Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Вернов, О. А. Хрусталеv, Приближенные дважды периодические решения
в $(1 + 1)$ -мерной теории φ^4 , *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 182–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:03:48

© 1998 г.

С. Ю. Вернов*, О. А. Хрусталеv†

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДВАЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В $(1 + 1)$ -МЕРНОЙ ТЕОРИИ φ^4

Рассматриваются дважды периодические решения уравнения Лагранжа–Эйлера $(1 + 1)$ -мерной скалярной теории φ^4 . При условии малости нелинейного члена для нахождения асимптотических решений в форме стоячей волны применяется метод Пуанкаре. Доказано, что возникающая в случае нулевой массы проблема главного резонанса решается путем использования в качестве нулевого приближения эллиптической функции Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Периодические решения нелинейных уравнений. В настоящее время активно изучаются периодические решения нелинейных волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0. \quad (1)$$

В семидесятые и восьмидесятые годы для широкого класса непрерывных функций $g(\varphi)$ были доказаны теоремы существования подобных решений, удовлетворяющих определенным граничным условиям по x .

В работе [1] доказано, что краевая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0, & g(0) = 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = 0, \\ \varphi(x, t + T) = \varphi(x, t), & x, t, T \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

имеет решение, только если

$$g'(0) > \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2.$$

* Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: svernov@theory.npi.msu.su

† Институт теоретических проблем микромира Московского государственного университета, Физический факультет Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: khurst@sunny.bog.msu.su

Прямым следствием этой теоремы является отсутствие нетривиальных решений задачи (2) в случае безмассовой теории φ^4 , т. е. при $g(\varphi) = \varphi^3$. Данный результат не означает, разумеется, полного отсутствия периодических решений в этой теории.

Изменяя граничные условия по x , получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0, & g(0) = 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(\pi, t) = 0, \\ \varphi(x, t + T) = \varphi(x, t), & x, t, T \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2')$$

Для непрерывных неубывающих функций $g(\varphi)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|\varphi| \rightarrow \infty} \frac{g(\varphi)}{\varphi} = \infty,$$

было доказано, что решение задачи (2') существует, если найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \varphi \cdot g(\varphi) - \int_0^\varphi g(t) dt \geq \beta |g(\varphi)| - \alpha.$$

Авторы работы [2] доказали данное утверждение, обобщив доказательство [3], сделанное для более узкого класса функций $g(\varphi)$. Упрощенное доказательство для случая $g(\varphi) = |\varphi|^n \cdot \varphi$, где $n > 0$, дано в [4].

В статье [5] рассмотрена следующая краевая задача для уравнения Лагранжа–Эйлера теории φ^4 с массой, зависящей от пространственной координаты x :

$$\begin{cases} L_M \varphi(x, t) - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \varepsilon \varphi^3(x, t) = 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(\pi, t) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$L_M \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - M^2(x), \quad M^2(x) \in L^2[0, 1].$$

Для собственных значений μ_j оператора L_M в [5] введены дополнительные условия, названные нерезонансными: пусть для всех j собственные числа $\mu_j < 0$, а все $\varpi_j \equiv \sqrt{|\mu_j|}$ и $\bar{\Omega} \equiv (\varpi_1, \dots, \varpi_N)$ удовлетворяют условиям:

$$|n \cdot \bar{\Omega} \pm j| \geq G_1(|n| + j)^{-\tau}, \text{ где } n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}^N, \quad j \geq 0,$$

$$|n \cdot \bar{\Omega} \pm \varpi_j| \geq G_1(|n| + j)^{-\tau}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}^N, \quad j \geq N + 1,$$

$|n \cdot \bar{\Omega} \pm (\varpi_j \pm \varpi_i)| \geq G_2(|n| + |j - i|)^{-\tau}$, где $n \in \mathbb{Z}^N$, $j, i \geq N + 1$, а G_1, G_2 и τ – положительные числа.

Было доказано, что если $\varepsilon \ll 1$, то выполнение этих условий гарантирует существование периодического (при $N = 1$) или квазипериодического (при $N > 1$) по времени решения задачи (3). При этом отмечалось, что доказательство существования ничего не говорит о явном виде решений и о принадлежности их к известным классам специальных функций.

1.2. Два класса дважды периодических решений. Наше исследование посвящено изучению $(1+1)$ -мерной модели скалярной теории φ^4 , описываемой лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\varphi_{,t}^2(x, t) - \varphi_{,x}^2(x, t) - M^2 \varphi^2(x, t) - \frac{\varepsilon}{2} \varphi^4(x, t) \right).$$

Рассмотрим соответствующее уравнение Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - M^2 \varphi(x, t) - \varepsilon \varphi^3(x, t) = 0 \quad (1')$$

с целью найти его решения, периодические как по пространственной координате x , так и по временной t . При этом период по x выберем равным 2π и будем искать период по t .

Существуют два класса дважды периодических решений. Если искать решения в виде бегущих волн

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - vt), \quad (4)$$

где v – скорость волны, то уравнение $(1')$ легко сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Дюффинга [6]. Периодическими решениями этого уравнения являются эллиптические функции Якоби [7]. Подобные поля хорошо изучены как для двумерной [8], так и для четырехмерной [9] скалярной теории φ^4 .

Другой класс дважды периодических решений образуют решения в виде стоячей волны:

$$\varphi(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \sin(n(x - x_0)) \sin(j\omega(t - t_0)), \quad (5)$$

где x_0 и t_0 определяются из начальных и граничных условий. В силу трансляционной инвариантности уравнения $(1')$ можно, не ограничивая общности, положить $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$. Выбор $x_0 = 0$ соответствует граничным условиям задачи $(2')$.

Нахождение периодических решений в форме стоячей волны – задача более сложная, чем отыскание бегущих волновых полей, поскольку в этом случае уравнение в частных производных не сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Аналитическая форма подобных решений пока не найдена, более того, существование периодических решений в форме стоячей волны при произвольных значениях параметров еще не доказано.

Подстановкой в уравнение $(1')$ функции $\varphi(x, t)$ в форме (5) можно свести данное уравнение к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты C_{nj} и частоту ω . Данная система может быть решена численно с помощью метода Галеркина, т. е. посредством обрезания ряда Фурье по обоим индексам, когда полагают $C_{nj} = 0$ для всех $n, j > N$. Случай $M = 1$ и $\varepsilon = 1$ был исследован при различных значениях N . Как оказалось [10], результаты вычислений практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует о самосогласованности подхода. При этом отмечено, что в рамках численного решения остается открытым вопрос о корректности обрезания и сходимости последовательности полученных решений при $N \rightarrow \infty$.

В данной работе для решения уравнения $(1')$ в случае нулевой массы также применяется подстановка функции $\varphi(x, t)$ в форме (5). При этом для упрощения системы мы используем не обрезание, а условие малости ε и получаем асимптотическое разложение, содержащее уже в нулевом порядке бесконечное число гармоник.

1.3. Равномерные асимптотические разложения. Будем считать, что ε — малый положительный параметр, и попробуем найти решение уравнения $(1')$ в виде формального степенного ряда. Непосредственные разложения по степеням ε имеют конечные области применимости из-за наличия вековых, т. е. неограниченных, членов. Разложения, содержащие только ограниченные функции и, следовательно, одинаково пригодные в любой точке пространства, называются *равномерными*. Для построения равномерных разложений были разработаны асимптотические методы (см., например, [11, 12]). Обзор таких методов содержится в книге [13].

Простота алгоритма построения равномерного асимптотического ряда зависит от значения массового члена. Даже в случае однородной массы отсутствие резонанса важно не только для доказательства сходимости равномерного асимптотического ряда, но и для самого его построения. Различают два случая.

Обозначим через Ω_j частоты периодических решений уравнения $(1')$ при $\varepsilon = 0$: $\Omega_j = \sqrt{j^2 + M^2}$, где $j \in \mathbb{N}$. Если для любых i и j отношение Ω_i/Ω_j не есть рациональное число, то имеет место нерезонансный случай. В этом случае с помощью стандартных асимптотических методов, например метода Пуанкаре, можно построить асимптотический ряд с любой степенью точности. При этом все вековые члены уничтожаются правильным выбором частоты.

Противоположный случай, когда существуют две частоты Ω_i и Ω_j , отношение которых является рациональным числом, называется резонансным. В резонансном случае, напротив, удастся построить равномерное разложение только в конечном числе первых порядков по ε . При этом чем меньше номера i и j резонирующих частот, тем меньше периодических членов асимптотического ряда удастся построить. Если же имеется нулевая масса, когда $\Omega_j = j$ и все частоты резонируют, возникает главный резонанс, т. е. резонанс уже в первом порядке по ε .

Мы рассматриваем безмассовую теорию φ^4 и ищем асимптотическое решение в виде стоячей волны. Целью данной работы является построение первых членов равномерного, более того, состоящего исключительно из периодических функций асимптотического разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона в случае главного резонанса. Мы показываем, как с помощью нетривиального выбора нулевого приближения можно получить и первое, и второе приближения в форме стоячей волны.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА В СЛУЧАЕ БЕЗМАССОВОЙ ТЕОРИИ φ^4

2.1. Метод Пуанкаре. Для построения асимптотического решения воспользуемся методом Пуанкаре. Введем новое время $\tilde{t} \equiv \omega t$ и будем искать дважды периодическое

решение уравнения (1') с нулевой массой $\varphi(x, \tilde{t})$ и частоту ω в форме разложений по ε :

$$\varphi(x, \tilde{t}, \varepsilon) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, \tilde{t}) \varepsilon^n,$$

$$\omega(\varepsilon) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n.$$

Разлагая теперь уравнение (1') с $M = 0$ в ряд по степеням ε , получаем последовательность уравнений. Выпишем два первых уравнения этой последовательности.

В нулевом порядке по ε уравнение для определения φ_0 имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(x, \tilde{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = 0. \quad (6)$$

В первом порядке по ε для определения φ_0 , φ_1 и ω_1 находим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(x, \tilde{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_0(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} + \varphi_0^3(x, \tilde{t}). \quad (7)$$

Уравнение (6) не позволяет однозначно определить функцию $\varphi_0(x, \tilde{t})$. Если выбрать в качестве решения этого уравнения $\varphi_0(x, \tilde{t}) = \sin(x) \sin(\tilde{t})$, то уравнение (7) не будет иметь периодических решений, так как частота внешней силы $\sin(3x) \sin(3\tilde{t})$ совпадает с частотой собственных колебаний, а это приводит к резонансу. Ясно, что, в отличие от случая ненулевой массы, никаким выбором частотной поправки ω_1 нельзя получить равномерное разложение. Для получения такого разложения необходимо отыскать другое периодическое решение уравнения (6), т. е. другое нулевое приближение функции $\varphi(x, \tilde{t})$.

2.2. Условие существования периодического решения. Рассмотрим уравнения (6) и (7) не по отдельности, а как систему, и попытаемся выделить из множества периодических решений уравнения (6) такую функцию $\varphi_0(x, \tilde{t})$, что уравнение (7) имеет периодическое решение. Таким образом, для нахождения $\varphi_0(x, \tilde{t})$ используется не только уравнение нулевого порядка по ε , т. е. (6), но и уравнение первого порядка по ε , т. е. (7).

Общее решение уравнения (6) в форме стоячей волны (5) есть

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \sin(n\tilde{t}),$$

где a_n — произвольные постоянные.

Мы ищем решение уравнения (7) $\varphi_1(x, t)$ также в форме стоячей волны, т. е.

$$\varphi_1(x, \tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}).$$

Для определения коэффициентов Фурье функций $\varphi_0(x, t)$ и $\varphi_1(x, t)$ имеем уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{nj}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sin(nx) \sin(j\tilde{t}) = 0,$$

возникающее после подстановки разложений для функций φ_0 и φ_1 в уравнение (7).

Полученное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\forall n, j \in \mathbb{N}: R_{nj}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad (7')$$

Эта система содержит подсистему, определяющую коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$:

$$\forall j \in \mathbb{N}: R_{jj}(\mathbf{a}) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} R_{jj} \equiv & 9a_j^3 + 3a_j^2 a_{3j} + a_j \left(6 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{\infty} (2a_s^2 + a_s a_{2j+s}) + 3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{2j-1} a_s a_{2j-s} - 32j^2 \omega_1 \right) + \\ & + 3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{\infty} a_s a_p a_{j+s+p} + 3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j \\ p \neq 2j-s}}^{\infty} a_s a_p a_{s+p-j} + \sum_{s=1}^{j-2} \sum_{p=1}^{j-2} a_s a_p a_{j-s-p}. \end{aligned}$$

Мы получили необходимое и достаточное условие существования периодического решения уравнения (7): периодическая функция $\varphi_1(x, \tilde{t})$, удовлетворяющая уравнению (7), существует тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$ является решением системы (8).

Коэффициент a_1 — параметр, задающий амплитуду колебаний. Действительно, если $a_j = c_j a_1$ и $\omega_1 = c_\omega a_1^2$, то все полиномы R_{jj} пропорциональны a_1^3 : $R_{jj}(\mathbf{a}) = a_1^3 R_{jj}(\mathbf{c})$, и, следовательно, коэффициент a_1 может быть выбран произвольно. Поскольку нашей целью является нахождение действительной функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$, то мы ищем $c_j \in \mathbb{R}$.

2.3. Нулевое приближение. Не существует общих методов точного решения систем, подобных (8), поскольку, во-первых, система бесконечна и все $R_{jj}(\mathbf{c})$ суть бесконечные суммы, а, во-вторых, все уравнения нелинейны. Ограничимся поиском частного решения этой системы. Мы ищем функцию $\varphi_0(x, \tilde{t})$ такую, что коэффициенты ее ряда Фурье удовлетворяют данной системе. Такая функция должна обладать бесконечным рядом Фурье, в то же время все ее четные гармоники могут быть равны нулю. Для упрощения вычислений предположим, что ряд Фурье функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$ содержит только нечетные гармоники.

Задачу можно приближенно решить методом Галеркина, т. е. обрезанием высших диагональных гармоник $\varphi_0(x, \tilde{t})$ и поиском решения в виде

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = a_1 \left\{ \sum_{j=1}^N c_{2j-1} \sin((2j-1)x) \sin((2j-1)\tilde{t}) \right\}.$$

Мы получаем конечную систему нелинейных уравнений. Решения этой нелинейной системы могут быть найдены только с помощью ЭВМ. Полученные для $N = 10$ значения c_{2j-1} практически совпали с элементами конечной последовательности

$$\mathbf{d} = \left\{ d_{2j-1} = \frac{f_{2j-1}}{f_1}, \text{ где } f_{2j-1} \equiv \frac{q^{j-1/2}}{1+q^{2j-1}}, d_{2j} = 0, 0 < j < 11 \right\}$$

при $q = 0.0142142623201$. Легко проверить, что подстановка $\mathbf{d}$ в систему (8) дает $R_{jj}(\mathbf{d}) < 10^{-12}$. Иными словами, данная конечная последовательность является приближенным решением системы (8).

Для произвольного q определим последовательность $\mathbf{f}$ следующим образом:

$$\mathbf{f} = \left\{ \forall n \in \mathbb{N}: f_{2n-1} = \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}, f_{2n} = 0 \right\}.$$

Легко заметить, что числам q и $q' \equiv 1/q$ соответствуют одинаковые значения f_j . Чтобы получить однозначно зависящую от q последовательность $\mathbf{f}$, стремящуюся к нулю, но не равную нулю тождественно, ограничим область изменения q интервалом $(0, 1)$.

Члены последовательности $\mathbf{f}$ пропорциональны коэффициентам Фурье функции эллиптического косинуса $\text{cn}(z, k)$ [7]:

$$\text{cn}(z, k) = \frac{\gamma}{k} \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} \cos\left((2n-1)\frac{\gamma z}{4}\right), \quad (9)$$

где $\gamma \equiv 2\pi/K$.

Поясним введенные обозначения и отметим некоторые свойства эллиптического косинуса:

основными периодами дwoякопериодической функции $\text{cn}(z, k)$ являются $4K(k)$ и $2K(k) + 2iK'(k)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $K'(k) \equiv K(k')$, а $k' = \sqrt{1-k^2}$;

параметр q в разложении Фурье (формула (9)) выражается через эллиптические интегралы следующим образом: $q \equiv \exp\{-\pi(K'/K)\}$;

разложение в ряд Фурье функции $\text{cn}(z, k)$ не содержит четных гармоник, это разложение справедливо в полосе комплексной плоскости $-K' < \text{Im } z < K'$, в частности для $z \in \mathbb{R}$;

если $k \in (0, 1)$ и $z \in \mathbb{R}$, то $\text{cn}(z, k) \in \mathbb{R}$;

функция $\text{cn}(z, k)$ является периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \text{cn}(z, k)}{dz^2} = (2k^2 - 1) \text{cn}(z, k) - 2k^2 \text{cn}^3(z, k). \quad (10)$$

Последнее свойство означает, что последовательность коэффициентов Фурье функции $\text{cn}(z, k)$ есть решение некоторой бесконечной системы кубических уравнений. Найдём эту систему.

С одной стороны, из формулы (9) легко получить разложение в ряд Фурье для функции $\text{сп}^3(z, k)$:

$$\text{сп}^3(z, k) = \frac{\gamma^3}{4k^3} \sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(3)}(\mathbf{f}) \cos\left(j \frac{\gamma z}{4}\right),$$

где $j = 1, 3, 5, \dots$,

$$\begin{aligned} F_j^{(3)}(\mathbf{f}) = & 3f_j^3 + 3f_j^2 f_{3j} + f_j \left(6 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{\infty} (f_s^2 + f_s f_{2j+s}) + 3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{2j-1} f_s f_{2j-s} \right) + \\ & + 3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^{\infty} f_s f_p f_{j+s+p} + 3 \sum_{s \neq j}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j \\ p \neq 2j-s}}^{\infty} f_s f_p f_{s+p-j} + \sum_{s=1}^{j-2} \sum_{p=1}^{j-2} f_s f_p f_{j-s-p} \end{aligned}$$

и во всех суммах суммирование идет только по нечетным числам.

С другой стороны, из дифференциального уравнения (10) следует, что $F_j^{(3)}(\mathbf{f})$ пропорционально f_j , причем коэффициент пропорциональности зависит от j :

$$\forall j: \quad F_j^{(3)}(\mathbf{f}) = \left(\frac{2(2k^2 - 1)}{\gamma^2} + \frac{j^2}{8} \right) f_j. \quad (11)$$

Последовательность $\mathbf{f}$ — это ненулевое решение системы (11) при всех значениях $q \in (0, 1)$. Следующее утверждение доказывает существование выделенного значения q .

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существует такое значение параметра $q \in (0, 1)$, что последовательность $\mathbf{f}$ является действительным решением системы (8), при этом значение ω_1 тоже действительно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в систему (8) последовательность $\mathbf{f}$: $a_j = f_j$ и используя систему (11), получаем, что

$$\begin{aligned} R_{jj}(\mathbf{f}) &= \left\{ F_j^{(3)}(\mathbf{f}) + f_j \left(6 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 - 32j^2 \omega_1 \right) \right\} = \\ &= f_j \left\{ 6 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + \frac{2(2k^2 - 1)}{\gamma^2} + j^2 \left(\frac{1}{8} - 32\omega_1 \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Система (8) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\omega_1 = \frac{1}{256} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \frac{(1 - 2k^2)}{3\gamma^2}.$$

Мы получили значение ω_1 . Все величины во втором уравнении системы выражаются через параметр q , при этом получается следующее уравнение:

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \right)^2 + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

Это уравнение на интервале $(0,1)$ имеет решение $q = 1.42142623201 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-13}$. Утверждение доказано.

Теперь несложно сконструировать требуемое нулевое приближение функции $\varphi(x, \tilde{t})$:

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = A \{ \operatorname{cn}(\alpha(x - \tilde{t}), k) - \operatorname{cn}(\alpha(x + \tilde{t}), k) \}.$$

Функция $\varphi_0(x, \tilde{t})$ при всех $k \in (0, 1)$ является действительным решением уравнения (6). Если положить $\alpha = 2K/\pi$, то периоды $\varphi_0(x, \tilde{t})$ по x и по $\tilde{t}$ будут равны 2π . Используя теперь разложение Фурье для функции $\operatorname{cn}(z, k)$ (9), получаем следующее разложение для функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$:

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = 2A \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} \sin((2n-1)x) \sin((2n-1)\tilde{t}).$$

Как было доказано, последовательность $\mathbf{f}$ является действительным решением системы (8) при $q = 1.42142623201 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-13}$. Среднему значению q соответствуют $k = 0.45107559881$ и $\alpha = 1.0576653982$. Вследствие однородности всех уравнений системы (8) последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$ при данном значении параметров также будет решением системы (8), при этом

$$\omega_1 = \frac{\gamma^2}{64k^2} A^2 = 1.0983600974 A^2.$$

Таким образом, доказано, что функция

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = A \{ \operatorname{cn}(\alpha(x - \tilde{t}), k) - \operatorname{cn}(\alpha(x + \tilde{t}), k) \}$$

при $k = 0.45107559881$ и $\alpha = 1.0576653982$ является искомой.

2.4. Первое приближение. Теперь осталось решить только линейные уравнения для получения всех недиагональных коэффициентов $\varphi_1(x, \tilde{t})$. Обозначим через D_{nj} коэффициенты Фурье функции $\varphi_0^3(x, \tilde{t})$:

$$\varphi_0^3(x, \tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}).$$

Из уравнения (7) следует, что

$$\varphi_1(x, \tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{D_{nj}}{j^2 - n^2} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nn} \sin(nx) \sin(n\tilde{t}).$$

Отметим, что функция $\varphi_1(x, \tilde{t})$ с произвольными диагональными коэффициентами b_{nn} является решением уравнения (7), при этом все недиагональные коэффициенты $\varphi_1(x, \tilde{t})$ пропорциональны A^3 .

2.5. Второе приближение. Рассмотрим уравнение второго порядка по ε :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \right] \varphi_2(x, \tilde{t}) = 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} + (2\omega_2 + \omega_1^2) \frac{\partial^2 \varphi_0(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} + 3\varphi_1(x, \tilde{t}) \varphi_0^2(x, \tilde{t}).$$

Пусть все диагональные коэффициенты Фурье функции $\varphi_1(x, t)$ равны нулю: $b_{nn} = 0$. Тогда $\forall n, j$: $b_{nj} = -b_{jn}$, вследствие чего функция $\varphi_1(x, \tilde{t}) \varphi_0^2(x, \tilde{t})$ не имеет диагональных гармоник. Положив $\omega_2 = -\omega_1^2/2$, мы получаем периодическое решение уравнения во втором порядке по ε :

$$\varphi_2(x, \tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{H_{nj}}{j^2 - n^2} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}) + \sum_{n=1}^{\infty} h_{nn} \sin(nx) \sin(n\tilde{t}),$$

где H_{nj} — коэффициенты Фурье функции

$$H(x, \tilde{t}) \equiv 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} - 3\varphi_1(x, \tilde{t}) \varphi_0^2(x, \tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H_{nj} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}).$$

Диагональные коэффициенты h_{nn} могут быть найдены только из уравнения следующего порядка.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере безмассовой теории φ^4 рассмотрено построение равномерного разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона в случае главного резонанса. Показано, что задача решается методом Пуанкаре, при этом необходимо надлежащим образом выбрать нулевое приближение.

Используя в качестве нулевого приближения функцию

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = A \{ \operatorname{cn}(\alpha(x - \tilde{t}), k) - \operatorname{cn}(\alpha(x + \tilde{t}), k) \}$$

с $k = 0.45107559881$ и $\alpha = 1.0576653982$, мы построили следующее разложение по функциям в форме стоячей волны решения волнового уравнения безмассовой теории φ^4 :

$$\varphi(x, \omega t) = \varphi_0(x, \omega t) + \varepsilon \varphi_1(x, \omega t) + \varepsilon^2 \varphi_2(x, \omega t) + O(\varepsilon^3),$$

где (с точностью $O(\varepsilon^3)$)

$$\omega = 1 + \frac{\gamma^2}{64k^2} A^2 \varepsilon - \frac{\gamma^4}{8192k^4} A^4 \varepsilon^2 = 1 + 1.0983600974 A^2 \varepsilon - 0.6031974518 A^4 \varepsilon^2.$$

Таким образом, используя эллиптический косинус вместо тригонометрического, мы построили равномерное разложение и нашли периодическое решение с точностью $O(\varepsilon^3)$. Остается открытым вопрос о возможности построения на основе полученного приближения равномерного асимптотического ряда. Авторы надеются исследовать этот вопрос в дальнейших публикациях.

Авторы выражают благодарность В. Ф. Еднералу и П. К. Силаеву за помощь в использовании методов компьютерной алгебры и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *J. M. Colon*. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1982. V. 294. P. 127.
- [2] *H. Brezis, J. M. Colon, L. Nirenberg*. Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 667.
- [3] *P. Rabinovitz*. Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 31.
- [4] *H. Brezis*. Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8. P. 409.
- [5] *C. E. Wayne*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 479.
- [6] *G. Duffing*. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig: Vieweg, 1918.
- [7] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции (Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье). М.: Наука, 1967.
- [8] *S. Aubry*. J. Chem. Phys. 1976. V. 64. P. 3392.
- [9] *Д. Ф. Курдгеладзе*. ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 842.
- [10] *П. К. Силаев, О. А. Хрусталева*. ТМФ (в печати).
- [11] *А. Пуанкаре*. Новые методы небесной механики. Избранные труды. М.: Наука, 1971–1974.
- [12] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [13] *А. Найфе*. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 27.II.1998 г.