 2d-СКСИ-I совпадает с уравнением, полученным в [28] с помощью метода генерации источника. В статье [27] мы предложили метод построения расширенной иерархии КП, затем билинейные соотношения для этой расширенной иерархии были построены в [25]. Билинейные уравнения Хироты получены для всех форм нулевой кривизны в расширенной иерархии КП путем введения вспомогательного потока. По-видимому, билинейные уравнения Хироты, полученные в работе [25], имеют более простую форму по сравнению с предыдущими результатами [29].

В настоящей статье мы строим билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии из работы [26]. Эти билинейные тождества генерируют все билинейные

формы Хироты для уравнений нулевой кривизны данной расширенной ВКР-иерархии. В качестве примера мы выводим билинейные формы Хироты для уравнений 2d-СКСИ-I и 2d-СКСИ-II. Насколько нам известно, билинейные уравнения для 2d-СКСИ-II прежде в литературе не появлялись.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 строятся билинейные тождества для ВКР-иерархии с симметрией квадратов собственных функций (или “призрачной симметрией”). В разделе 3, рассматривая симметрию квадратов собственных функций как вспомогательный поток, мы строим билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии и доказываем, что данная иерархия полностью описывается этими билинейными тождествами. В разделе 4 мы вводим тау-функцию для расширенной ВКР-иерархии и находим производящие функции для билинейной формы Хироты расширенной ВКР-иерархии. В разделе 5 в случае уравнений 2d-СКСИ-I и 2d-СКСИ-II мы преобразовываем билинейную форму Хироты обратно в нелинейные уравнения в частных производных, что подтверждает корректность нашего построения. В заключительном разделе 6 приведены выводы и замечания.

2. БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ВКР-ИЕРАРХИИ С “ПРИЗРАЧНОЙ СИММЕТРИЕЙ”

Напомним некоторые обозначения, касающиеся псевдодифференциальных операторов. Для псевдодифференциального оператора $P = \sum_{i=-\infty}^n a_i \partial^i$, где $\partial := \partial_x$, обозначим его неотрицательную часть, отрицательную часть и сопряженный оператор соответственно как

$$P_+ = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i, \quad P_- = \sum_{i<0}^n a_i \partial^i, \quad P^* = \sum_{i=-\infty}^n (-\partial)^i a_i$$

и положим $\text{res}_\partial(P) = a_{-1}$. Для рядов Лорана $f(\lambda) = \sum_i c_i \lambda^i$ мы также введем обозначение $\text{res}_\lambda f(\lambda) = c_{-1}$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор $L := \partial + \sum_{i=1}^\infty u_i \partial^{-i}$ и положим $B_n := (L^n)_+$, тогда ВКР-иерархия определяется как [1]

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.1a)$$

со связью

$$L^* = -\partial L \partial^{-1}. \quad (2.1b)$$

Условие связи (2.1b) эквивалентно $B_n \cdot 1 = 0$, $n = 1, 3, 5, \dots$ [3], [1]. Следуя идеям работ [30] и [25], мы можем ввести новый ∂_z -поток как

$$\partial_z L = [r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x, L], \quad (2.2a)$$

где функции q и r удовлетворяют уравнениям

$$q_{t_n} = B_n(q), \quad r_{t_n} = B_n(r), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.2b)$$

и называются собственными функциями [7], [31]. При этом сопряженные собственные функции q^* и r^* удовлетворяют уравнениям $q_{t_n}^* = -B_n^*(q^*)$ и $r_{t_n}^* = -B_n^*(r^*)$. Заметим, что в качестве сопряженных собственных функций можно взять q_x и r_x ,

тогда гарантирована совместность ∂_z -потока (2.2a) и ∂_{t_n} -потоков (2.16). ∂_z -Поток описывает симметрию для ВКР-иерархии, которая называется *симметрией квадратов собственных функций* [30], или *призрачным потоком* [32], [33].

Введем одевающий оператор

$$W = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(z, t) \partial^{-i}, \quad t = (t_1, t_3, \dots), \quad t_1 \equiv x,$$

такой, что $L = W \partial W^{-1}$, где W удовлетворяет t_n -эволюционным уравнениям

$$\partial_{t_n} W = -(W \partial^n W^{-1})_- W = -L_-^n W, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Тогда в силу условия связи (2.16) мы имеем $W^* \partial W = \partial$. Одевающий оператор W также удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial_z W = (r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x) W. \quad (2.3)$$

Определим волновую и сопряженную волновую функции

$$\begin{aligned} w(z, t, \lambda) &= W e^{\xi(t, \lambda)}, & w^*(z, t, \lambda) &= (W^*)^{-1} e^{-\xi(t, \lambda)}, \\ \xi(t, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} \lambda^{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти волновые функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} Lw(z, t, \lambda) &= \lambda w(z, t, \lambda), & \partial_{t_n} w(z, t, \lambda) &= B_n w(z, t, \lambda), \\ L^* w^*(z, t, \lambda) &= \lambda w^*(z, t, \lambda), & \partial_{t_n} w^*(z, t, \lambda) &= -B_n^* w^*(z, t, \lambda). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Напомним важную лемму (детали и доказательство см. в книге [2]), которую будем использовать при доказательстве наших утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть P и Q – псевдодифференциальные операторы, тогда

$$\text{res}_{\partial} P \cdot Q^* = \text{res}_{\lambda} P(e^{\xi(t, \lambda)}) \cdot Q(e^{-\xi(t, \lambda)}). \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА 1. ВКР-иерархия (2.1) с симметрией квадратов собственных функций (2.2) эквивалентна следующим тождествам для вычетов:

$$\text{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z, t, \lambda) w(z, t', -\lambda) = 1, \quad (2.7a)$$

$$\text{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w_z(z, t, \lambda) w(z, t', -\lambda) = q(z, t) r(z, t') - r(z, t) q(z, t'), \quad (2.7b)$$

$$\text{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z, t, \lambda) \cdot \partial_{x'}^{-1} (q(z, t') w_{x'}(z, t', -\lambda)) = q(z, t), \quad (2.7b)$$

$$\text{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z, t, \lambda) \cdot \partial_{x'}^{-1} (r(z, t') w_{x'}(z, t', -\lambda)) = r(z, t), \quad (2.7\Gamma)$$

где оператор, обратный к ∂ , следует понимать как псевдодифференциальный оператор, действующий на экспоненту, например $\partial^{-1}(r w_x) = (\partial^{-1} r \partial W)(e^{\xi(t, \lambda)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Билинейное тождество (2.7a) из ВКР-иерархии было уже доказано в работах [3], [1], в данном случае z можно рассматривать как фиксированный параметр. Из соотношений (2.26) и (2.5) мы знаем, что смешанные частные

производные $\partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k}$ (где $k = 1, 3, 5, \dots$) функций $w(z, t, \lambda)$, $q(z, t)$ и $r(z, t)$ могут быть также записаны в терминах дифференциальных операторов $P_{m_1 \dots m_k}$:

$$\begin{aligned}\partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} w(z, t, \lambda) &= P_{m_1 \dots m_k}(w(z, t, \lambda)), \\ \partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} q(z, t) &= P_{m_1 \dots m_k}(q(z, t)), \\ \partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} r(z, t) &= P_{m_1 \dots m_k}(r(z, t)).\end{aligned}$$

Заметим, что оператор $P_{m_1 \dots m_k}$ не содержит свободный член. Для доказательства соотношения (2.76) осталось воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned}\text{res}_\lambda \lambda^{-1} w_z(z, t, \lambda) \partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} w(z, t, -\lambda) &= \\ = \text{res}_\lambda (r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x) W e^{\xi(t, \lambda)} P_{m_1 \dots m_k} W (-\partial^{-1}) e^{-\xi(t, \lambda)} &= \\ = \text{res}_\partial (r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x) W \partial^{-1} W^* P_{m_1 \dots m_k}^* = \text{res}_\partial (r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x) \partial^{-1} P_{m_1 \dots m_k}^* &= \\ = q P_{m_1 \dots m_k} \partial^{-1} r_x - r P_{m_1 \dots m_k} \partial^{-1} q_x = q P_{m_1 \dots m_k}(r) - r P_{m_1 \dots m_k}(q).\end{aligned}$$

Это доказывает (2.76).

Заметим, что для любого $P_{m_1 \dots m_k}$, определенного выше, мы имеем

$$\begin{aligned}\text{res}_\lambda \partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} \lambda^{-1} w(z, t, \lambda) \cdot \partial^{-1} (q(z, t) w_x(z, t, -\lambda)) &= \\ = \text{res}_\lambda P_{m_1 \dots m_k} (\lambda^{-1} w(z, t, \lambda)) \cdot \partial^{-1} (q(z, t) w_x(z, t, -\lambda)) &= \\ = \text{res}_\lambda P_{m_1 \dots m_k} W \partial^{-1} e^{\xi(t, \lambda)} \cdot \partial^{-1} q(z, t) \partial W e^{-\xi(t, \lambda)} &= \\ = \text{res}_\partial P_{m_1 \dots m_k} W \partial^{-1} \cdot (\partial^{-1} q(z, t) \partial W)^* = \text{res}_\partial P_{m_1 \dots m_k} W \partial^{-1} W^* (-\partial) q(z, t) (-\partial)^{-1} &= \\ = \text{res}_\partial P_{m_1 \dots m_k} q(z, t) \partial^{-1} = P_{m_1 \dots m_k}(q(z, t)) = \partial_{t_1}^{m_1} \partial_{t_3}^{m_3} \dots \partial_{t_k}^{m_k} q(z, t).\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем

$$q(z, t') = \text{res}_\lambda \lambda^{-1} w(z, t', \lambda) \cdot \partial^{-1} (q(z, t) w_x(z, t, -\lambda))$$

и аналогично

$$r(z, t') = \text{res}_\lambda \lambda^{-1} w(z, t', \lambda) \cdot \partial^{-1} (r(z, t) w_x(z, t, -\lambda)).$$

Тогда тождества (2.7в) и (2.7г) доказываются перестановкой t и t' .

Вторая часть доказательства этой теоремы записывается в форме следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если функции $q(z, t)$, $r(z, t)$ и волновая функция

$$w(z, t, \lambda) = W e^{\xi(t, \lambda)}, \quad \text{где} \quad W = 1 + \sum_{i \geq 1} w_i(z, t) \lambda^{-i},$$

удовлетворяют тождествам (2.7) относительно вычетов, то псевдодифференциальный оператор $L = W \partial W^{-1}$ и функции $q(z, t)$, $r(z, t)$ являются решением ВКР-иерархии (2.1) с симметрией квадратов собственных функций (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.1) можно получить из тождества (2.7а) (см. работы [3], [1]). Первое и второе из соотношений (2.26) можно доказать, взяв производную ∂_{t_n} от тождеств (2.7в) и (2.7г) соответственно.

Условие (2.2а) можно вывести из (2.76) следующим образом. Легко показать, что $(W_z W^{-1})_+ = 0$. Заметим, что сопряженная волновая функция $w^*(z, t, \lambda)$ может быть записана как

$$w^*(z, t, \lambda) := (W^*)^{-1} e^{-\xi(t, \lambda)} = \partial W \partial^{-1} e^{-\xi(t, \lambda)} = -\lambda^{-1} w_x(z, t, -\lambda),$$

тогда из (2.76) мы получаем

$$\text{res}_\lambda w_z(z, t, \lambda) w^*(z, t', \lambda) = r(z, t) q_{x'}(z, t') - q(z, t) r_{x'}(z, t').$$

Более того, мы имеем

$$\begin{aligned} \text{res}_\partial W_z W^{-1} \partial^m &= \text{res}_\lambda W_z e^{\xi(t, \lambda)} (-\partial)^m W^{*-1} e^{-\xi(t, \lambda)} = \\ &= \text{res}_\lambda w_z(z, t, \lambda) (-\partial)^m w^*(z, t, \lambda) = r(-\partial)^m q_x - q(-\partial)^m r_x, \end{aligned}$$

и это означает, что

$$W_z W^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (r(-\partial)^m (q_x) - q(-\partial)^m (r_x)) \partial^{-m-1} = r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x.$$

Следовательно, выполняется уравнение (2.3), что влечет (2.2а).

3. БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ ВКР-ИЕРАРХИИ

В работе [26] расширенная ВКР-иерархия вводится с использованием симметрии квадратов собственных функций, как в (2.2а), а также найдены два типа ВКР-иерархий с самосогласованными источниками и получено их представление Лакса.

Напомним, что расширенная ВКР-иерархия здесь (для фиксированного нечетного $k \neq 1$) имеет вид

$$\partial_{\bar{t}_k} L = [B_k + r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x, L], \quad (3.1a)$$

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad L^* = -\partial L \partial^{-1}, \quad (3.16)$$

$$q_{t_n} = B_n(q), \quad r_{t_n} = B_n(r), \quad (3.1b)$$

где $n = 1, 3, 5, \dots$, $n \neq k$, а q и r – собственные функции. Эта иерархия строится путем замены произвольного фиксированного k -го потока ∂_{t_k} на $\partial_{\bar{t}_k}$, где поток $\partial_{\bar{t}_k}$ – это линейная комбинация потоков ∂_{t_k} и ∂_z .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для упрощения обозначений в этом и последующих разделах мы продолжим использовать обозначения $w(z, t, \lambda)$, $w^*(z, t, \lambda)$, $q(z, t)$, $r(z, t)$, L , W и т. д., но теперь они будут рассматриваться как функции расширенной ВКР-иерархии (3.1). Например, с этого момента $t = (t_1, t_3, \dots, t_{k-2}, \bar{t}_k, t_{k+2}, \dots)$, где k – фиксированное нечетное число.

В работах [5], [34] построены билинейные уравнения Хироты для ВКР-иерархии (3.1) со связями. Естественная задача состоит в том, чтобы найти билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии (3.1), потому что билинейные тождества представляют способ систематически генерировать все билинейные уравнения Хироты в расширенной ВКР-иерархии (3.1). В этом разделе мы детально объясняем способ, с помощью которого выводятся билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии (3.1).

Одевающий оператор W задается как

$$W = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(z, t) \partial^{-i}, \quad t = (t_1, t_3, \dots, t_{k-2}, \bar{t}_k, t_{k+2}, \dots), \quad t_1 \equiv x,$$

и удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{t}_k} W = -L_-^k W + (r \partial^{-1} q_x - q \partial^{-1} r_x) W.$$

Волновая функция и ее сопряженная определяются, как и ранее, формулами (2.4), за исключением того, что теперь $\xi(t, \lambda) = \bar{t}_k \lambda^k + \sum_{n \neq k} t_n \lambda^n$ (здесь k и n нечетные). Волновая и сопряженная волновая функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} Lw(z, t, \lambda) &= \lambda w(z, t, \lambda), & \partial_{t_n} w(z, t, \lambda) &= B_n w(z, t, \lambda), \\ L^* w^*(z, t, \lambda) &= \lambda w^*(z, t, \lambda), & \partial_{t_n} w^*(z, t, \lambda) &= -B_n^* w^*(z, t, \lambda) \end{aligned} \quad (3.2)$$

(здесь $n \neq k$).

Тогда мы имеем билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Билинейные тождества для расширенной ВКР-иерархии (3.1) задаются как следующие тождества относительно вычетов со вспомогательной переменной z :*

$$\operatorname{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) w(z - \bar{t}'_k, t', -\lambda) = 1, \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w_z(z - \bar{t}_k, t, \lambda) w(z - \bar{t}'_k, t', -\lambda) &= \\ = q(z - \bar{t}_k, t) r(z - \bar{t}'_k, t') - r(z - \bar{t}_k, t) q(z - \bar{t}'_k, t'), \end{aligned} \quad (3.3б)$$

$$\operatorname{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) \cdot \partial_{x'}^{-1} (q(z - \bar{t}'_k, t') w_{x'}(z - \bar{t}'_k, t', -\lambda)) = q(z - \bar{t}_k, t), \quad (3.3в)$$

$$\operatorname{res}_{\lambda} \lambda^{-1} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) \cdot \partial_{x'}^{-1} (r(z - \bar{t}'_k, t') w_{x'}(z - \bar{t}'_k, t', -\lambda)) = r(z - \bar{t}_k, t). \quad (3.3г)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\frac{d}{d\bar{t}_k} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) = (\partial_{\bar{t}_k} - \partial_z) w(z, t, \lambda) \Big|_{z=z-\bar{t}_k} = B_k(w(z - \bar{t}_k, t, \lambda)), \quad (3.4)$$

следовательно, тождество (3.3a) может быть доказано так же, как для случая обычной ВКР-иерархии [3], [1].

Доказательства тождеств (3.3б)–(3.3г) схожи с доказательствами в случае тождеств (2.7б)–(2.7г), следует только учесть (3.4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть

$$w(z, t, \lambda) = W e^{\xi(t, \lambda)}, \quad \text{где} \quad W = 1 + \sum_{i \geq 1} w_i(z, t) \lambda^{-i},$$

и функции $q(z, t)$, $r(z, t)$ удовлетворяют билинейным тождествам (3.3). Тогда псевдодифференциальный оператор $L = W\partial W^{-1}$ и функции $q(z, t)$, $r(z, t)$ удовлетворяют расширенной ВКР-иерархии (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3], что из (3.3a) следует связь $W^*\partial W = \partial$ или, что эквивалентно, $L^* = -\partial L\partial^{-1}$ (см. (3.16)). Мы можем определить функцию, сопряженную волновой функции $w(z, t, \lambda)$, как $w^*(z, t, \lambda) = (W^{-1})^*e^{-\xi(t, \lambda)}$. Тогда в силу равенства $W^*\partial W = \partial$ мы получаем $w^*(z, t, \lambda) = -\lambda^{-1}w_x(z, t, -\lambda)$. Аналогично доказательству утверждения 1 из тождества (3.3б) мы получаем, что $W_z = (r\partial^{-1}q_x - q\partial^{-1}r_x)W$.

Можно показать, что верны равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_k} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) &= \left(\frac{d}{dt_k} W + L^k W \right) e^{\xi(t, \lambda)}, \\ \text{res}_\lambda w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) \lambda^{-1} w_{x'}(z - \bar{t}'_k, t', -\lambda) &= -\text{res}_\lambda w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) w^*(z - \bar{t}'_k, t', \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты ряда Тейлора для последнего равенства, мы находим, что для любого положительного целого m

$$\begin{aligned} 0 &= \text{res}_\lambda \frac{d}{dt_k} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) \cdot \partial^m w^*(z - \bar{t}_k, t, \lambda) = \\ &= \text{res}_\lambda \left(\frac{d}{dt_k} W + L^k W \right) e^{\xi(t, \lambda)} \cdot \partial^m (W^{-1})^* e^{-\xi(t, \lambda)} = \\ &= \text{res}_\partial \left(\frac{d}{dt_k} W + L^k W \right) \cdot (\partial^m (W^{-1})^*)^* = \\ &= \text{res}_\partial \left(\frac{d}{dt_k} W + L^k_- W \right) W^{-1} (-\partial)^m, \end{aligned}$$

и это означает, что $dW/dt_k = -L^k_- W$. Следовательно, остается верным равенство $\partial_{\bar{t}_k} W = -L^k_- W + (r\partial^{-1}q_x - q\partial^{-1}r_x)W$, поэтому мы получаем уравнение (3.1a).

Для уравнений (3.1б) доказательства могут быть проведены непосредственным дифференцированием тождеств (3.3в) и (3.3г), поскольку мы уже доказали справедливость (3.1б) и, следовательно, (3.2).

4. ТАУ-ФУНКЦИЯ ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ ВКР-ИЕРАРХИИ

Существование тау-функции для обычной ВКР-иерархии доказано в работе [1]. Согласно статьям [6] и [25] подобные предположения могут быть сделаны и для расширенной ВКР-иерархии (3.1):

$$\begin{aligned} w(z - \bar{t}_k, t, \lambda) &= \frac{\tau(z - \bar{t}_k + 2/k\lambda^k, t - 2[\lambda])}{\tau(z - \bar{t}_k, t)} e^{\xi(t, \lambda)}, \\ q(z, t) &= \frac{\sigma(z, t)}{\tau(z, t)}, \quad r(z, t) = \frac{\rho(z, t)}{\tau(z, t)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $[\lambda] = (1/\lambda, 1/3\lambda^3, 1/5\lambda^5, \dots)$.

Как и в работе [5], можно заметить, что $w^*(z - \bar{t}_k, t, \lambda) = -\lambda^{-1}w_x(z - \bar{t}_k, t, -\lambda)$.
Имеем

$$\begin{aligned}\partial^{-1}(r(z - \bar{t}_k, t)w^*(z - \bar{t}_k, t, \lambda)) &= -\frac{1}{2\lambda\tau^2(z - \bar{t}_k, t)} \times \\ &\times \left\{ \rho(z - \bar{t}_k, t)\tau\left(z - \bar{t}_k - \frac{2}{k\lambda^k}, t + 2[\lambda]\right) + \rho(z - \bar{t}_k, t + 2[\lambda])\tau(z - \bar{t}_k, t) \right\} e^{-\xi(t, \lambda)}, \\ \partial^{-1}(q(z - \bar{t}_k, t)w^*(z - \bar{t}_k, t, \lambda)) &= -\frac{1}{2\lambda\tau^2(z - \bar{t}_k, t)} \times \\ &\times \left\{ \sigma(z - \bar{t}_k, t)\tau\left(z - \bar{t}_k - \frac{2}{k\lambda^k}, t + 2[\lambda]\right) + \sigma(z - \bar{t}_k, t + 2[\lambda])\tau(z - \bar{t}_k, t) \right\} e^{-\xi(t, \lambda)}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения и функции (4.1) в (3.3), получаем соотношения

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_\lambda \lambda^{-1}\bar{\tau}(t - y - 2[\lambda])\bar{\tau}(t + y + 2[\lambda])e^{\xi(-2y, \lambda)} &= \bar{\tau}(t - y)\bar{\tau}(t + y), \\ \operatorname{res}_\lambda \lambda^{-1}\bar{\tau}_z(t - y - 2[\lambda])\bar{\tau}(t + y + 2[\lambda])e^{\xi(-2y, \lambda)} - \\ &- \operatorname{res}_\lambda \lambda^{-1}\bar{\tau}(t - y - 2[\lambda])(\partial_z \ln \bar{\tau}(t - y))\bar{\tau}(t + y + 2[\lambda])e^{\xi(-2y, \lambda)} = \\ &= \bar{\sigma}(t - y)\bar{\rho}(t + y) - \bar{\rho}(t - y)\bar{\sigma}(t + y), \\ \operatorname{res}_\lambda \lambda^{-1}\bar{\tau}(t - y - 2[\lambda])\bar{\sigma}(t + y + 2[\lambda])e^{\xi(-2y, \lambda)} &= 2\bar{\sigma}(t - y)\bar{\tau}(t + y) - \bar{\sigma}(t + y)\bar{\tau}(t - y), \\ \operatorname{res}_\lambda \lambda^{-1}\bar{\tau}(t - y - 2[\lambda])\bar{\rho}(t + y + 2[\lambda])e^{\xi(-2y, \lambda)} &= 2\bar{\rho}(t - y)\bar{\tau}(t + y) - \bar{\rho}(t + y)\bar{\tau}(t - y).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Здесь мы положили $\bar{f}(t) := f(z - \bar{t}_k, t)$, таким образом,

$$\bar{f}(t - 2[\lambda]) = f\left(z - \bar{t}_k + \frac{2}{k\lambda^k}, t - [\lambda]\right), \quad \bar{f}(t + 2[\lambda]) = f\left(z - \bar{t}_k - \frac{2}{k\lambda^k}, t + 2[\lambda]\right).$$

Сделав замены $t \rightarrow t - y$, $t' \rightarrow t + y$, где $y = (y_1, y_3, y_5, \dots)$, и введя оператор Хироты D_n [35],

$$D_n f(t) \circ g(t) = (\partial_{t_n} - \partial_{t'_n})f(t)g(t')|_{t'_n=t_n}, \quad e^{aD_n} f(t) \circ g(t) = f(t_n + a)g(t_n - a),$$

мы можем записать (4.2) как

$$\begin{aligned}\sum_{j=0} p_j(-2y)p_j(2\tilde{D})e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t) &= e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t), \\ \sum_{j=0} p_j(-2y)p_j(2\tilde{D})e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}_z(t) - \\ &- (\partial_z \ln \bar{\tau}(t - y)) \sum_{j=0} p_j(-2y)p_j(2\tilde{D})e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t) = \\ &= e^{\sum_n y_n D_n} (\bar{\rho}(t) \circ \bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\rho}(t)), \\ \sum_{j=0} p_j(-2y)p_j(2\tilde{D})e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\tau}(t) &= e^{\sum_n y_n D_n} (2\bar{\tau}(t) \circ \bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\tau}(t)), \\ \sum_{j=0} p_j(-2y)p_j(2\tilde{D})e^{\sum_n y_n D_n} \bar{\rho}(t) \circ \bar{\tau}(t) &= e^{\sum_n y_n D_n} (2\bar{\tau}(t) \circ \bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t) \circ \bar{\tau}(t)),\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $\tilde{D} = (D_1, D_3/3, D_5/5, \dots)$, а $p_j(t)$ – многочлены Шура,

$$p_j(t) = \sum_{\|\alpha\|=j} \frac{t^\alpha}{\alpha!},$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \dots), \quad \|\alpha\| = \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_3! \dots, \quad t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_3^{\alpha_3} \dots,$$

производящие функции которых в общем случае задаются как

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} t_i \lambda^i\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) \lambda^j.$$

Сравнивая множители при степенях y , переписываем уравнения (4.3) в виде

$$\frac{D^\gamma}{\gamma!} \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} p_{\|\alpha\|}(2\tilde{D}) D^\beta \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t), \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^\gamma}{\gamma!} (\bar{\rho}(t) \circ \bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\rho}(t)) &= \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} p_{\|\alpha\|}(2\tilde{D}) D^\beta \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}_z(t) - \\ &- \sum_{\alpha+\beta+\delta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta! \delta!} (\partial_y^\delta \partial_z \ln \bar{\tau}(t-y)|_{y=0}) p_{\|\alpha\|}(2\tilde{D}) D^\beta \bar{\tau}(t) \circ \bar{\tau}(t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\frac{D^\gamma}{\gamma!} (2\bar{\tau}(t) \circ \bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\tau}(t)) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} p_{\|\alpha\|}(2\tilde{D}) D^\beta \bar{\sigma}(t) \circ \bar{\tau}(t), \quad (4.4b)$$

$$\frac{D^\gamma}{\gamma!} (2\bar{\tau}(t) \circ \bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t) \circ \bar{\tau}(t)) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} p_{\|\alpha\|}(2\tilde{D}) D^\beta \bar{\rho}(t) \circ \bar{\tau}(t). \quad (4.4g)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $\gamma = (1, 0, 0, \dots)$ член с $y = (y_1, 0, 0, \dots)$ в (4.46) можно записать как

$$2D_x \tau_z \circ \tau + D_x \sigma \circ \rho = 2D_z \tau_x \circ \tau + D_x \sigma \circ \rho = D_x D_z \tau \circ \tau + D_x \sigma \circ \rho = 0.$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение 2d-СКСИ-I [28], [26], т.е. расширенную ВКР-иерархию (3.1) с $n = 3$ и $k = 5$.

Заметим, что, пользуясь определением $\bar{\tau}$, мы можем написать

$$D_{\bar{t}_5} \bar{\tau} \circ \bar{\tau} = (D_{\bar{t}_5} - D_z) \tau \circ \tau|_{z=z-\bar{t}_k}.$$

В результате получаем билинейные уравнения Хироты для уравнения 2d-СКСИ-I (иерархии (3.1) с $n = 3$ и $k = 5$)

$$D_x D_z \tau \circ \tau + D_x \sigma \circ \rho = 0, \quad (4.5a)$$

$$[D_x^6 - 5D_x^3 D_{t_3} + 9D_x (D_{\bar{t}_5} - D_z) - 5D_{t_3}^2] \tau \circ \tau = 0, \quad (4.5b)$$

$$(D_x^3 - D_{t_3}) \sigma \circ \tau = 0, \quad (4.5b)$$

$$(D_x^3 - D_{t_3}) \rho \circ \tau = 0, \quad (4.5g)$$

используя при их получении соответственно уравнение (4.46) для y_1 , уравнение (4.4a) для $y_1 y_5$, уравнение (4.4b) для y_3 , уравнение (4.4r) для y_3 .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение 2d-СКСИ-II [26], т.е. расширенную ВКР-иерархию (3.1) с $n = 5$ и $k = 3$. Получаем билинейные уравнения Хироты

$$D_x D_z \tau \circ \tau + D_x \sigma \circ \rho = 0, \quad (4.6a)$$

$$[D_x^6 - 5D_x^3(D_{\bar{t}_3} - D_z) + 9D_x D_{t_5} - 5(D_{\bar{t}_3} - D_z)^2] \tau \circ \tau = 0, \quad (4.6б)$$

$$[D_x^3 - (D_{\bar{t}_3} - D_z)] \sigma \circ \tau = 0, \quad (4.6в)$$

$$[D_x^3 - (D_{\bar{t}_3} - D_z)] \rho \circ \tau = 0, \quad (4.6г)$$

$$[D_x^5 + 5D_x^2(D_{\bar{t}_3} - D_z) - 6D_{t_5}] \sigma \circ \tau = 0, \quad (4.6д)$$

$$[D_x^5 + 5D_x^2(D_{\bar{t}_3} - D_z) - 6D_{t_5}] \rho \circ \tau = 0, \quad (4.6е)$$

используя при их получении соответственно уравнение (4.4б) для y_1 , уравнение (4.4a) для $y_1 y_5$, уравнение (4.4в) для y_3 , уравнение (4.4г) для y_3 , уравнение (4.4в) для y_5 , уравнение (4.4г) для y_5 .

5. ОТ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ХИРОТЫ НАЗАД К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Следуя пути, заданному в монографии [35], мы можем преобразовать билинейные уравнения обратно в нелинейные уравнения в частных производных.

Рассмотрим следующие легкодоказуемые тождества

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_i \delta_i D_i\right) \rho \circ \tau &= \exp\left(2 \operatorname{ch}\left(\sum_i \delta_i \partial_i\right) \ln \tau\right) \exp\left(\sum_i \delta_i \partial_i\right) \left(\frac{\rho}{\tau}\right), \\ \operatorname{ch}\left(\sum_i \delta_i D_i\right) \tau \circ \tau &= \exp\left(2 \operatorname{ch}\left(\sum_i \delta_i \partial_i\right) \ln \tau\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Используя преобразования переменных $u := 2\partial_x^2 \ln \tau$, $r := \rho/\tau$, $q := \sigma/\tau$ и разлагая (5.1) по δ , мы можем получить соотношение между билинейными уравнениями Хироты и обычными нелинейными формами. Ниже мы приведем два примера.

ПРИМЕР 3. Билинейные уравнения Хироты (4.5) можно перевести обратно в нелинейные уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \partial^{-1} \partial_z u + q_x r - q r_x &= 0, \\ u^{(5)} + 15u_x u^{(2)} + 15uu^{(3)} + 45u^2 u_x - 5u_{t_3}^{(2)} - 15u_x (\partial^{-1} u_{t_3}) - 15uu_{t_3} + \\ + 9u_{\bar{t}_5} - 9u_z - 5\partial^{-1} u_{t_3 t_3} &= 0, \\ q_{t_3} &= q_{xxx} + 3uq_x, \quad r_{t_3} = r_{xxx} + 3ur_x. \end{aligned}$$

После исключения z из этих уравнений получаем уравнение 2d-СКСИ-I [28], [26]:

$$\begin{aligned} u_{\bar{t}_5} + \frac{1}{9}u^{(5)} + \frac{5}{3}u_x u^{(2)} + \frac{5}{3}uu^{(3)} + 5u^2 u_x - \frac{5}{9}u_{t_3}^{(2)} - \frac{5}{3}u_x (\partial^{-1} u_{t_3}) - \frac{5}{3}uu_{t_3} - \\ - \frac{5}{9}\partial^{-1} u_{t_3 t_3} + q_{xx} r - q r_{xx} &= 0, \\ q_{t_3} &= q_{xxx} + 3uq_x, \quad r_{t_3} = r_{xxx} + 3ur_x. \end{aligned}$$

Билинейные уравнения Хироты для этих уравнений заданы в (4.5) и после исключения переменной z из (4.5a) и (4.5б) совпадают с полученными в статье [28].

ПРИМЕР 4. Билинейные уравнения Хироты (4.6) можно перевести обратно в нелинейные уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \partial^{-1} \partial_z u + q_x r - q r_x &= 0, \\ u^{(5)} + 15u_x u^{(2)} + 15uu^{(3)} + 45u^2 u_x - 5u_{t_3}^{(2)} - 15u_x (\partial^{-1} u_{\bar{t}_3}) - 15uu_{\bar{t}_3} + \\ &+ 9u_{t_5} + 5u_z^{(2)} + 15u_x \partial^{-1} u_z + 15uu_z - 5\partial^{-1} (\partial_{\bar{t}_3} - \partial_z)^2 u = 0, \\ q_{\bar{t}_3} - q_z &= q_{xxx} + 3uq_x, \quad r_{\bar{t}_3} - r_z = r_{xxx} + 3ur_x, \\ q^{(5)} + 10uq^{(3)} + 5(u_{xx} + 3u^2)q_x + 5(q_{\bar{t}_3} - q_z)^{(2)} + 5u(q_{\bar{t}_3} - q_z) + \\ &+ 10q_x \partial^{-1} u_{\bar{t}_3} - 10q_x \partial^{-1} u_z - 6q_{t_5} = 0, \\ r^{(5)} + 10ur^{(3)} + 5(u_{xx} + 3u^2)r_x + 5(r_{\bar{t}_3} - r_z)^{(2)} + 5u(r_{\bar{t}_3} - r_z) + \\ &+ 10r_x \partial^{-1} u_{\bar{t}_3} - 10r_x \partial^{-1} u_z - 6r_{t_5} = 0. \end{aligned}$$

Исключая переменную z и функций $q_{\bar{t}_3}$, $r_{\bar{t}_3}$, получаем уравнение 2d-СКСИ-II [26]:

$$\begin{aligned} u_{t_5} + \frac{1}{9}u^{(5)} + \frac{5}{3}u_x u^{(2)} + \frac{5}{3}uu^{(3)} + 5u^2 u_x - \frac{5}{9}u_{t_3}^{(2)} - \\ - \frac{5}{3}u_x (\partial^{-1} u_{\bar{t}_3}) - \frac{5}{3}uu_{\bar{t}_3} - \frac{5}{9}\partial^{-1} u_{\bar{t}_3 \bar{t}_3} = \\ = \frac{1}{9}[10q^{(4)}r + 5q^{(3)}r_x - 5q_x r^{(3)} - 10qr^{(4)} + 5(q_x r - q r_x)_{\bar{t}_3} + \\ + 30u(q^{(2)}r - qr^{(2)}) + 30u_x(q_x r - q r_x)], \\ q_{t_5} = q^{(5)} + 5uq^{(3)} + 5u'q^{(2)} + \left[\frac{10}{3}u^{(2)} + 5u^2 + \frac{5}{3}\partial^{-1} u_{\bar{t}_3} + \frac{5}{3}(q_x r - q r_x) \right] q_x, \\ r_{t_5} = r^{(5)} + 5ur^{(3)} + 5u'r^{(2)} + \left[\frac{10}{3}u^{(2)} + 5u^2 + \frac{5}{3}\partial^{-1} u_{\bar{t}_3} + \frac{5}{3}(q_x r - q r_x) \right] r_x. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Билинейные уравнения Хироты для этих уравнений заданы в (4.6). Насколько нам известно, билинейные формы Хироты (4.6) для уравнений (5.2) ранее в литературе не появлялись.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящей статье, введя вспомогательный ∂_z -поток, мы построили билинейные тождества (3.3) для расширенной ВКР-иерархии (3.1), введенной в работе [26]. Билинейные тождества (3.3) используются для получения всех билинейных уравнений Хироты для расширенной ВКР-иерархии (3.1). В качестве примера получены билинейные формы для уравнений 2d-СКСИ-I и 2d-СКСИ-II. Корректность построения этих билинейных форм подтверждается преобразованием билинейных уравнений обратно в нелинейные уравнения в частных производных. Билинейные уравнения Хироты для уравнения 2d-СКСИ-II получены в явном виде, что ранее не было описано в литературе.

Очень интересная задача заключается в рассмотрении квазипериодических решений для расширенной ВКР-иерархии, коль скоро получены билинейные тождества для них. Другая интересная задача – изучение билинейных тождеств для других расширенных иерархий, таких как двумерная цепочка Тоды, дискретная иерархия КП и т. д. В дальнейшем мы рассчитываем заняться этими задачами.

Список литературы

- [1] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, Japan, 13–16 May, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [2] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, **26**, World Sci., Singapore, 2003.
- [3] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Physica D*, **4**:3 (1982), 343–365.
- [4] J.-P. Cheng, J.-S. He, S. Hu, *J. Math. Phys.*, **51**:5 (2010), 053514, 19 pp., arXiv: 1003.5987.
- [5] H.-F. Shen, M.-H. Tu, *J. Math. Phys.*, **52**:3 (2011), 032704, 21 pp.
- [6] Y. Cheng, Y.-J. Zhang, *Inverse Problems*, **10**:2 (1994), L11–L17.
- [7] I. Loris, R. Willox, *Inverse Problems*, **13**:2 (1997), 411–420.
- [8] C. S. Xiong, *Lett. Math. Phys.*, **36**:3 (1996), 223–229.
- [9] M. Kamata, A. Nakamura, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:45 (2002), 9657–9670, arXiv: nlin/0207037.
- [10] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, “Extension of Moyal-deformed hierarchies of soliton equations”, *Symmetry Methods in Physics*, Proceedings of XI International Conference (Prague, 21–24 June, 2004), eds. Č. Burdik, O. Novratil, S. Pošta, JINR, Dubna, 2004, 10 pp., <http://www1.jinr.ru/Proceedings/Burdik-2004/pdf/mueller.pdf>, arXiv: nlin/0408023.
- [11] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:45 (2004), 10899–10930, arXiv: hep-th/0406112.
- [12] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. J. Zhang, *Moscow Math. J.*, **4**:2 (2004), 313–332, arXiv: nlin/0306060.
- [13] T. E. Milanov, *Duke Math. J.*, **138**:1 (2007), 161–178, arXiv: math/0501336.
- [14] K. Takasaki, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43** (2010), 434032, 15 pp., arXiv: 1002.4688.
- [15] C. Z. Li, J. S. He, K. Wu, Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **51**:4 (2010), 043514, 32 pp., arXiv: 0906.0624.
- [16] R. Willox, M. Hattori, *Discretisations of constrained KP hierarchies*, arXiv: 1406.5828.
- [17] O. Chvartatskyi, Yu. Sydorenko, *SIGMA*, **11** (2015), 028, 20 pp.
- [18] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics*, Translations American Mathematical Society. Ser. 2, **224**, Advances in the Mathematical Sciences, **61**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125–138, arXiv: 0801.4143.
- [19] R.-L. Lin, Y.-B. Zeng, W.-X. Ma, *Physica A*, **291**:1–4 (2001), 287–298.
- [20] R.-L. Lin, H.-S. Yao, Y.-B. Zeng, *SIGMA*, **2** (2006), 096, 8 pp., arXiv: nlin/0701003.
- [21] R.-L. Lin, H. Peng, M. Mañas, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:43 (2010), 434022, 15 pp., arXiv: 1005.3878.
- [22] V. K. Mel’nikov, *Lett. Math. Phys.*, **7**:2 (1983), 129–136.
- [23] V. K. Mel’nikov, *Commun. Math. Phys.*, **126**:1 (1989), 201–215.
- [24] A. Doliwa, R.-L. Lin, *Phys. Lett. A*, **378**:28–29 (2014), 1925–1931, arXiv: 1310.4636.
- [25] R.-L. Lin, X.-J. Liu, Y.-B. Zeng, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 214–228.
- [26] H.-X. Wu, X.-J. Liu, Y.-B. Zeng, *Commun. Theor. Phys.*, **51**:2 (2009), 193–199.
- [27] X.-J. Liu, Y.-B. Zeng, R.-L. Lin, *Phys. Lett. A*, **372**:21 (2008), 3819–3823, arXiv: 0710.4015.
- [28] X.-B. Hu, H.-Y. Wang, *Inverse Problems*, **22**:5 (2006), 1903–1920.
- [29] X.-B. Hu, H.-Y. Wang, *Inverse Problems*, **23**:4 (2007), 1433–1444.

- [30] W. Oevel, W. Schief, *Rev. Math. Phys.*, **6**:6 (1994), 1301–1338.
- [31] I. Loris, R. Willox, *J. Math. Phys.*, **40**:3 (1999), 1420–1431.
- [32] H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva, *Commun. Math. Phys.*, **193**:3 (1998), 493–525.
- [33] H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva, “Multi-component matrix KP hierarchies as symmetry-enhanced scalar KP hierarchies and their Darboux–Bäcklund solutions”, *Bäcklund and Darboux Transformations. The Geometry of Solitons* (Halifax, Canada, June 4–9, 1999), CRM Proceedings and Lecture Notes, **29**, eds. A. Coley, D. Levi, R. Milson, C. Rogers, P. Winternitz, AMS, Providence, RI, 2001, 109–120.
- [34] H.-F. Shen, N.-C. Lee, M.-H. Tu, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:13 (2011), 135205, 16 pp.
- [35] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

Поступила в редакцию 2.05.2015