Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Законы сохранения, дифференциальные тождества и связи уравнений в частных производных, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 227–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:27:34

© 2015 г.

В. В. Жаринов*

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА И СВЯЗИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматриваются специфические кохомологические свойства систем уравнений в частных производных, такие как маломерные законы сохранения и дифференциальные тождества. Показано, что такие свойства присущи сложным системам типа эволюционных систем со связями. Используемый здесь математический аппарат – алгебраический анализ систем уравнений в частных производных и кохомологии дифференциальных алгебр и модулей.

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, законы сохранения, дифференциальные тождества, дифференциальные связи.

DOI: 10.4213/tmf8960

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта во многом обзорная статья основана на работах автора, опубликованных в течение последних тридцати лет [1]–[7]. В ней рассматриваются специфические свойства систем уравнений в частных производных, такие как маломерные законы сохранения и дифференциальные тождества. Оказывается, что такие свойства присущи системам неэволюционного типа. Мы называем систему уравнений в частных производных системой *эволюционного типа*, если после подходящей замены переменных она записывается как эволюционная система, и системой *неэволюционного типа* в противном случае.

В разделе 2 мы определяем все необходимые алгебраические ингредиенты (дифференциальные алгебры, дифференциальные идеалы, дифференциальные модули, дифференциальные многочлены, дифференциальные комплексы) и приводим необходимые кохомологические утверждения (формула Грина, точность некоторых важных последовательностей).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

---

*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zharinov@mi.ras.ru

В разделе 3 мы описываем системы уравнений в частных производных общего вида в алгебраическом подходе, рассматриваем основные элементы этого подхода (многообразие решений, дифференциальная алгебра, дифференциальный идеал, дифференциальный комплекс, маломерные законы сохранения и дифференциальные тождества, ассоциированные с данной системой уравнений в частных производных) и устанавливаем связь между пространствами законов сохранения и дифференциальных тождеств.

В разделе 4 мы показываем, что эволюционные системы не обладают маломерными законами сохранения, и изучаем эволюционные системы со связями (которые имеют неэволюционный тип). Оказывается, наличие маломерных законов сохранения у таких систем определяется кохомологическими свойствами связей. Основные результаты здесь – теоремы 10, 11 и 12. Далее мы рассматриваем системы уравнений неразрывности и вычисляем их законы сохранения (теорема 13). Опираясь на этот результат, мы находим законы сохранения эволюционных систем со связями в виде нулевой дивергенции. В частности, мы показываем, что такие системы действительно имеют маломерные законы сохранения (теорема 14).

Общие результаты иллюстрируются рядом наглядных примеров, включая уравнения Янга–Миллса и Максвелла.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Обозначения. Мы используем стандартные обозначения:

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поля вещественных и комплексных чисел;
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ – множества всех целых, неотрицательных целых, натуральных (положительных целых) чисел;
- $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^m = \{i = (i^1, \dots, i^m) \mid i^\mu \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq \mu \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$, – аддитивный абелев моноид всех мультииндексов с покомпонентными операциями: $(i^1, \dots, i^m) + (j^1, \dots, j^m) = (i^1 + j^1, \dots, i^m + j^m)$;
- специальные мультииндексы: $0 = (0, \dots, 0)$, $(\mu) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на μ -м месте, $1 \leq \mu \leq m$;
- $|i| = i^1 + \dots + i^m$ для любого $i = (i^1, \dots, i^m) \in \mathbb{I}$.

Далее,

- $X = \mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \dots, x^m) \mid x^\mu \in \mathbb{R}, 1 \leq \mu \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$, – пространство независимых переменных;
- $U = \mathbb{R}^A = \{u = (u^\alpha) \mid u^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ – пространство зависимых переменных, где A – некоторое множество индексов;
- $U = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^A = \{u = (u_i^\alpha) \mid u_i^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A, i \in \mathbb{I}\}$ – пространство дифференциальных переменных, проекция $\pi: U \rightarrow U$, $u = (u_i^\alpha) \mapsto u = (u^\alpha)$, где $u^\alpha = u_0^\alpha$;
- $XU = X \times U$ – пространство всех переменных;
- $\partial_{x^\mu}, \partial_{u_i^\alpha}$ – частные производные, $1 \leq \mu \leq m, \alpha \in A, i \in \mathbb{I}$;
- $D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha \in A, i \in \mathbb{I}} u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha}$ – полные частные производные, $1 \leq \mu \leq m$;
- $d^m x = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, $d_\mu x = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \check{dx}^\mu \wedge \dots \wedge dx^m$, здесь и далее предполагается, что аргумент под значком $\wedge$ пропущен.

Кроме того,

- $\Phi = C^\infty(X; \mathbb{R})$ – алгебра всех гладких функций из X в $\mathbb{R}$;
- $\Phi^A = C^\infty(X; U)$ есть Φ -модуль всех гладких функций из X в U ;

- $\Phi_{\mathbb{I}}^A = C^\infty(X; U)$ есть Φ -модуль всех гладких функций из X в U ;
- $\mathcal{F} = C_{\text{fin}}^\infty(XU; \mathbb{R})$ – алгебра всех гладких функций из XU в $\mathbb{R}$, зависящих от конечного числа аргументов (подробнее см., например, [3], [8]);
- $\mathcal{F}^K = C_{\text{fin}}^\infty(XU; \mathbb{R}^K)$ есть $\mathcal{F}$ -модуль всех гладких функций из XU в $\mathbb{R}^K$, зависящих от конечного числа аргументов, K – некоторое множество индексов;
- $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}^K = C_{\text{fin}}^\infty(XU; \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^K)$ есть $\mathcal{F}$ -модуль всех гладких функций из XU в $\mathbb{R}_{\mathbb{I}}^K$, зависящих от конечного числа аргументов.

2.2. Соглашения.

- Все построения здесь локальные, без явного упоминания об этом. Например, мы пишем $\varphi \in \Phi$, фактически считая, что $\varphi \in \Phi(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R})$, где $\mathcal{O}$ – некоторая область в X .
- Все линейные операции выполняются над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, хотя это несущественно.
- Как правило, мы предполагаем суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам в естественных пределах.
- Фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают симметризацию, а квадратные $[\cdot]$ – альтернирование (кососимметризацию).
- Угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означают спаривание элементов дуальных модулей.
- Значок $\circ$ означает композицию отображений.
- Мы предполагаем, что изучаемая дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \partial)$ невырожденная (подробнее см. п. 2.6).

2.3. Дифференциальная алгебра. Дифференциальная алгебра (см., например, [9], [10]) есть пара $(\mathcal{A}, \partial)$, где

- $\mathcal{A}$ – ассоциативная коммутативная унитарная алгебра,
- $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m)$ есть $\mathcal{A}$ -линейно независимое подмножество из $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ такое, что $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$.

Напомним, что для каждой ассоциативной коммутативной унитарной алгебры $\mathcal{A}$ определено множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех ее дифференцирований, т. е. множество всех эндоморфизмов $X \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ таких, что для всех $a, b \in \mathcal{A}$ справедливо правило Лейбница: $X(ab) = (Xa)b + a(Xb)$. Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ обладает естественной структурой алгебры Ли над алгеброй $\mathcal{A}$, т. е. имеет две согласованные структуры: структуру алгебры Ли и структуру $\mathcal{A}$ -модуля, с условием согласования: $[aX, Y] = a[X, Y] - (Ya)X$ для всех $a \in \mathcal{A}$ и для всех $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Пусть

- $\mathfrak{d} = \{\zeta = \zeta^\mu \partial_\mu \mid \zeta^\mu \in \mathcal{A}\}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ с $\mathcal{A}$ -базисом $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m)$,
- $\mathfrak{d}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{d}; \mathcal{A}) = \{\omega = \omega_\mu \theta^\mu \mid \omega_\mu \in \mathcal{A}\}$ есть дуальный $\mathcal{A}$ -модуль с дуальным $\mathcal{A}$ -базисом $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$, где $\langle \theta^\mu, \partial_\nu \rangle = \theta^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$, для всех $1 \leq \mu, \nu \leq m$.

2.4. Дифференциальные идеалы. Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра. Идеал $\mathcal{I}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется *дифференциальным*, или $(\mathcal{A}, \partial)$ -идеалом, если он замкнут относительно дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_m$, т. е. если $\partial(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. Ясно, что пара $(\mathcal{I}, \partial)$ – дифференциальная алгебра, где $\partial = \partial|_{\mathcal{I}}$.

Пусть $\mathcal{I}$ есть $(\mathcal{A}, \partial)$ -идеал. Дифференциальная фактор-алгебра $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\partial})$ определена точной последовательностью $\mathcal{A}$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}} \rightarrow 0, \quad a \mapsto \overline{a} = a + \mathcal{I},$$

и правилом $\overline{\partial}_\mu \overline{a} = \overline{\partial_\mu a}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $1 \leq \mu \leq m$.

2.5. Дифференциальные модули. Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра. $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{M}$ называется *дифференциальным*, или $(\mathcal{A}, \partial)$ -модулем, если определен морфизм алгебр Ли $\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{M})$ такой, что выполняется правило Лейбница $\partial_\mu(aM) = (\partial_\mu a)M + a(\partial_\mu M)$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, $a \in \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{M}$. Напомним, что $\mathfrak{gl}(\mathcal{M})$ – алгебра Ли, присоединенная к ассоциативной алгебре $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ всех линейных эндоморфизмов пространства $\mathcal{M}$.

Подмодуль $\mathcal{S}$ $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля $\mathcal{M}$ называется *дифференциальным*, или $(\mathcal{A}, \partial)$ -подмодулем, если он замкнут относительно дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_m$, т.е. если $\partial(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. В этом случае дифференциальный фактор-модуль $\overline{\mathcal{M}}$ определен точной последовательностью $\mathcal{A}$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathcal{M}} \rightarrow 0, \quad M \mapsto \overline{M} = M + \mathcal{S},$$

и правилом $\overline{\partial}_\mu \overline{M} = \overline{\partial_\mu M}$ для всех $M \in \mathcal{M}$, $1 \leq \mu \leq m$.

2.6. Дифференциальные многочлены. Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра. Обозначим через $\mathcal{A}[\partial]$ множество всех *дифференциальных многочленов*, т.е. $\mathcal{A}$ -модуль всех многочленов от переменных $\partial_1, \dots, \partial_m$ с коэффициентами из $\mathcal{A}$. Каждый многочлен $P = P(\partial) \in \mathcal{A}[\partial]$ может быть записан двумя способами:

$$P(\partial) = \sum_{|i| \leq \text{ord}(P)} a^i \partial_i = \sum_{0 \leq p \leq \text{ord}(P)} a^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p},$$

где

- число $\text{ord}(P) \in \mathbb{Z}_+$ есть порядок многочлена $P(\partial)$,
- коэффициенты $a^i, a^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m$,
- $a^{\pi(\mu_1 \dots \mu_p)} = a^{\mu_1 \dots \mu_p}$ для любой перестановки $\pi \in \Sigma_p$,
- моноом $\partial_i = (\partial_1)^{i^1} \dots (\partial_m)^{i^m}$, $i = (i^1, \dots, i^m) \in \mathbb{I}$,
- моноом $\partial_{\mu_1 \dots \mu_p} = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_p}$, $1 \leq \mu_1, \dots, \mu_p \leq m$.

Множество $\mathcal{A}[\partial]$ имеет структуру ассоциативной унитарной алгебры, причем билинейная операция задана правилом Лейбница

$$\partial_\mu \circ a = \partial_\mu a + a \partial_\mu \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq m, a \in \mathcal{A}.$$

Например,

$$(a \partial_\mu) \circ (b \partial_\nu) = (a(\partial_\mu b)) \partial_\nu + (ab) \partial_{\mu\nu} \quad \text{для всех } a, b \in \mathcal{A}, 1 \leq \mu, \nu \leq m.$$

Каждый дифференциальный многочлен $P(\partial) = \sum_i a^i \partial_i \in \mathcal{A}[\partial]$ определяет линейный дифференциальный оператор на пространстве $\mathcal{A}$ правилом: $P(\partial)b = \sum_i a^i (\partial_i b)$, $b \in \mathcal{A}$. Заметим, что билинейная операция на алгебре $\mathcal{A}[\partial]$ совпадает с правилом композиции в алгебре $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$.

Дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \partial)$ называется *невырожденной*, если для любого $(\mathcal{A}, \partial)$ -идеала $\mathcal{I}$ и любого дифференциального многочлена $P(\partial) = \sum_i a^i \partial_i \in \mathcal{A}[\partial]$ вложение $P(\partial)\phi \in \mathcal{I}$ имеет место для всех $\phi \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты $a^i \in \mathcal{I}$. В этом случае определено вложение $\mathcal{A}[\partial] \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$.

Мы предполагаем, что изучаемая дифференциальная алгебра невырожденная.

Таким же образом для каждого $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля $\mathcal{M}$ определено множество $\mathcal{M}[\partial]$ всех дифференциальных многочленов с коэффициентами из $\mathcal{M}$. В этом случае правило Лейбница задает на множестве $\mathcal{M}[\partial]$ структуру $\mathcal{A}[\partial]$ -бимодуля.

2.7. Интегрирование по частям (формула Грина). Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра, и $\mathcal{K}$ есть $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуль. *Дуальный* $\mathcal{A}$ -модуль $\mathcal{K}^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}; \mathcal{A})$ имеет структуру $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля, задаваемую правилом Лейбница

$$\partial_{\mu} \langle \phi, f \rangle = \langle \partial_{\mu} \phi, f \rangle + \langle \phi, \partial_{\mu} f \rangle \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq t, \quad \phi \in \mathcal{K}^*, \quad f \in \mathcal{K}.$$

Далее, пусть $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ суть $(\mathcal{A}, \partial)$ -модули, и $\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*$ – их дуальные. $\mathcal{A}$ -модули $\mathcal{M} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}; \mathcal{L})$ и $\mathcal{N} = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}^*; \mathcal{K}^*)$ имеют структуры $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля, также задаваемые правилом Лейбница. Например,

$$\partial_{\mu} \circ M = \partial_{\mu} M + M \circ \partial_{\mu} \quad \text{для всех } 1 \leq \mu \leq t, \quad M \in \mathcal{M}.$$

Более того, определено *сопряжение* $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $M \mapsto N = M^*$, где

$$\langle M^* \phi, f \rangle = \langle \phi, M f \rangle \quad \text{для всех } \phi \in \mathcal{L}^*, f \in \mathcal{K}.$$

Мы будем пользоваться матричными обозначениями: $\phi M = M^* \phi$. В этом случае предыдущее определение принимает вид $\langle \phi M, f \rangle = \langle \phi, M f \rangle$.

Для каждого многочлена $P(\partial) = \sum_p M^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{M}[\partial]$ определен *сопряженный по Лагранжу* многочлен

$$P^*(\partial) = \sum_p (-1)^p \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \circ (M^{\mu_1 \dots \mu_p})^* \in \mathcal{N}[\partial],$$

т. е.

$$P^*(\partial)\phi = \sum_p (-1)^p \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} (\phi M^{\mu_1 \dots \mu_p}) \quad \text{для всех } \phi \in \mathcal{L}^*.$$

ТЕОРЕМА 1. Для каждого линейного дифференциального оператора

$$P(\partial) = \sum_p M^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}; \mathcal{L})$$

существует билинейный дифференциальный оператор

$$J(\partial) = (J^{\mu}(\partial)) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^* \times \mathcal{K}; \mathcal{A}^m)$$

такой, что формула Грина

$$\langle \phi, P(\partial)f \rangle - \langle P^*(\partial)\phi, f \rangle = \partial_{\mu} (J^{\mu}(\partial)(\phi, f))$$

справедлива для всех пар $(\phi, f) \in \mathcal{L}^* \times \mathcal{K}$. Например, можно положить

$$J^{\mu}(\partial)(\phi, f) = \sum_{p,q} (-1)^p \langle \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} (\phi M^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q}), \partial_{\nu_1 \dots \nu_q} f \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямой проверкой. ■

2.8. Дифференциальный комплекс. Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра. Определена внешняя алгебра $\Omega(\mathcal{A}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \Omega^q(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ -модули

$$\Omega^q(\mathcal{A}) = \begin{cases} \mathcal{A}, & q = 0, \\ \wedge^q \mathfrak{d}^*, & 1 \leq q \leq m, \\ 0, & q < 0 \text{ или } q > m. \end{cases}$$

В свою очередь, для каждого $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля $\mathcal{M}$ определен $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуль $\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega(\mathcal{A})$.

Каждая форма $\omega \in \Omega^q(\mathcal{M})$, $1 \leq q \leq m$, имеет представление

$$\omega = \frac{1}{q!} \omega_{\nu_1 \dots \nu_q} \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q}, \quad \omega_{\nu_1 \dots \nu_q} \in \mathcal{M},$$

где

- $\omega_{\pi(\nu_1 \dots \nu_q)} = \text{sign}(\pi) \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}$ для всех перестановок $\pi \in \Sigma_q$,
- $\theta^{\nu_1 \dots \nu_q} = \theta^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\nu_q}$, $1 \leq \nu_1, \dots, \nu_q \leq m$,
- $(\theta^{\nu_1 \dots \nu_q} \mid 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_q \leq m)$ есть базис $\mathcal{A}$ -модуля $\Omega^q(\mathcal{A})$.

Определены следующие операции:

- $\varepsilon^\mu: \Omega^q(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{M})$, $\omega \mapsto \theta^\mu \wedge \omega$,
- $\partial_\mu: \Omega^q(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^q(\mathcal{M})$, $\omega \mapsto \partial_\mu \omega$,
- $d^q = d|_{\Omega^q(\mathcal{M})} = \varepsilon^\mu \circ \partial_\mu: \Omega^q(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{M})$, $\omega \mapsto d\omega$,

где $\omega = (1/q!) \omega_{\nu_1 \dots \nu_q} \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q}$, $\partial_\mu \omega = (1/q!) (\partial_\mu \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}) \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q}$, $q \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \mu \leq m$.

Очевидно, $d \circ d = 0$, так что определен дифференциальный комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q\}$ с пространствами когомологий $H^q(\mathcal{M}) = \text{Ker } d^q / \text{Im } d^{q-1}$.

Пусть $\mathcal{S}$ есть $(\mathcal{A}, \partial)$ -подмодуль $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуля $\mathcal{M}$, и $\overline{\mathcal{M}}$ – соответствующий $(\mathcal{A}, \partial)$ -фактор-модуль.

Стандартными методами гомологической алгебры (см., например, [11]) по точной последовательности $0 \rightarrow (\mathcal{S}, \partial) \rightarrow (\mathcal{M}, \partial) \rightarrow (\overline{\mathcal{M}}, \partial) \rightarrow 0$ $(\mathcal{A}, \partial)$ -модулей строится точная последовательность

$$0 \rightarrow \{\Omega^q(\mathcal{S}); d^q\} \rightarrow \{\Omega^q(\mathcal{M}); d^q\} \rightarrow \{\Omega^q(\overline{\mathcal{M}}); \overline{d}^q\} \rightarrow 0$$

дифференциальных комплексов, которая в явном виде записывается как коммутативная диаграмма линейных пространств с точными строками, представленная на рис. 1.

ТЕОРЕМА 2. *Последовательность линейных пространств*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathcal{S}) \longrightarrow H^0(\mathcal{M}) \longrightarrow H^0(\overline{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\Delta} \\ &\xrightarrow{\Delta} H^1(\mathcal{S}) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}) \longrightarrow H^1(\overline{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\Delta} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\Delta} H^m(\mathcal{S}) \longrightarrow H^m(\mathcal{M}) \longrightarrow H^m(\overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

точная, где связующие линейные отображения

$$\Delta = \Delta^q: H^q(\overline{\mathcal{M}}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{S}), \quad \overline{\omega} \mapsto \Delta \overline{\omega}, \quad 0 \leq q \leq m-1,$$

действуют по правилу $\Delta \overline{\omega} = \overline{d\omega}$ для всех $\omega \in \Omega^q(\mathcal{M})$, $d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{S})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \Omega^0(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^0(\overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\
0 & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^1(\overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \bar{d} \\
0 & \longrightarrow & \Omega^m(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \Omega^m(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^m(\overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится простым диаграммным поиском (см., например, [11]). ■

Заметим, что $H^0(\mathcal{S}) = \{\omega \in \mathcal{S} \mid d\omega = 0\}$, $H^0(\mathcal{M}) = \{\omega \in \mathcal{M} \mid d\omega = 0\}$ и $H^0(\overline{\mathcal{M}}) = \{\bar{\omega} \in \overline{\mathcal{M}} \mid d\omega \in \mathcal{S}\}$ суть линейные пространства дифференциальных констант $(\mathcal{A}, \partial)$ -модулей $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$.

2.9. Одна точная последовательность. Пусть $(\mathcal{A}, \partial)$ – дифференциальная алгебра, и $\mathcal{M}$ есть $(\mathcal{A}, \partial)$ -модуль. Рассмотрим дифференциальный комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{M}[\partial]); d\}$. В этом случае для формы

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_p \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q} \in \Omega^q(\mathcal{M}[\partial]), \quad \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{M},$$

мы имеем

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \omega &= \frac{1}{q!} \sum_p \partial_\mu \circ \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q} = \\
&= \frac{1}{q!} \sum_p [(\partial_\mu \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}) \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} + \omega_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu \mu_1 \dots \mu_p}] \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_q}, \\
d\omega &= \frac{1}{(q+1)!} \sum_p (d\omega)_{\nu_0 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes \theta^{\nu_0 \dots \nu_q}, \\
(d\omega)_{\nu_0 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} &= (q+1) \left(\partial_{[\nu_0} \omega_{\nu_1 \dots \nu_q]}^{\mu_1 \dots \mu_p} + \delta_{[\nu_0}^{\{\mu_1} \omega_{\nu_1 \dots \nu_q]}^{\mu_2 \dots \mu_p\}} \right).
\end{aligned}$$

Характеристикой многочлена $P(\partial) = \sum_p M^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{M}[\partial]$ называется элемент

$$\chi(P(\partial)) = \sum_p (-1)^p \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} M^{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{M}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существуют линейные отображения $h^q: \Omega^q(\mathcal{M}[\partial]) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathcal{M}[\partial])$, $0 \leq q \leq m$, такие что для каждой формы $\omega \in \Omega^q(\mathcal{M}[\partial])$ справедлива гомотопическая формула*

$$(d^{q-1} \circ h^q + h^{q+1} \circ d^q)\omega = \begin{cases} \omega, & q \neq m, \\ \omega - \chi(\omega), & q = m. \end{cases}$$

Например, можно положить

$$h^q \omega = \begin{cases} 0, & q = 0, \\ \frac{1}{(q-1)!} \sum_p (h^q \omega)_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}}^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes \theta^{\nu_1 \dots \nu_{q-1}}, & q > 0, \end{cases}$$

где

$$(h^q \omega)_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \sum_s (-1)^s c(p, q, s) \partial_{\lambda_1 \dots \lambda_s} \omega_{\mu \nu_1 \dots \nu_{q-1}}^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_s \mu_1 \dots \mu_p},$$

$$c(p, q, s) = \frac{(p+1) \dots (s+p+1)}{(p+m-q+1) \dots (s+p+m-q+1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямой проверкой. ■

Характеристическое отображение $\chi: \Omega^m(\mathcal{M}[\partial]) \rightarrow \Omega^m(\mathcal{M})$ действует по правилу

$$\omega = \omega(\partial) \otimes \theta^{\wedge m} \mapsto \chi(\omega) = \chi(\omega(\partial)) \otimes \theta^{\wedge m},$$

где $\omega(\partial) = \sum_p \omega^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1 \dots \mu_p} \in \mathcal{M}[\partial]$, $\theta^{\wedge m} = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Последовательность линейных пространств*

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathcal{M}[\partial]) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{M}[\partial]) \xrightarrow{d} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{m-1}(\mathcal{M}[\partial]) \xrightarrow{d} \Omega^m(\mathcal{M}[\partial]) \xrightarrow{\chi} \Omega^m(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

точная, так что $H^q(\mathcal{M}[\partial]) = 0$, $q \neq m$, $H^m(\mathcal{M}[\partial]) = \Omega^m(\mathcal{M}[\partial]) / \ker \chi$.

3. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Уравнения в частных производных в алгебраическом подходе. В алгебраическом подходе (см. [1], [8], [12], [13]) система уравнений в частных производных записывается в виде $F = 0$, где

- $F = (F^\kappa) \in \mathcal{F}^K$, $F^\kappa = F^\kappa(x, \mathbf{u}) = F^\kappa(x^\mu, u_i^\alpha \mid |i| \leq p)$, $\kappa \in K$,
- x^μ – независимые переменные, $1 \leq \mu \leq m$,
- $u_i^\alpha = \partial_{x^i} u^\alpha$ – дифференциальные переменные, $\alpha \in A$, $i \in \mathbb{I}$,
- $\partial_{x^i} = (\partial_{x^1})^{i^1} \dots (\partial_{x^m})^{i^m}$,
- $p \in \mathbb{N}$ – порядок системы

(подробнее обозначения см. в п. 2.1). Множество решений системы $F = 0$ есть множество

$$\text{Sol}(F) = \{(x, \mathbf{u}) \in \mathbf{XU} \mid D_i F^\kappa(x, \mathbf{u}) = 0, i \in \mathbb{I}, \kappa \in \mathbf{K}\},$$

где $D_i = (D_1)^{i^1} \dots (D_m)^{i^m}$. Система $F = 0$ называется *регулярной*, если множество $\text{Sol}(F)$ имеет структуру гладкого подмногообразия в $\mathbf{XU}$. Функция $\phi = (\phi^\alpha) \in \Phi^{\mathbf{A}}$ есть *решение* системы $F = 0$, если

$$F^\kappa(x, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}=\mathbf{j}\phi(x)} \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad \{(x, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} = \mathbf{j}\phi(x)\} \subset \text{Sol}(F),$$

где *джет* $\mathbf{j}\phi = (\phi_i^\alpha) \in \Phi_{\mathbb{I}}^{\mathbf{A}}$, $\phi_i^\alpha = \partial_{x^i} \phi^\alpha$.

Мы предполагаем, что система $F = 0$ *нетривиальная*, т. е. $\text{Sol}(F) \neq \mathbf{XU}$, и *совместная*, т. е. $\text{Sol}(F) \neq \emptyset$.

3.2. Дифференциальный идеал. Пара $(\mathcal{F}, D)$ имеет структуру дифференциальной алгебры (см. п. 2.3), где $D = (D_1, \dots, D_m)$ (заметим, что $[D_\mu, D_\nu] = 0$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$). Более того, можно проверить, что эта алгебра невырожденная и подалгебра ее дифференциальных констант $H^0(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$.

Каждая система $F = 0$ задает $(\mathcal{F}, D)$ -идеал алгебры $(\mathcal{F}, D)$, а именно идеал

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(F) = \{\phi = P(D)F = P_\kappa(D)F^\kappa \mid P(D) = (P_\kappa(D)) \in \mathcal{F}_K[D]\}.$$

По определению имеется вложение $\mathcal{I} \subset \{\phi \in \mathcal{F} \mid \phi|_{\text{Sol}(F)} = 0\}$ (обратное вложение имеет место, если система регулярная). Идеал $\mathcal{I}$ нетривиальный, т. е. $\mathcal{I} \neq 0, \mathcal{F}$ (напомним, мы предполагаем, что система $F = 0$ нетривиальная). В частности, подалгебра его дифференциальных констант $H^0(\mathcal{I}) = 0$.

Фактор-алгебра $\overline{\mathcal{F}}$ определена точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Пара $(\overline{\mathcal{F}}, \overline{D})$ имеет структуру дифференциальной алгебры, где $\overline{D}_\mu \overline{\phi} = \overline{D_\mu \phi}$, $1 \leq \mu \leq m$, $\phi \in \mathcal{F}$. Элементы алгебры $\overline{\mathcal{F}}$ можно рассматривать как гладкие функции на многообразии решений $\text{Sol}(F)$ (это действительно так, если система регулярная).

3.3. Вариационный комплекс. Комплекс $\{\Omega^q(\mathcal{F}); d^q\}$ является одним из главных элементов формального вариационного исчисления и известен как *вариационный комплекс*. Здесь

$$\mathfrak{d} = \{\zeta = \zeta^\mu D_\mu \mid \zeta^\mu \in \mathcal{F}\}, \quad \mathfrak{d}^* = \{\omega = \omega_\nu dx^\nu \mid \omega_\nu \in \mathcal{F}\},$$

$\theta^\nu = dx^\nu$ (заметим, что $dx^\nu(D_\mu) = D_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$). Следующая теорема, возможно, есть главный результат формального вариационного исчисления (см., например, [8], [12]).

ТЕОРЕМА 4. *Линейные пространства когомологий комплекса $\{\Omega^q(\mathcal{F}); d^q\}$ имеют вид*

$$H^0(\mathcal{F}) = \mathbb{R}, \quad H^q(\mathcal{F}) = 0, \quad 1 \leq q \leq m-1, \quad H^m(\mathcal{F}) = \mathfrak{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} / \text{Ker } E,$$

где оператор Эйлера $E: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_A$, $f \mapsto Ef = (E_\alpha f)$,

$$E_\alpha f = \delta_{u^\alpha} f = \sum_i (-1)^{|i|} D_i \partial_{u_i^\alpha} f, \quad \alpha \in \mathbf{A}.$$

3.4. Законы сохранения и дифференциальные идеалы. Пусть $F = 0$ есть система уравнений в частных производных, и $\mathcal{I}$ – ее дифференциальный идеал.

Для фактор-формы $\bar{\omega} \in \Omega^{m-1}(\bar{\mathcal{F}})$ условие $\bar{d}\bar{\omega} = 0$ означает, что дифференциал $d\omega \in \Omega^m(\mathcal{I})$, и, значит, $d\omega|_{\text{Sol}(F)} = 0$, т. е. форма ω замкнута на многообразии решений. В физике такие $(m-1)$ -формы называются *сохраняющимися токами*, а их факторы называются *законами сохранения*. Имея это в виду, элементы пространств когомологий $H^q(\bar{\mathcal{F}})$ можно рассматривать как *q -мерные законы сохранения*. При $q = m-1$ имеем обычные законы сохранения, а при $q < m-1$ имеем *маломерные законы*.

Таким образом, мы рассматриваем линейные пространства

$$\text{CL}^0(F) = H^0(\bar{\mathcal{F}})/\mathbb{R}, \quad \text{CL}^q(F) = H^q(\bar{\mathcal{F}}), \quad 1 \leq q \leq m-1,$$

как пространства законов сохранения системы $F = 0$.

Далее, точная последовательность $0 \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ порождает точную последовательность комплексов (см. рис. 1), где $\mathcal{S} = \mathcal{I}$, $\mathcal{M} = \mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{F}}$, $H^0(\mathcal{I}) = 0$, $H^0(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 5. *Линейные пространства когомологий комплексов $\{\Omega^q(\mathcal{I}); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\bar{\mathcal{F}}); d^q\}$ связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned} \Delta: \text{CL}^q(F) &\simeq H^{q+1}(\mathcal{I}), & 0 \leq q \leq m-2, \\ 0 \rightarrow \text{CL}^{m-1}(F) &\xrightarrow{\Delta} H^m(\mathcal{I}) \xrightarrow{\iota} H^m(\mathcal{F}) \rightarrow H^m(\bar{\mathcal{F}}) \rightarrow 0, \\ \Delta: H^q(\mathcal{F}) &\rightarrow H^{q+1}(\mathcal{I}), & \bar{\omega} \mapsto \Delta\bar{\omega} = \bar{d}\bar{\omega}. \end{aligned}$$

В частности, $\text{CL}^{m-1}(F) \simeq \ker \bar{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться теоремами 2 и 4. ■

Отметим, что здесь $E: \Omega^m(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_A$, $fd^m x \mapsto Ef$ (ср. с теоремой 4), а фактор-отображение $\bar{E}: H^m(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{F}_A$, $\bar{f}d^m x \mapsto Ef$ ($E(d\Omega^{m-1}(\mathcal{I})) = 0$).

3.5. Дифференциальные тождества. Пусть $F = 0$ – система уравнений в частных производных. По определению дифференциального идеала $\mathcal{I}(F)$ имеется сюръекция $(\mathcal{F}, D)$ -модулей $F: \mathcal{F}_K[D] \rightarrow \mathcal{I}$, $P(D) \mapsto P(D)F$. Ядро $\text{DI} = \text{DI}(F)$ этой сюръекции задается точной последовательностью $(\mathcal{F}, D)$ -модулей

$$0 \rightarrow \text{DI} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_K[D] \xrightarrow{F} \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Элементы модуля DI называются *дифференциальными тождествами* системы $F = 0$. Опять определена точная последовательность комплексов (см. рис. 1), где $\mathcal{S} = \text{DI}$, $\mathcal{M} = \mathcal{F}_K[D]$, $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{I}$.

ТЕОРЕМА 6. *Пространства когомологий комплексов $\{\Omega^q(\mathcal{I}); d^q\}$ и $\{\Omega^q(\text{DI}); d^q\}$ связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned} H^0(\text{DI}) &= 0, & 0 \rightarrow H^q(\mathcal{I}) \xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(\text{DI}) \rightarrow 0, & 0 \leq q \leq m-2, \\ 0 \rightarrow H^{m-1}(\mathcal{I}) &\xrightarrow{\Delta} H^m(\text{DI}) \xrightarrow{\iota} H^m(\mathcal{F}_K[D]) \xrightarrow{F} H^m(\mathcal{I}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В частности, $H^{m-1}(\mathcal{I}) \simeq \ker \bar{\chi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать теорему 1 и следствие 1. ■

Отметим, что здесь $\chi: \Omega^m(\mathcal{F}_K[D]) \rightarrow \mathcal{F}_K$, $P(D)d^m x \mapsto \chi(P(D))$ (ср. с п. 2.9), а фактор-отображение $\bar{\chi}: H^m(\text{DI}) \rightarrow \mathcal{F}_K$, $\overline{P(D)}d^m x \mapsto \chi(P(D))$ (ясно, что $\chi(d\Omega^{m-1}(\text{DI})) = 0$).

3.6. Законы сохранения и дифференциальные тождества. Пусть $F = 0$ – система уравнений в частных производных, а $\mathcal{I}$ – ее дифференциальный идеал.

ТЕОРЕМА 7. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\text{CL}^q(F) \simeq \begin{cases} H^{q+2}(\text{DI}), & 0 \leq q \leq m-3, \\ \ker \bar{\chi}, & q = m-2, \\ \ker \bar{E}, & q = m-1, \end{cases}$$

где $\bar{\chi}: H^m(\text{DI}) \rightarrow \mathcal{F}_K$, $\bar{E}: H^m(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{F}_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать теоремы 5 и 6. ■

Поясним, что в формулировке теоремы 7

- изоморфизмы $\text{CL}^q(F) \simeq H^{q+2}(\text{DI})$, $0 \leq q \leq m-3$, действуют по правилу

$$\text{CL}^q(F) \ni \bar{\omega} \mapsto d\bar{\omega} = \overline{P(D)F} \mapsto \overline{dP(D)} \in H^{q+2}(\text{DI}),$$

где $\omega \in \Omega^q(\mathcal{F})$, $d\omega = P(D)F \in \Omega^{q+1}(\mathcal{I})$, $P(D) \in \Omega^{q+1}(\mathcal{F}_K[D])$, $dP(D)F = 0$, $dP(D) \in \Omega^{q+2}(\text{DI})$;

- изоморфизм $\text{CL}^{m-2}(F) \simeq \ker \bar{\chi}$ действует по правилу

$$\text{CL}^{m-2}(F) \ni \bar{\omega} \mapsto d\bar{\omega} = \overline{P(D)F} \mapsto \overline{dP(D)} \in \ker \bar{\chi} \subset H^m(\text{DI}),$$

где $\omega \in \Omega^{m-2}(\mathcal{F})$, $d\omega = P(D)F \in \Omega^{m-1}(\mathcal{I})$, $P(D) \in \Omega^{m-1}(\mathcal{F}_K[D])$, $dP(D)F = 0$, $\overline{dP(D)} \in \ker \bar{\chi} = \{\overline{Q(D)} \in H^m(\text{DI}) \mid \chi(Q(D)) = 0\}$;

- изоморфизм $\text{CL}^{m-1}(F) \simeq \ker \bar{E}$ действует по правилу

$$\text{CL}^{m-1}(F) \ni \bar{\omega} \mapsto d\bar{\omega} \in \ker \bar{E} \subset H^m(\mathcal{I}),$$

где $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathcal{F})$, $d\omega \in \Omega^m(\mathcal{I})$, $\ker \bar{E} = \{\bar{\phi} \in H^m(\mathcal{I}) \mid E\phi = 0\}$.

Опишем подробнее ядро $\ker \bar{E}$. Прежде всего, $\Omega^m(\mathcal{F}_K[D]) = \mathcal{F}_K[D] \otimes d^m x$, так что можно отождествлять пространства $\Omega^m(\mathcal{F}_K[D])$ и $\mathcal{F}_K[D]$. Далее, в силу формулы Грина (см. п. 2.7) каждая форма $Q(D) \in \Omega^m(\mathcal{F}_K[D])$ имеет представление $Q(D) = \chi + dJ(D)$, где

- $Q(D) = \sum_p Q^{\mu_1 \dots \mu_p} D_{\mu_1 \dots \mu_p}$,
- $\chi = \chi(Q(D)) = Q^*(D)1 \in \mathcal{F}_K$, $\chi F = \langle 1Q(D), F \rangle \in \mathcal{F}$,
- $J(D) = J^\mu(D)d_\mu x \in \Omega^{m-1}(\mathcal{F}_K[D])$,
 $J^\mu(D) = \sum_{p,q} (-1)^p D_{\mu_1 \dots \mu_p} \circ Q^{\mu\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} D_{\nu_1 \dots \nu_q}$.

В свою очередь,

$$\begin{aligned} E_\alpha(\chi F) &= \sum_i (-1)^{|i|} D_i \partial_{u_i^\alpha} (\chi_\kappa F^\kappa) = \\ &= \sum_i (-1)^{|i|} D_i ((\partial_{u_i^\alpha} \chi_\kappa) F^\kappa) + \sum_i (-1)^{|i|} D_i ((\partial_{u_i^\alpha} F^\kappa) \chi_\kappa) = \\ &= (\chi^* F)_\alpha + (F^* \chi)_\alpha, \quad \alpha \in A, \end{aligned}$$

где (см. [13]) $\chi^* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}^K; \mathcal{F}_A)$ – оператор, сопряженный по Лагранжу к оператору универсальной линеаризации

$$\chi_* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}^A; \mathcal{F}_K), \quad (\chi_* f)_\kappa = \sum_i (\partial_{u_i^\alpha} \chi_\kappa) D_i f^\alpha, \quad f \in \mathcal{F}^A, \quad \kappa \in K,$$

а $F^* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}_K; \mathcal{F}_A)$ – оператор, сопряженный по Лагранжу к оператору универсальной линеаризации

$$F_* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}^A; \mathcal{F}^K), \quad (F_* \phi)^\kappa = \sum_i (\partial_{u_i^\alpha} F^\kappa) D_i \phi^\alpha, \quad \phi \in \mathcal{F}^A, \quad \kappa \in K.$$

Таким образом,

$$\ker \bar{E} \simeq \{\chi \in \mathcal{F}_K \mid \chi^* F + F^* \chi = 0\},$$

в частности $F^* \chi|_{\text{Sol}(F)} = 0$ для всех $\chi \in \ker \bar{E}$.

3.7. Примеры.

3.7.1. *Уравнения Коши–Римана.* Здесь мы используем комплексные обозначения:

- $i = (i^1, \dots, i^m)$, $j = (j^1, \dots, j^m) \in \mathbb{Z}_+^m = \mathbb{I}$, $m \geq 2$;
- $z = (z^1, \dots, z^m)$, $\bar{z} = (\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^m) \in \mathbb{C}^m = X$, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2m$;
- $w, \bar{w} \in \mathbb{C} = U$, $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$, $\mathbf{w} = (w_{ij})$, $\bar{\mathbf{w}} = (\bar{w}_{ij}) \in \mathbb{C}_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}} = U$;
- $D_\mu = \partial_{z^\mu} + \sum_{i,j} (w_{i+(\mu),j} \partial_{w_{ij}} + \bar{w}_{i+(\mu),j} \partial_{\bar{w}_{ij}})$,
 $\bar{D}_\mu = \partial_{\bar{z}^\mu} + \sum_{i,j} (w_{i,j+(\mu)} \partial_{w_{ij}} + \bar{w}_{i,j+(\mu)} \partial_{\bar{w}_{ij}})$,
 $D_i \bar{D}_j w = w_{ij}$, $D_i \bar{D}_j \bar{w} = \bar{w}_{ij}$, $\bar{w}_{ij} = \bar{w}_{ji}$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(XU; \mathbb{C})$, $\mathcal{F} \ni \phi = \phi(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}})$.

Система уравнений Коши–Римана записывается следующим образом:

$$CR = \{\partial_{\bar{z}^\mu} w = 0, 1 \leq \mu \leq m\} = \{w_{0(\mu)} = 0, \bar{w}_{(\mu)0} = 0, 1 \leq \mu \leq m\},$$

т. е. здесь $F = (F_\mu, \bar{F}_\mu) \in \mathcal{F}_m$, $F_\mu = w_{0,(\mu)}$, $\bar{F}_\mu = \bar{w}_{(\mu),0}$, $1 \leq \mu \leq m$.

Многообразие решений имеет вид

$$\text{Sol}(CR) = \{(z, \mathbf{w}) \in XU \mid w_{i,j+(\mu)} = 0, \bar{w}_{i+(\mu),j} = 0, i, j \in \mathbb{I}, 1 \leq \mu \leq m\},$$

а дифференциальный идеал –

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(CR) = \{f \in \mathcal{F} \mid f = P^\mu w_{0(\mu)} + \bar{P}^\mu \bar{w}_{(\mu)0}\} = \{f \in \mathcal{F} \mid f = PF\},$$

где дифференциальные многочлены $P^\mu, \bar{P}^\mu \in \mathcal{F}[D, \bar{D}]$, $P = (P^\mu, \bar{P}^\mu) \in \mathcal{F}^m[D, \bar{D}]$.

Рассмотрим форму $\omega = \phi d^m z \in \Omega^m(\mathcal{F})$, где $\phi = \phi(z, \mathbf{w}) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{I}$ (т. е. $\partial_{\bar{z}^\mu} \phi = 0$, $\partial_{\bar{w}_{ij}} \phi = 0$, $\phi|_{\text{Sol}(CR)} \neq 0$). Здесь $d\omega = (\bar{D}_\mu \phi) d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$, где

$$\bar{D}_\mu \phi = \sum_{i,j} (\partial_{w_{ij}} \phi) w_{i,j+(\mu)} = p(D, \bar{D}) w_{0,(\mu)} = p(D, \bar{D}) F_\mu,$$

$$p(D, \bar{D}) = \sum_{i,j} (\partial_{w_{ij}} \phi) D_i \bar{D}_j \in \mathcal{F}[D, \bar{D}],$$

так что $d\omega = P^\mu(D, \bar{D})F_\mu \in \Omega^{m+1}(\mathcal{I})$, $P^\mu(D, \bar{D}) = p(D, \bar{D})d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$. Класс эквивалентности $[\omega] = \omega + \Omega^m(\mathcal{I}) + d\Omega^{m-1}(\mathcal{F}) \in \text{CL}^m(CR)$ нетривиальный, т. е. $[\omega] \neq 0$, если вариационная производная

$$\delta_w \phi = \sum_{i,j} (-1)^{|i+j|} D_i \bar{D}_j (\partial_{w_{ij}} \phi) \neq 0$$

(ср. с теоремой 4, заметим, что $\delta_{\bar{w}} \phi = 0$). Далее, $dP = (dP^\mu) \in \Omega^{m+2}(\text{DI})$, и класс $[dP] = dP + d\Omega^{m+1}(\text{DI}) \in H^{m+2}(\text{DI})$ нетривиальный, если класс $[\omega]$ нетривиальный, где $dP^\mu = (\bar{D}_\nu \circ p(D, \bar{D}))d\bar{z}^\nu \wedge d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$.

В частности, положим $\phi = w \in \mathcal{F}$, тогда $\omega = w d^m z$, $\delta_w w = 1 \neq 0$, $d\omega = w_{0,(\mu)} d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$, $P^\mu = d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$, $dP^\mu = \bar{D}_\nu d\bar{z}^\nu \wedge d\bar{z}^\mu \wedge d^m z$.

Итак,

$$0 \neq \text{CL}^m(CR) \simeq H^{m+2}(\text{DI}), \quad m < 2m - 1 \text{ для } m \geq 2.$$

3.7.2. Уравнения Янга–Миллса. Здесь $X = \mathbb{R}^m$, $U = \mathfrak{A}_m$, $\mathbf{U} = \mathfrak{A}_{m \times \mathbb{I}}$, $\mathbb{I} = \mathbb{Z}_+^m$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathbf{U}; \mathbb{R})$, $\Phi = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(X\mathbf{U}; \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ – алгебра Ли со скобкой $[\cdot, \cdot]$ и метрикой Киллинга $(\cdot, \cdot)$,

$$([A, B], C) + (B, [A, C]) = 0 \quad \text{для всех } A, B, C \in \mathfrak{A}.$$

Подробнее,

- $U = \{A = (A_\mu) \mid A_\mu \in \mathfrak{A}, 1 \leq \mu \leq m\}$,
- $\mathbf{U} = \{\mathbf{A} = (A_{\mu,i}) \mid A_{\mu,i} \in \mathfrak{A}, 1 \leq \mu \leq m, i \in \mathbb{I}\}$.

Далее,

- $g = \|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ – метрика Минковского на $\mathbb{R}^m$,
 $g^{-1} = \|g^{\mu\nu}\| = g$;
- $D_\lambda \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}), \text{End}_{\mathbb{R}}(\Phi)$, $1 \leq \lambda \leq m$, суть полные частные производные,
 $D_\lambda A_{\mu,i} = A_{\mu,i+(\lambda)}$;
- $\nabla_\lambda \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\Phi)$, $1 \leq \lambda \leq m$, суть ковариантные производные,
 $\nabla_\lambda f = D_\lambda f + [A_\lambda, f]$, $f \in \Phi$;
- $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ – форма кривизны, где $1 \leq \mu, \nu \leq m$,
 $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \in \text{End}_{\mathcal{F}}(\Phi)$;
- $\mathcal{L} = (F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu})/4$ – лагранжиан Янга–Миллса, $F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu'\nu'}$.

Система уравнений Янга–Миллса $YM = 0$ есть система уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $\mathcal{L}$, т. е.

$$YM = (YM^\nu), \quad YM^\nu = \delta_{A_\nu} \mathcal{L} = \nabla_\mu F^{\mu\nu} \in \Phi, \quad 1 \leq \nu \leq m.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \text{Sol}(YM) &= \{(x, \mathbf{A}) \in X\mathbf{U} \mid D_i YM^\nu = 0, i \in \mathbb{I}, 1 \leq \nu \leq m\}, \\ \mathcal{I} = \mathcal{I}(YM) &= \{f \in \mathcal{F} \mid f = (P(D), YM) = (P_\nu(D), YM^\nu)\}, \end{aligned}$$

где

$$P_\nu(D) = \sum_i f_\nu^i D_i \in \Phi[D], \quad (P_\nu(D), YM^\nu) = \sum_i (f_\nu^i, D_i YM^\nu).$$

Имеется дифференциальное тождество, именно $\nabla_\nu YM^\nu = 0$. Действительно,

$$\nabla_\nu YM^\nu = \nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]F^{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0.$$

Рассмотрим 0-форму $\omega = \mathcal{L} \in \Omega^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Здесь $d\omega = D_\lambda \mathcal{L} dx^\lambda$, где

$$\begin{aligned} D_\lambda \mathcal{L} &= \frac{1}{4} D_\lambda (F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}) = ((D_\lambda F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu}, D_\lambda F^{\mu\nu})) = \\ &= \frac{1}{4} ((D_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}], F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu}, D_\lambda F^{\mu\nu} + [A_\lambda, F^{\mu\nu}])) = \\ &= \frac{1}{4} ((\nabla_\lambda F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu}, \nabla_\lambda F^{\mu\nu})) = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}, \nabla_\lambda F^{\mu\nu}), \quad 1 \leq \lambda \leq m. \end{aligned}$$

Пусть теперь $m = 2$. Тогда

- $F_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} F$, $e_{\mu\nu}$ — знак перестановки $(1, 2) \mapsto (\mu, \nu)$,
 $F = F_{12} = D_1 A_2 - D_2 A_1 + [A_1, A_2]$, $F^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu}$;
- $\mathcal{L} = -(F, F)/2$, $YM^1 = \nabla_2 F$, $YM^2 = -\nabla_1 F$;
- $D_1 \mathcal{L} = -(F, \nabla_1 F) = (F, YM^2)$, $D_2 \mathcal{L} = -(F, \nabla_2 F) = -(F, YM^1)$;
- $d\mathcal{L} = (F, YM^2) dx^1 - (F, YM^1) dx^2 \in \Omega^1(\mathcal{I})$,

Подробнее,

$$d\mathcal{L} = (p_{1\mu}, YM^\mu) dx^1 + (p_{2\mu}, YM^\mu) dx^2 = (P_1, YM) dx^1 + (P_2, YM) dx^2,$$

где $P_1 = \|p_{11} p_{12}\|$, $P_2 = \|p_{21} p_{22}\| \in \Phi_2[D]$, $p_{11} = 0$, $p_{12} = F$, $p_{21} = -F$, $p_{22} = 0$, $YM = \|YM^1 YM^2\|^t \in \Phi^2$. Другими словами, $d\mathcal{L} = (\chi, YM)$, где форма $\chi = P_1 dx^1 + P_2 dx^2 \in \Omega^1(\Phi_2[D])$. Из равенства $(d\chi, YM) = dd\mathcal{L} = 0$ следует, что $d\chi = -\|D_1 \circ F \ D_2 \circ F\| d^2x \in \Omega^2(\text{DI})$.

Итак, класс эквивалентности $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathcal{I} \in \text{CL}^0(YM)$, $\bar{\mathcal{L}} \neq 0$, и класс эквивалентности $\bar{d\chi} = d\chi + d\Omega^1(\text{DI}) \in H^2(\text{DI})$, $\bar{d\chi} \neq 0$, т. е.

$$0 \neq \text{CL}^0(YM) \simeq H^2(\text{DI}), \quad 0 < 2 - 1 = 1.$$

Отметим, что здесь $(d\chi, YM) = -(F, \nabla_\nu YM^\nu) d^2x$ в согласии с приведенной выше общей формулой $\nabla_\nu YM^\nu = 0$.

Пусть теперь $m \geq 2$, и предположим, что

$$\text{cen } \mathfrak{A} = \{C \in \mathfrak{A} \mid [C, A] = 0 \text{ для всех } A \in \mathfrak{A}\} \neq 0.$$

Рассмотрим форму $\omega = (1/2)(C, F^{\mu\nu}) d_{\mu\nu}x \in \Omega^{m-2}(\mathcal{F})$, где $C \in \text{cen } \mathfrak{A}$, а $(m-2)$ -формы $d_{\mu\nu}x = -d_{\nu\mu}x$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$, определены равенством $d_{\mu\nu}x = (-1)^{\mu+\nu} dx^1 \wedge \dots dx^\mu \dots dx^\nu \dots \wedge dx^m$, $\mu < \nu$. Здесь

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{2} D_\lambda (C, F^{\mu\nu}) d_{\mu\nu}x = \frac{1}{2} (C, D_\lambda F^{\mu\nu}) dx^\lambda \wedge d_{\mu\nu}x = (C, D_\mu F^{\mu\nu}) d_\nu x = \\ &= (C, \nabla_\mu F^{\mu\nu}) d_\nu x = (C, YM^\nu) d_\nu x = (P^\nu(D), YM) d_\nu x \in \Omega^{m-1}(\mathcal{I}), \end{aligned}$$

где $P^\nu(D) = \|\delta_\lambda^\nu C \mid 1 \leq \lambda \leq m\| \in \Phi_m[D]$. Итак, класс эквивалентности $\bar{\omega} = \omega + d\Omega^{m-3}(\mathcal{F}) + \Omega^{m-2}(\mathcal{I}) \in \text{CL}^{m-2}(YM)$, а класс эквивалентности $\bar{d\chi} = d\chi + d\Omega^{m-1}(\text{DI}) \in H^m(\text{DI})$, где $\chi = P^\nu(D) d_\nu x$, $d\chi = D_\nu \circ P^\nu(D) d^m x = \|CD_\lambda \mid 1 \leq \lambda \leq m\| d^m x$. К сожалению, нельзя утверждать, что классы $\bar{\omega}$ и $\bar{d\chi}$ нетривиальные.

Заметим, что $(CD_\lambda, YM^\lambda) = (C, D_\lambda YM^\lambda) = (C, \nabla_\lambda YM^\lambda) = 0$.

4. ЭВОЛЮЦИЯ СО СВЯЗЯМИ

4.1. Эволюционные системы. Мы сохраняем введенные выше обозначения (см. п. 2.1) и вводим несколько новых. Именно,

- $T = \mathbb{R}$ – пространство дополнительной независимой переменной t (время);
- $\mathbf{V} = \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{I}}^A = \{ \mathbf{v} = (v_{p,i}^\alpha) \mid v_{p,i}^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in A, p \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{I} \}$ – расширенное пространство дифференциальных переменных, проекция $\Pi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ задана правилом $\mathbf{v} = (v_{p,i}^\alpha) \mapsto \mathbf{u} = (u_i^\alpha)$, $u_i^\alpha = v_{0,i}^\alpha$;
- $\Psi = \mathcal{C}^\infty(\mathrm{TX}; \mathbb{R})$, $\mathcal{E} = \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathrm{TXU}; \mathbb{R})$, $\mathfrak{F} = \mathcal{C}_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathrm{TXV}; \mathbb{R})$;
- $D_t = \partial_t + \sum_{\alpha,p,i} v_{p+1,i}^\alpha \partial_{v_{p,i}^\alpha}$, $D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha,p,i} v_{p,i+(\mu)}^\alpha \partial_{v_{p,i}^\alpha}$, $1 \leq \mu \leq m$, $[D_\mu, D_\nu] = 0$, $[D_t, D_\mu] = 0$ для всех $1 \leq \mu, \nu \leq m$.

Эволюционная система записывается как $E = 0$, где $E = (E^\alpha)$,

$$E^\alpha = u_t^\alpha - f^\alpha = v_{1,0}^\alpha - f^\alpha(t, x, \mathbf{u}), \quad \alpha \in A, \quad f = (f^\alpha) \in \mathcal{E}^A.$$

Многообразие решений этой системы есть

$$\mathrm{Sol}(E) = \{ (t, x, \mathbf{v}) \in \mathrm{TXV} \mid v_{p+1,i}^\alpha = f_{p,i}^\alpha, \alpha \in A, p \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{I} \} \cong \mathrm{TXU},$$

где $f_{p,i}^\alpha = D_t^p D_i f^\alpha$, заметим, что $\mathcal{E} \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, система $E = 0$ регулярная, и мы будем рассматривать пространство TXU как глобальную карту на многообразии $\mathrm{Sol}(E)$. Функция $\psi \in \Psi$ есть решение системы $E = 0$, если

$$\partial_t \psi^\alpha(t, x) = f^\alpha(t, x, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}=\mathbf{j}\psi(t,x)}, \quad \mathbf{j}\psi = (\psi_i^\alpha = \partial_{x^i} \psi^\alpha) \in \Psi_{\mathbb{I}}^A.$$

В силу регулярности системы $E = 0$, дифференциальный идеал

$$\mathcal{I}(E) = \{ f \in \mathfrak{F} \mid f|_{\mathrm{Sol}(E)} = 0 \}.$$

Более того, фактор-алгебра $\bar{\mathfrak{F}} \cong \mathcal{E}$, а дифференциальная алгебра $(\bar{\mathfrak{F}}, \bar{D}) \cong (\mathcal{E}, D)$, где $\bar{D} = (\bar{D}_t, \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_m)$, $D = (D_t, D_1, \dots, D_m)$,

$$\begin{aligned} D_\mu &= D_\mu|_{\mathcal{E}} = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha,i} u_{i+(\mu)}^\alpha \partial_{u_i^\alpha}, \quad 1 \leq \mu \leq m, \\ D_t &= D_t|_{\mathcal{E}} = \partial_t + \sum_{\alpha,i} f_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha}, \quad f_i^\alpha = D_i f^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{\Omega^q(\bar{\mathfrak{F}}); \bar{d}^q\} \cong \{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\}$ и $H^q(\bar{\mathfrak{F}}) = H^q(\mathcal{E})$, $q \in \mathbb{Z}$, где

$$\bar{d} = dt \wedge \bar{D}_t + dx^\mu \wedge \bar{D}_\mu, \quad d = dt \wedge D_t + dx^\mu \wedge D_\mu.$$

Введем вспомогательный комплекс $\{\Omega_x^q(\mathcal{E}); d_x^q\}$, где

$$\Omega_x^q = \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \mid \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} \in \mathcal{E} \right\}, \quad d_x = dx^\mu \wedge D_\mu$$

(здесь переменная $t \in T$ является параметром). Тогда получим представление

$$\Omega^q(\mathcal{E}) = \Omega_x^q(\mathcal{E}) \oplus dt \wedge \Omega_x^{q-1}(\mathcal{E}), \quad \omega = \omega' + dt \wedge \omega'',$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^0(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_x} & \Omega_x^0(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_x & & \downarrow d & & \downarrow d_x \\
0 & \longrightarrow & \Omega_x^0(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_x} & \Omega_x^1(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_x & & \downarrow d & & \downarrow d_x \\
0 & \longrightarrow & \Omega_x^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^2(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_x} & \Omega_x^2(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_x & & \downarrow d & & \downarrow d_x \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow d_x & & \downarrow d & & \downarrow d_x \\
0 & \longrightarrow & \Omega_x^{m-1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^m(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_x} & \Omega_x^m(\mathcal{E}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_x & & \downarrow d & & \downarrow d_x \\
0 & \longrightarrow & \Omega_x^m(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^{m+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_x} & 0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Рис. 2

где $\omega'' = \pi_t \omega = \iota_{D_t} \omega \in \Omega_x^{q-1}(\mathcal{E})$, $\omega' = \pi_x \omega = \omega - dt \wedge \omega'' \in \Omega_x^q(\mathcal{E})$, $q \in \mathbb{Z}$, а дифференциал $d = d_t + d_x$,

$$d_t = dt \wedge D_t: \Omega_x^q(\mathcal{E}) \rightarrow dt \wedge \Omega_x^q(\mathcal{E}), \quad d_x = dx^\mu \wedge D_\mu: \Omega_x^q(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega_x^{q+1}(\mathcal{E}).$$

Это представление порождает точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \{\Omega_x^{q-1}(\mathcal{E}); d_x^{q-1}\} \xrightarrow{\varepsilon} \{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\} \xrightarrow{\pi_x} \{\Omega_x^q(\mathcal{E}); d_x^q\} \rightarrow 0,$$

которая записывается как коммутативная диаграмма линейных пространств с точными строками, изображенная на рис. 2, где $\varepsilon = \varepsilon^q: \Omega_x^q(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{E})$, $\omega'' \mapsto \omega = (-1)^q dt \wedge \omega''$. В частности, определена следующая точная последовательность линейных пространств когомологий:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^0(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\Delta} & \\
\Delta & & H_x^0(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\Delta} \\
\Delta & & H_x^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^2(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^2(\mathcal{E}) \xrightarrow{\Delta} \dots \\
\dots & \xrightarrow{\Delta} & H_x^{m-1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^m(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^m(\mathcal{E}) \xrightarrow{\Delta} \\
\Delta & & H_x^m(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^{m+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & 0,
\end{array}$$

где $\Delta = \Delta^q: H_x^q(\mathcal{E}) \rightarrow H_x^q(\mathcal{E})$, $\overline{\omega'} \mapsto \Delta \overline{\omega'} = \overline{D_t \omega'}$.

ТЕОРЕМА 8. *Для всякой эволюционной системы $E = 0$ пространства законов сохранения*

$$\text{CL}^q(E) = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \leq q \leq m-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться равенствами $H^q(\overline{\mathfrak{F}}) = H^q(\mathcal{E})$, приведенной выше точной последовательностью и теоремой 4. ■

Таким образом, эволюционная система $E = 0$ может иметь лишь стандартные законы сохранения $\text{CL}^m(E) = H^m(\mathcal{E}) = \text{Ker } d^m / \text{Im } d^{m-1}$, где

$$\begin{aligned} \text{Ker } d^m &= \{ \omega = \rho d^m x + dt \wedge J^\mu d_\mu x \mid \rho, J^\mu \in \mathcal{E}, D_t \rho - D_\mu J^\mu = 0 \}, \\ \text{Im } d^{m-1} &= \{ \omega = d\eta \mid \eta = j^\mu d_\mu x + dt \wedge a^{\mu\nu} d_{\mu\nu} x, j^\mu, a^{\mu\nu} \in \mathcal{E} \}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\text{Ker } d^m}{\text{Im } d^{m-1}} = \frac{\{(\rho, J) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}^m \mid D_t \rho - D_\mu J^\mu = 0\}}{\{(\rho, J) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}^m \mid \rho = D_\mu j^\mu, J^\mu = D_t j^\mu + D_\nu a^{\mu\nu}, j^\mu, a^{\mu\nu} \in \mathcal{E}\}}.$$

ТЕОРЕМА 9. *Линейное пространство законов сохранения эволюционной системы $E = 0$ имеет вид*

$$\begin{aligned} \text{CL}^m(E) &= \frac{\{\rho \in \mathcal{E} \mid \delta_{u^\alpha} (D_t \rho) = 0, \alpha \in \mathbf{A}\}}{\{\rho \in \mathcal{E} \mid \delta_{u^\alpha} \rho = 0, \alpha \in \mathbf{A}\}} = \\ &= \{ \chi \in \mathcal{E}_\mathbf{A} \mid \chi_* = \chi^*, D_t \chi + f^* \chi = 0 \}, \end{aligned}$$

где $\chi = (\chi_\alpha)$, $\chi_\alpha = \delta_{u^\alpha} \rho$, $\alpha \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} f^*: \quad \mathcal{E}_\mathbf{A} &\rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{A}, \quad (f^* \chi)_\alpha = \sum_{\beta, i} (-1)^{|i|} D_i (\chi_\beta \partial_{u_i^\alpha} f^\beta), \\ \chi_*: \quad \mathcal{E}^\mathbf{A} &\rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{A}, \quad (\chi_* g)_\alpha = \sum_{\beta, i} (\partial_{u_i^\beta} \chi_\alpha) D_i g^\beta, \quad g = (g^\beta) \in \mathcal{E}^\mathbf{A}, \\ \chi^*: \quad \mathcal{E}^\mathbf{A} &\rightarrow \mathcal{E}_\mathbf{A}, \quad (\chi^* g)_\alpha = \sum_{\beta, i} (-1)^{|i|} D_i (g^\beta \partial_{u_i^\alpha} \chi_\beta), \quad g = (g^\beta) \in \mathcal{E}^\mathbf{A}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО смотри, например, в [1]. ■

4.2. Эволюция со связями. Мы сохраняем все введенные выше обозначения.

Эволюционная система со связями $EF = 0$ состоит из двух подсистем: эволюционной системы $E = 0$ и системы связей $F = 0$, где

$$E = (E^\alpha = u_t^\alpha - f^\alpha), \quad f = (f^\alpha) \in \mathcal{E}^\mathbf{A}, \quad F = (F^\kappa) \in \mathcal{E}^\mathbf{K}.$$

Мы предполагаем, что эти подсистемы совместные. Именно, пусть

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(F) = \{ \phi = P(D)F \in \mathcal{E} \mid P(D) \in \mathcal{E}_\mathbf{K}[D] \}$$

– дифференциальный идеал дифференциальной алгебры $(\mathcal{E}, D)$, $D = (D_1, \dots, D_m)$, порожденный системой связей $F = 0$ (заметим, что $(\mathcal{F}, D) \subset (\mathcal{E}, D)$). Условие совместности в этом случае принимает вид

$$D_t|_{\mathcal{J}}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}, \quad \text{т. е.} \quad D_t F = Q(D)F \in \mathcal{J}^\mathbf{K}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \text{Sol}(EF) &= \text{Sol}(E) \cap \text{Sol}(F) \cong \\ &\cong \{(t, x, \mathbf{u}) \in \text{TXU} \mid D_i F^\kappa(t, x, \mathbf{u}) = 0, \ i \in \mathbb{I}, \ \kappa \in \mathbb{K}\}, \end{aligned}$$

а пространства законов сохранения (см. п. 3.4)

$$\text{CL}^0(EF) = H^0(\bar{\mathcal{E}})/\mathbb{R}, \quad \text{CL}^q(EF) = H^q(\bar{\mathcal{E}}), \quad 1 \leq q \leq m,$$

где $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\mathcal{J}$.

Как и выше, точная последовательность линейных пространств $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathcal{E}} \rightarrow 0$ порождает цепную последовательность дифференциальных комплексов (ср. с рис. 1)

$$0 \rightarrow \{\Omega^q(\mathcal{J}); d^q\} \rightarrow \{\Omega^q(\mathcal{E}); d^q\} \rightarrow \{\Omega^q(\bar{\mathcal{E}}); \bar{d}^q\} \rightarrow 0$$

и, следовательно, точную последовательность линейных пространств когомологий

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathcal{J}) \rightarrow H^0(\mathcal{E}) \rightarrow H^0(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \\ &\xrightarrow{\Delta} H^1(\mathcal{J}) \rightarrow H^1(\mathcal{E}) \rightarrow H^1(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\Delta} H^m(\mathcal{J}) \rightarrow H^m(\mathcal{E}) \rightarrow H^m(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \\ &\xrightarrow{\Delta} H^{m+1}(\mathcal{J}) \rightarrow H^{m+1}(\mathcal{E}) \rightarrow H^{m+1}(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где связующие линейные отображения

$$\Delta = \Delta^q: H^q(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{J}), \quad \bar{\omega} \mapsto \Delta \bar{\omega}, \quad 0 \leq q \leq m-1,$$

действуют по правилу $\Delta \bar{\omega} = \overline{d\omega}$ для всех $\omega \in \Omega^q(\mathcal{E})$, $d\omega \in \Omega^{q+1}(\mathcal{J})$.

ТЕОРЕМА 10. Для эволюционной системы со связями $EF = 0$ справедливы следующие изоморфизмы:

- $\Delta: \text{CL}^q(EF) \simeq H^{q+1}(\mathcal{J}), \quad 0 \leq q \leq m-2,$
- $\Delta: \text{CL}^{m-1}(EF) \simeq H^m(\mathcal{J}) \cap d\Omega^{m-1}(\mathcal{E}).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться приведенной выше точной последовательностью и теоремой 8. Заметим, что $H^0(\mathcal{J}) = 0$. ■

ТЕОРЕМА 11. Для эволюционной системы со связями $EF = 0$ имеет место представление

$$\text{CL}^m(EF) \simeq \frac{\{\chi \in \mathcal{E}_A \mid \chi_* = \chi^*, D_t \chi + f^* \chi = \delta_u(\phi F), \ \phi \in \mathcal{E}_K\}}{\{\chi = \delta_u(\psi F) \mid \psi \in \mathcal{E}_K\}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится путем соответствующей модификации доказательства теоремы 9. Заметим, что $\delta_u(\phi F) = \phi^* F + F^* \phi$ и $\delta_u(\psi F) = \psi^* F + F^* \psi$. ■

Имеется другое описание системы $EF = 0$. Именно, представление

$$\Omega^q(\bar{\mathcal{E}}) = \Omega_x^q(\bar{\mathcal{E}}) \oplus dt \wedge \Omega_x^{q-1}(\bar{\mathcal{E}}), \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}' + dt \wedge \bar{\omega}'', \quad \bar{d} = \bar{d}_t + \bar{d}_x,$$

порождает точную последовательность комплексов (ср. с рис. 2)

$$0 \rightarrow \{\Omega_x^{q-1}(\bar{\mathcal{E}}); \bar{d}_x^{q-1}\} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \{\Omega^q(\bar{\mathcal{E}}); \bar{d}^q\} \xrightarrow{\bar{\pi}_x} \{\Omega_x^q(\bar{\mathcal{E}}); \bar{d}_x^q\} \rightarrow 0$$

и приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 12. *Определена точная последовательность линейных пространств*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^0(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\Delta} & \\ \Delta & & H_x^0(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^1(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^1(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \\ \Delta & & H_x^1(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^2(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^2(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \dots \\ \dots \Delta & & H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^m(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & H_x^m(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} \\ \Delta & & H_x^m(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & H^{m+1}(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}_x} & 0, \end{array}$$

где $\Delta = \Delta^q : H_x^q(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow H_x^q(\bar{\mathcal{E}})$, $\bar{\omega}' \mapsto \Delta \bar{\omega}' = \bar{\omega}'' = \bar{D}_t \bar{\omega}'$.

Для вычисления пространств $H_x^q(\bar{\mathcal{E}})$ можно воспользоваться теоремами 5, 6 и 7. ■

4.3. Примеры.

4.3.1. *Параболическая связь.* Рассмотрим систему $EF = 0$, где

$$E = u_t - u_{xy}, \quad F = u_y - u_{xx},$$

и форму $\omega = u dx + u_x dy + u_y dt \in \Omega^1(\mathcal{E})$. Дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega &= (u_y dy + u_t dt) \wedge dx + (u_{xx} dx + u_{xt} dt) \wedge dy + (u_{xy} dx + u_{yy} dy) \wedge dt = \\ &= (-u_y + u_{xx}) dx \wedge dy + (u_t - u_{xy}) dt \wedge dx + (u_{xt} - u_{yy}) dt \wedge dy = \\ &= -F dx \wedge dy + dt \wedge (E dx + (D_x E - D_y F) dy) \in \Omega^2(\mathcal{J}), \end{aligned}$$

так что класс эквивалентности $\bar{\omega} \in \text{CL}^1(EF)$, и, как легко проверить, $\bar{\omega} \neq 0$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 &= dd\omega = (-D_t F + D_y E - D_x(D_x E - D_y F)) dt \wedge dx \wedge dy = \\ &= ((D_y - D_x D_x)E - (D_t - D_x D_x)F) dt \wedge dx \wedge dy, \end{aligned}$$

т. е. класс эквивалентности $\bar{P}(\bar{D}) = \overline{\|P_F, P_E\|} \in H^3(\text{DI})$, где

$$P_F = (D_y - D_x D_x) \otimes dt \wedge dx \wedge dy, \quad P_E = -(D_t - D_x D_y) \otimes dt \wedge dx \wedge dy.$$

4.3.2. *Эллиптическая связь.* Рассмотрим систему $EF = 0$,

$$E = u_t - f(\xi, \eta), \quad F = u_{xx} + u_{yy}, \quad \xi = u_x, \quad \eta = u_y,$$

где $f(\xi, \eta)$ – гармоническая функция (т. е. $f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} = 0$). Пусть $A, B, C(\xi, \eta)$ – гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} A_\xi = B_\eta, \\ A_\eta = -B_\xi, \end{cases} \quad \begin{cases} C_\xi = A_\xi f_\xi - A_\eta f_\eta, \\ C_\eta = B_\eta f_\eta - B_\xi f_\xi. \end{cases}$$

Заметим, что в силу первой подсистемы функция $W(\zeta) = A(\xi, \eta) + iB(\xi, \eta)$ голоморфная, $\zeta = \xi + i\eta$, а предположение $f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} = 0$ есть условие совместности для второй подсистемы. Далее, рассмотрим форму $\omega = A dx + B dy + C dt \in \Omega^1(\mathcal{E})$. Здесь дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega &= (D_x B - D_y A) dx \wedge dy + dt \wedge ((D_t A - D_x C) dx + (D_t B - D_y C) dy) = \\ &= B_\xi F dx \wedge dy + dt \wedge ((A_\xi D_x E + A_\eta D_y E + A_\eta f_\eta F) dx + \\ &\quad + (B_\xi D_x E + B_\eta D_y E + B_\xi f_\xi F) dy) \in \Omega^2(\mathcal{J}), \end{aligned}$$

так что класс эквивалентности $\bar{\omega} \in \text{CL}^1(EF)$. Можно проверить, что $\bar{\omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda u_x$, $B = \lambda u_y$, $C = \lambda f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 = dd\omega &= (D_t(B_\xi F) - D_x(B_\xi D_x E + B_\eta D_y E + B_\xi f_\xi F) + \\ &\quad + D_y(A_\xi D_x E + A_\eta D_y E + A_\eta f_\eta F)) dt \wedge dx \wedge dy = \\ &= P_E(D)E + P_F(D)F \in \Omega^3(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_E(D) &= (-D_x \circ (B_\xi D_x + B_\eta D_y) + D_y \circ (A_\xi D_x + A_\eta D_y)) \otimes dt \wedge dx \wedge dy, \\ P_F(D) &= (D_t \circ B_\xi - D_x \circ B_\xi f_\xi + D_y \circ A_\eta f_\eta) \otimes dt \wedge dx \wedge dy, \end{aligned}$$

так что $P(D) = \|P_E(D), P_F(D)\| \in \Omega^3(\text{DI})$ и $\overline{P(D)} \in H^3(\text{DI})$.

4.3.3. *Гиперболическая связь.* Рассмотрим систему $EF = 0$,

$$E = u_t - f(\xi, \eta), \quad F = u_{xx} - u_{yy}, \quad \xi = u_x, \quad \eta = u_y,$$

где $f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta} = 0$. Пусть $A, B, C(\xi, \eta)$ — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} A_\xi = B_\eta, \\ A_\eta = B_\xi, \end{cases} \quad \begin{cases} C_\xi = A_\xi f_\xi + A_\eta f_\eta, \\ C_\eta = B_\xi f_\xi + B_\eta f_\eta. \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\omega = A dx + B dy + C dt \in \Omega^1(\mathcal{E})$. Дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega &= (D_x B - D_y A) dx \wedge dy + dt \wedge ((D_t A - D_x C) dx + (D_t B - D_y C) dy) = \\ &= B_\xi F dx \wedge dy + dt \wedge ((A_\xi D_x E + A_\eta D_y E - A_\eta f_\eta F) dx + \\ &\quad + (B_\xi D_x E + B_\eta D_y E + B_\xi f_\xi F) dy) \in \Omega^2(\mathcal{J}), \end{aligned}$$

так что класс эквивалентности $\bar{\omega} \in \text{CL}^1(EF)$. Можно проверить, что $\bar{\omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda u_x$, $B = \lambda u_y$, $C = \lambda f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 = dd\omega &= (D_t(B_\xi F) - D_x(B_\xi D_x E + B_\eta D_y E + B_\xi f_\xi F) + \\ &\quad + D_y(A_\xi D_x E + A_\eta D_y E - A_\eta f_\eta F)) dt \wedge dx \wedge dy = \\ &= P_E(D)E + P_F(D)F \in \Omega^3(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_E(D) &= (-D_x \circ (B_\xi D_x + B_\eta D_y) + D_y \circ (A_\xi D_x + A_\eta D_y)) \otimes dt \wedge dx \wedge dy, \\ P_F(D) &= (D_t \circ B_\xi - D_x \circ B_\xi f_\xi - D_y \circ A_\eta f_\eta) \otimes dt \wedge dx \wedge dy, \end{aligned}$$

так что $P(D) = \|P_E(D), P_F(D)\| \in \Omega^3(\text{DI})$ и $\overline{P(D)} \in H^3(\text{DI})$.

4.4. Уравнения неразрывности. В некоторых приложениях система связей $F = 0$ есть система уравнений неразрывности

$$F = (F^\kappa) \in \mathcal{E}^K, \quad F^\kappa = \partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu}.$$

Здесь пространства когомологий $H_x^q(\bar{\mathcal{E}})$ допускают полное описание. Именно, перепишем систему $\partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu} = 0$ как $\partial_{x^1} u^{\kappa 1} + \sum_{2 \leq \alpha \leq m} \partial_{x^\alpha} u^{\kappa\alpha} = 0$ и поступим с ней как с эволюционной системой

$$G = \partial_s v - g = 0, \quad v = (v^\kappa, v^{\kappa\alpha}) \in V, \quad g = (g^k, g_l^{\kappa\alpha}) \in \mathcal{F}^A,$$

где мы используем локальные обозначения:

- $s \in S = \mathbb{R}$, $y = (y^2, \dots, y^m) \in Y = \mathbb{R}^{m-1}$, $s = x^1$, $y^\alpha = x^\alpha$, $2 \leq \alpha \leq m$;
- $A = K \cup B$, $B = \{(\kappa, \alpha, \iota) \mid \kappa \in K, 2 \leq \alpha \leq m, \iota \in \mathbb{Z}_+\}$;
- $\mathbb{J} = \{j = (j^\alpha) \mid j^\alpha \in \mathbb{Z}_+, 2 \leq \alpha \leq m\} = \mathbb{Z}_+^{m-1}$, $i = (\iota, j) \in \mathbb{J}$;
- $V = \{v = (v^\kappa, v_l^{\kappa\alpha}) \mid \kappa \in K, (\kappa, \alpha, \iota) \in B\} = \mathbb{R}^A$,
 $v^\kappa = v_0^\kappa = u^{\kappa 1} = u_0^{\kappa 1}$, $v_l^{\kappa\alpha} = v_{i0}^{\kappa\alpha} = u_{(\iota, 0)}^{\kappa\alpha}$;
- $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = (v_j^\kappa, v_{ij}^{\kappa\alpha}) \mid \kappa \in K, (\kappa, \alpha, \iota) \in B, j \in \mathbb{J}\}$,
 $v_j^\kappa = u_{(0, j)}^{\kappa 1}$, $v_{ij}^{\kappa\alpha} = u_{(\iota, j)}^{\kappa\alpha}$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{fin}}^\infty(SY\mathbf{V}; \mathbb{R})$;
- $D_s = \partial_s + \sum_{j \in \mathbb{J}} (g_j^\kappa \partial_{v_j^\kappa} + g_{ij}^{\kappa\beta} \partial_{v_{ij}^{\kappa\beta}})$,
 $D_\alpha = \partial_{y^\alpha} + \sum_{j \in \mathbb{J}} (v_{j+(\alpha)}^\kappa \partial_{v_j^\kappa} + v_{\iota, j+(\alpha)}^{\kappa\beta} \partial_{v_{ij}^{\kappa\beta}})$, $2 \leq \alpha \leq m$;
- $g^\kappa = -v_{0,(\beta)}^{\kappa\beta}$, $g_l^{\kappa\beta} = v_{\iota+1, 0}^{\kappa\beta}$, $g_j^\kappa = D_j g^\kappa = -v_{0, j+(\beta)}^{\kappa\beta}$, $g_{ij}^{\kappa\beta} = D_j g_l^{\kappa\beta} = v_{\iota+1, j}^{\kappa\beta}$.

В силу теоремы 8 имеем

$$H^0(\mathcal{F}) = \mathbb{R}, \quad H^q(\mathcal{F}) = 0, \quad 1 \leq q \leq m-2,$$

а согласно теореме 9

$$H^{m-1}(\mathcal{F}) \simeq \{\chi \in \mathcal{F}_A \mid \chi_* = \chi^*, D_s \chi + g^* \chi = 0\}, \quad [\omega] \mapsto \chi = \delta_v J^s,$$

где $\omega = J^s d^{m-1}y + J^\alpha ds \wedge d_\alpha y$, $D_s J^s + D_\alpha J^\alpha = 0$. Здесь,

$$g_* : \mathcal{F}^A \rightarrow \mathcal{F}^A, \quad \phi = (\phi^\kappa, \phi_l^{\kappa\alpha}) \mapsto g_* \phi = ((g_* \phi)^\kappa, (g_* \phi)_l^{\kappa\alpha}),$$

где $(g_* \phi)^\kappa = -D_\beta \phi_0^{\kappa\beta}$, $(g_* \phi)_l^{\kappa\alpha} = \phi_{\iota+1}^{\kappa\alpha}$, тогда как

$$g^* : \mathcal{F}_A \rightarrow \mathcal{F}_A, \quad \chi = (\chi_\kappa, \chi_{\kappa\alpha}^\iota) \mapsto g^* \chi = ((g^* \chi)_\kappa, (g^* \chi)_{\kappa\alpha}^\iota),$$

где $(g^* \chi)_\kappa = 0$, $(g^* \chi)_{\kappa\alpha}^\iota = \chi_{\kappa\alpha}^{\iota-1} + \delta_0^\iota D_\alpha \chi_\kappa$ (заметим, что $\chi_{\kappa\alpha}^{-1} = 0$). Далее, уравнение $D_s \chi + g^* \chi = 0$ сводится к системе

$$D_s \chi = 0, \quad D_s \chi_{\kappa\alpha}^0 + D_\alpha \chi_\kappa = 0, \quad D_s \chi_{\kappa\alpha}^\iota + \chi_{\kappa\alpha}^{\iota-1} = 0$$

и имеет общее решение $\chi = (\chi_\kappa, 0)$, $\chi_\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \in K$ (решающий факт здесь состоит в том, что каждая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет конечный порядок, поскольку зависит лишь от конечного числа аргументов; подробнее см., например, [3], [8], [12], [13]). Условие $\chi_* = \chi^*$ тривиально выполняется.

Мы возвращаемся к нашим глобальным обозначениям.

ТЕОРЕМА 13. Система $F = 0$, где $F = (F^\kappa) \in \mathcal{F}^K$, $F^\kappa = \partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu}$, $\kappa \in K$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(XU; \mathbb{R})$, имеет следующие пространства законов сохранения:

$$\text{CL}^q(F) = \begin{cases} 0, & 0 \leq q \leq m-2, \\ \{\omega = \chi_\kappa e^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_K, & q = m-1, \end{cases}$$

где $e^\kappa = u^{\kappa\mu} d_\mu x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предыдущих рассуждений и тривиального равенства $\delta_{v^\kappa} v^{\kappa'} = \delta_{\kappa'}^\kappa$, $\kappa, \kappa' \in K$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что здесь каждый ток вида $\omega = \chi_\kappa u^{\kappa\mu}$, $\chi_\kappa \in \mathbb{R}$, задает нетривиальный закон сохранения. Теорема 13 утверждает, что все законы сохранения имеют такой вид.

СЛЕДСТВИЕ 2. Система связей $F = 0$, где $F = (F^\kappa) \in \mathcal{E}^K$, $F^\kappa = \partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu}$, $\kappa \in K$, $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\text{T}\mathbf{X}\mathbf{U}; \mathbb{R})$, имеет следующие пространства когомологий:

$$H_x^q(\bar{\mathcal{E}}) = \begin{cases} \mathcal{T}, & q = 0, \\ 0, & 1 \leq q \leq m-2, \\ \{\omega = \chi_\kappa e^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathcal{T}\} \simeq \mathcal{T}_K, & q = m-1, \end{cases}$$

где $\mathcal{T} = \mathcal{C}^\infty(\text{T}; \mathbb{R})$, $e^\kappa = u^{\kappa\mu} d_\mu x^{11}$.

4.5. Связи в виде нулевой дивергенции. Эволюция со связью в виде нулевой дивергенции описывается системой $EF = 0$, где

$$E = (E^{\kappa\mu} = u_t^{\kappa\mu} - f^{\kappa\mu}), \quad f = (f^{\kappa\mu}) \in \mathcal{E}^{K \times m}, \quad F = (F^\kappa = \partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu}) \in \mathcal{E}^K,$$

так что здесь $A = K \times m$, $\mathbf{U} = \mathbb{R}_{\mathbb{I}}^{K \times m}$. Мы предполагаем, что системы $E = 0$ и $F = 0$ совместные, т. е.

$$D_t F^\kappa = D_t D_\mu u^{\kappa\mu} = D_\mu D_t u^{\kappa\mu} = D_\mu f^{\kappa\mu} \in \mathcal{J}, \quad \kappa \in K.$$

В силу теоремы 12 и следствия 2 определены следующие точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}, & \quad H^0(\bar{\mathcal{E}}) = \text{Ker } \Delta|_{\mathcal{T}}, \\ \mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T} \rightarrow H^1(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow 0, & \quad H^1(\bar{\mathcal{E}}) = \mathcal{T} / \text{Im } \Delta|_{\mathcal{T}}, \\ 0 \rightarrow H^q(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow 0, & \quad H^q(\bar{\mathcal{E}}) = 0, \quad 2 \leq q \leq m-2, \\ 0 \rightarrow H^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\bar{\pi}_x} H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\Delta} H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}), & \quad H^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}) = \text{Ker } \Delta^{m-1}, \end{aligned}$$

где $\Delta^{m-1} = \Delta|_{H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}})}: H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow H_x^{m-1}(\bar{\mathcal{E}})$, $\Delta^{m-1}[\omega] = [D_t \omega]$. Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Delta|_{\mathcal{T}} &= \mathbb{R}, \quad \text{Im } \Delta|_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}, \\ \text{Ker } \Delta^{m-1} &= \{\omega = \chi_\kappa e^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathcal{T}, \partial_t \chi_\kappa + \chi_\sigma L_\kappa^\sigma = 0\} \simeq \mathbb{R}_K, \end{aligned}$$

где в силу условия совместности

$$[D_t e^\sigma] = [(D_t u^{\sigma\mu}) d_\mu x] = [f^{\sigma\mu} d_\mu x] = L_\kappa^\sigma e^\kappa, \quad L_\kappa^\sigma = \delta_{u^{\kappa 1}} f^{\sigma 1} \in \mathcal{T}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

¹⁾ Отметим, что здесь переменная $t \in \text{T}$ является параметром.

ТЕОРЕМА 14. *Пространства законов сохранения приведенной выше системы $EF = 0$ имеют вид*

$$\text{CL}^q(EF) = \begin{cases} 0, & 0 \leq q \leq m-2, \\ \{\omega = \chi_\kappa e^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathcal{T}, \partial_t \chi_\kappa + \chi_\sigma L_\kappa^\sigma = 0\} \simeq \mathbb{R}_K, & q = m-1. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространство $\text{CL}^{m-1}(EF)$ имеет другое (более естественное) представление. Именно, согласно равенству $H^{m-1}(\mathcal{E}) = \text{Ker } \Delta^{m-1}$ у каждой базисной формы $e^\kappa \in \text{Ker } \Delta^{m-1}$, $\kappa \in K$, имеется базисный класс эквивалентности $[J^\kappa] \in H^{m-1}(\mathcal{E})$ такой, что $\bar{\pi}_x[J^\kappa] = e^\kappa$, где $J^\kappa = e^\kappa + dt \wedge \psi^\kappa \in \Omega^{m-1}(\mathcal{E})$, $dJ^\kappa \in \Omega^m(\mathcal{J})$, $\psi^\kappa \in \Omega_x^{m-2}(\mathcal{E})$, $d_x \psi^\kappa - D_t e^\kappa \in \Omega^{m-1}(\mathcal{J})$. Следовательно,

$$\text{CL}^{m-1}(EF) = \{\chi_\kappa [J^\kappa] \mid \partial_t \chi_\kappa + \chi_\sigma L_\kappa^\sigma = 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Эволюционные системы с управляемой дивергенцией

$$E^{\kappa\mu} = u_t^{\kappa\mu} - f^{\kappa\mu} = 0, \quad F^\kappa = \partial_{x^\mu} u^{\kappa\mu} - \rho^\kappa = 0,$$

где $\rho^\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\text{TX}; \mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$, сводятся к системам с нулевой дивергенцией

$$\tilde{E}^{\kappa\mu} = v_t^{\kappa\mu} - g^{\kappa\mu} = 0, \quad \tilde{F}^\kappa = \partial_{x^\mu} v^{\kappa\mu} = 0$$

заменой переменных

$$v^{\kappa\mu} = u^{\kappa\mu} - \varphi^{\kappa\mu}, \quad g^{\kappa\mu}(t, x, \mathbf{v}) = f^{\kappa\mu}(t, x, \mathbf{u}) - \partial_t \varphi^{\kappa\mu},$$

где $\varphi(t, x)$ – частное решение системы $F = 0$, т.е. $\partial_{x^\mu} \varphi^{\kappa\mu} - \rho^\kappa = 0$.

4.6. Пример: уравнения Максвелла. В стандартных физических обозначениях

- $t \in T = \mathbb{R}$, $x \in X = \mathbb{R}^3$, – временная и пространственные переменные,
- $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in V = \mathbb{R}^3$ – электрическое и магнитное поля,
- $\rho(t, x)$, $\mathbf{j}(t, x)$ – заданные плотности заряда и тока

уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{j} &= 0, & \text{div } \mathbf{E} - \rho &= 0. \end{aligned}$$

Условие совместности здесь имеет вид

$$\partial_t \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

и приводит к представлению $\rho = \text{div } \mathbf{R}$, $\mathbf{j} = -\partial_t \mathbf{R} + \text{rot } \mathbf{S}$ с некоторыми векторными функциями $\mathbf{R}(t, x)$ и $\mathbf{S}(t, x)$. Это позволяет переписать уравнения Максвелла в виде системы с нулевой дивергенцией:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \partial_t (\mathbf{E} - \mathbf{R}) - \text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{S}) &= 0, & \text{div}(\mathbf{E} - \mathbf{R}) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, здесь $K = \{1, 2\}$, $m = 3$,

$$\begin{aligned} u^{1\lambda} &= H^\lambda, & u^{2\lambda} &= E^\lambda - R^\lambda, & 1 \leq \lambda \leq 3, \\ f^{1\lambda} &= -\operatorname{rot} \mathbf{H}^\lambda = -e^{\lambda\mu\nu} \partial_{x^\mu} H_\nu, & f^{2\lambda} &= \operatorname{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{R})^\lambda = e^{\lambda\mu\nu} \partial_{x^\mu} (E_\nu - R_\nu), \\ F^1 &= \operatorname{div} \mathbf{H} = \partial_{x^\mu} H^\mu, & F^2 &= \operatorname{div}(\mathbf{E} - \mathbf{R}) = \partial_{x^\mu} (E^\mu - R^\mu) \end{aligned}$$

(в евклидовом пространстве компоненты $V_\mu = \delta_{\mu\nu} V^\nu = V^\mu$ для любого вектора $\mathbf{V}$).
Далее,

$$\begin{aligned} e^1 &= H^\mu d_\mu x, & d_x e^1 &= d_x H^\mu d_\mu x = (\operatorname{div} \mathbf{H}) d^m x \in \Omega_x^m(\mathcal{J}), \\ e^2 &= (E^\mu - R^\mu) d_\mu x, & d_x e^2 &= d_x (E^\mu - R^\mu) d_\mu x = \operatorname{div}(\mathbf{E} - \mathbf{R}) d^m x \in \Omega_x^m(\mathcal{J}). \end{aligned}$$

Так как $\delta_{u^\kappa 1} f^{\sigma 1} = 0$, $\kappa, \sigma \in K$, то $L_\kappa^\sigma = 0$, и система $\partial_t \chi_\kappa + \chi_\sigma L_\kappa^\sigma = 0$ имеет общее решение $\chi_\kappa \in \mathbb{R}$.

Наконец, можно положить

$$J^1 = H^\mu d_\mu x - dt \wedge E_\mu dx^\mu, \quad J^2 = (E^\mu - R^\mu) d_\mu x + dt \wedge (H_\mu - S_\mu) dx^\mu,$$

поскольку в этом случае $\bar{\pi}_x J^\kappa = e^\kappa$ для всех $\kappa \in K$, и

$$\begin{aligned} dJ^1 &= (\operatorname{div} \mathbf{H}) d^m x + dt \wedge (\partial_t \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E})^\mu d_\mu x = 0, \\ dJ^2 &= (\operatorname{div}(\mathbf{E} - \mathbf{R})) d^m x + dt \wedge (\partial_t(\mathbf{E} - \mathbf{R}) - \operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{S}))^\mu d_\mu x = 0 \end{aligned}$$

на решениях уравнений Максвелла. Итак, согласно приведенным рассуждениям справедливо следующее представление:

$$\operatorname{CL}^{m-1}(EF) = \{\chi_\kappa e^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathbb{R}\} = \{\chi_\kappa J^\kappa \mid \chi_\kappa \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}_2.$$

Уравнения Максвелла имеют красивое описание на языке дифференциальных форм. Именно, тензор электромагнитного поля F записывается как 2-форма

$$F = H^\mu d_\mu x - E_\mu dt \wedge dx^\mu = J^1,$$

его сопряженный по Ходжу тензор $*F$ есть 2-форма

$$*F = E^\mu d_\mu x + dt \wedge H_\mu dx^\mu = J^2 + (R^\mu d_\mu x + S_\mu dt \wedge dx^\mu),$$

а уравнения Максвелла записываются в виде (см., например, [14])

$$dF = dJ^1 = 0, \quad d(*F) - (\rho d^3 x - j^\mu dt \wedge d_\mu x) = dJ^2 = 0.$$

Заметим, что

$$d(R^\mu d_\mu x + S_\mu dt \wedge d^\mu) = \rho d^3 x - j^\mu dt \wedge d_\mu x.$$

Таким образом, в этом подходе уравнения Максвелла записываются как двумерные законы сохранения. В силу теоремы 14 они не допускают каких-либо других маломерных законов сохранения.

Список литературы

- [1] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 163–171.
- [2] В. В. Жаринов, *Матем. сб.*, **181**:11 (1990), 1475–1485.
- [3] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [4] В. В. Жаринов, *Матем. сб.*, **184**:5 (1993), 39–54.
- [5] V. V. Zharinov, *Тр. МИАН*, **203** (1994), 478–493.
- [6] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 3–16.
- [7] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 256–271.
- [8] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [9] E. R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [10] J. F. Ritt, *Differential Algebra*, Dover, New York, 1966.
- [11] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.
- [12] T. Tsujishita, *Osaka J. Math.*, **19**:2 (1982), 311–363.
- [13] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1986.
- [14] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989.

Поступила в редакцию 5.05.2015