Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Ожигов, Н. А. Сковорода, Н. Б. Викторова,
Квантовые возрождения нерабиевского типа в модели
Джейнса–Каммингса, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 312–
320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:34:38

© 2016 г.

Ю. И. Ожигов^{*†}, Н. А. Сковорода^{*},
Н. Б. Викторова[‡]

КВАНТОВЫЕ ВОЗРОЖДЕНИЯ НЕРАБИЕВСКОГО ТИПА В МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА

Изучаются полные возрождения (т. е. повторные появления в ходе унитарной эволюции) квантовых состояний в модели Джейнса–Каммингса в рамках приближения вращающейся волны. Доказано, что в случае нулевой расстройки в подпространствах, порожденных двумя смежными парами уровней энергии, полные возрождения не имеют места ни при каких значениях параметров. В случае ненулевой расстройки, напротив, множество параметров, допускающих полное возрождение, всюду плотно в множестве всех параметров. Природа данных возрождений отличается от рабиевских осцилляций для одной пары уровней энергии. В более сложных подпространствах проблема существования полного возрождения сводится к частным случаям десятой проблемы Гильберта для рациональных решений систем нелинейных алгебраических уравнений, которая в общем случае не имеет алгоритмического решения. Нерабиевские возрождения становятся частичными в случае отказа от приближения вращающейся волны.

Ключевые слова: квантовые возрождения, модель Джейнса–Каммингса.

DOI: 10.4213/tmf8963

1. ВВЕДЕНИЕ

Конечномерные, так называемые кубитовые, численные модели важны для исследования физики квантовых компьютеров. Например, квантовый вентиль CNOT может быть реализован с использованием нелинейных фазовых сдвигов и светоделиителей. Более того, масштабируемый квантовый компьютер теоретически можно построить на оптических элементах, среди которых должны присутствовать нелинейные (см. работы [1], [2], дополнительную библиографию можно найти в статье [3]).

Работа поддержана РФФИ (грант № 15-01-06132_а).

^{*}Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: ozhigov@cs.msu.su, chalkerx@gmail.com

[†]Физико-технологический институт РАН, Москва, Россия

[‡]Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия.

E-mail: nbvictorova@list.ru

Если игнорировать декогерентность, быстрый квантовый алгоритм, превосходящий любой известный классический аналог [4], [5], можно построить на оптических элементах. Поэтому работу системы оптических устройств невозможно эффективно численно моделировать на классических компьютерах, оставаясь в рамках современных представлений об алгоритмах. Этим объясняется важность частичного описания динамики оптических систем, особенно нелинейного типа. Основным теоретическим подходом здесь является модель Джейнса–Каммингса (ДК) [6], описывающая взаимодействие двухуровневой системы (атома) с полем внутри резонатора. Для получения численных результатов в рамках модели ДК необходимо сделать три предположения.

Во-первых, полость должна быть идеальной, т.е. сколь угодно долго удерживающей фотоны с частотой ω_c и поляризацией, совпадающей с направлением дипольного момента атома (заметим, что можно выделять определенную поляризацию с помощью зеркала, помещенного в полость, как описано в работе [7]). Наличие стенок реальной полости всегда порождает неточность по частоте фотона ω_c , что теоретически может испортить интерференцию фотонов, поскольку два фотона, неразличимые в устройстве с низкой разрешающей способностью, могут стать различимыми в приборе с высокой разрешающей способностью. Мы абстрагируемся от этого фактора.

Во-вторых, мы предполагаем, что можно использовать дипольное приближение взаимодействия H_{int} атома с полем: $H_{\text{int}} \approx -dE$, где d – дипольный оператор, E – электрическое поле. Для одного фотона такое приближение справедливо, если

$$\omega_c^{-1} \gg D_a, \quad (1)$$

где D_a есть средний размер носителя волновой функции электрона, уровни энергии которого мы рассматриваем [8]; это называется случаем низкой энергии. Если расстройка частот атома и фотонов в полости относительно мала, $\Delta = \omega_c - \omega_a \ll \omega_a$, то можно записать взаимодействие как $H_{\text{int}} = (\hbar\Omega/2)\bar{E}\bar{S}$, где $\bar{E} = a + a^+$ есть полевой оператор, $\bar{S} = \sigma + \sigma^+$ – оператор поляризации атома. Гамильтониан модели ДК приобретает форму

$$H_{\text{JC}} = \hbar\omega_a\sigma^+\sigma^- + \hbar\omega_c a^+a + \hbar y(a + a^+)(\sigma + \sigma^+), \quad (2)$$

где два первых слагаемых отвечают энергии атома и поля, $\hbar y = \sqrt{\hbar\omega_a/2\varepsilon_0 V}d_a$; здесь V – эффективный объем полости, ε_0 – диэлектрическая постоянная, d_a – проекция атомного дипольного момента на направление поляризации фотона.

Третье предположение – возможность применения приближения вращающейся волны (ПВВ), справедливого для слабой связи поля и атома: $\gamma \ll 1$, где $\gamma = y/\omega_c$. В рамках ПВВ мы игнорируем слагаемые $a^+\sigma^+$ и $a\sigma$, не сохраняющие энергию, так как в картине взаимодействия они умножаются на быстро осциллирующие коэффициенты $e^{\pm i(\omega_a + \omega_c)t}$. Вклад этих слагаемых в решение очень мал по сравнению с медленно осциллирующими членами $e^{\mp i\Delta t}a^{\mp}\sigma^{\pm}$, сохраняющими энергию, так как быстро осциллирующие члены взаимно сокращают вклады друг друга¹⁾.

¹⁾Формально это следует из формулы $\lambda_{lk}^{(1)} = -(i/\hbar) \int V_{lk}(t) dt$ для амплитуды перехода, индуцированного нестационарным возмущением $V(t)$ (см. монографию [9], уравнение (40,5)); здесь $V_{lk}(t)$ – матричные элементы возмущения, которое в нашем случае имеет вид

$$V(t) = \hbar y(a^+\sigma^+ e^{i(\omega_a + \omega_c)t} + a\sigma e^{-i(\omega_a + \omega_c)t})$$

и, следовательно, ограничено по модулю величиной $2\pi y/\omega_a$.

В случае сильной связи ($\gamma > 0.1$) ПВВ неприменимо, и гамильтониан H_{JC} следует рассматривать непосредственно. При этом он не имеет инвариантных подпространств, в отличие от случая, когда применяется ПВВ, и его анализ, как правило, проводится численно или полуаналитически с использованием иных приближений. Например, в работе [10] предложено аналитическое преобразование, придающее H_{JC} такой же вид, как в случае ПВВ, с некоторой ошибкой, возникающей при отбрасывании третьей степени параметра γ , что при $\gamma \approx 0.1$ является более точным, чем ПВВ, приближением. Модель ДК вне рамок ПВВ также исследовалась в работах [11]–[13].

Наконец, в случае высокой энергии, когда условие (1) нарушено, нужно использовать для взаимодействия вещества и поля вытекающую непосредственно из уравнений Максвелла общую формулу $H = \alpha x j$, где x – координата полевого осциллятора, j – плотность тока зарядов. Далее следует применять, например, фейнмановские интегралы по путям, дающие формальный аппарат для представления взаимодействия с релятивистскими поправками [8]. В случае слабой связи ПВВ является простейшей формой приближения, которую мы и будем использовать в дальнейшем.

Мы изучаем квантовые возрождения, не сводимые к рабиевским осцилляциям. Теоретическая возможность реализации масштабируемых квантовых вычислений на оптических устройствах предполагает отсутствие таких возрождений в случае резонанса – совпадения частот атома и полости. Но если имеется хотя бы малая расстройка между этими частотами, такие возрождения возникают в подпространствах, порожденных собственными состояниями разных пар близких энергий. Это может создать неожиданные трудности в работе квантовых вентилях на нелинейных оптических устройствах, например фазовые сдвиги, имеющие в терминах фоковских состояний вид $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$, $|2\rangle \rightarrow -|2\rangle$. Природа этих трудностей лежит в паразитических резонансах, которые возникают из-за соизмеримости энергетических щелей, соответствующих различным парам энергетических уровней.

Возрождения и частичные возрождения (приблизительные или для определенных типов состояний) представляют собой простой и эффективный инструмент для изучения унитарной динамики квантовых ансамблей [14]–[17]. Возрождение отдельного состояния $|\Psi\rangle$ в унитарной эволюции $U_t: |\Psi(0)\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle$ за время t_{rev} означает существование вещественного числа ϕ , для которого $|\Psi(t_{\text{rev}})\rangle = e^{i\phi}|\Psi(0)\rangle$, или, в терминах матриц плотности,

$$\rho(0) = \rho(t_{\text{rev}}). \quad (3)$$

Полное возрождение подпространства означает существование момента времени t_{rev} такого, что равенство (3) справедливо для любого состояния $\rho(0)$ в этом подпространстве (достаточно потребовать это для чистых состояний). В классической динамике теорема Пуанкаре говорит о существовании приближенных возрождений состояний. В квантовом случае их время зависит от спектра системы [18]; интересные случаи возрождения возбужденных состояний, например ридберговских атомов, можно найти в работе [19]. Наиболее важный пример – это возрождение в ходе квантового вычисления по алгоритму Гровера, в котором неизвестное классическое состояние возрождается после полного коллапса, проходя через промежуточные состояния со значительной запутанностью [4].

Мы изучаем полные возрождения подпространств, при которых каждое состояние возрождается за фиксированное время, одинаковое для всего подпространства. Это более редкое явление, чем возрождение отдельного состояния. Простейший

пример – рабиевские осцилляции в двумерном инвариантном подпространстве для гамильтониана ДК, порожденного векторами с близкими энергиями, рассматривающегося в рамках ПВВ (более общий случай можно найти, например, в работе [20]). Мы показываем, что существуют полные возрождения нерабиевского типа, появляющиеся при некоторых значениях параметрах модели ДК. В случае применимости ПВВ (для слабых взаимодействий) эти возрождения имеют место в реальной динамике. Естественно, все состояния в рассматриваемых подпространствах восстанавливают свою форму за время t_{rev} с точностью ПВВ.

Пусть $|\psi_j\rangle$ обозначает собственное состояние гамильтониана H , соответствующее собственное значение обозначим через E_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, тогда эволюция любого чистого состояния имеет вид

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j \lambda_j e^{-iE_j t/\hbar} |\psi_j\rangle \quad (4)$$

и возрождение состояния $|\psi(0)\rangle$ определяется частью спектра $E_{i_0}, E_{i_1}, \dots, E_{i_l}$, которая соответствует минимальному подпространству, порожденному собственными векторами $|\psi_j\rangle$ и содержащему $|\psi\rangle$. Предположим для простоты, что подпространство порождается векторами $|\psi_j\rangle$ с $j = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда условие полного возрождения этого подпространства эквивалентно требованию рациональности всех чисел вида

$$r_j = \frac{E_j - E_0}{E_1 - E_0}, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Пусть $r_j = n_j/d_j$ – несократимая дробь и K_1 – наименьшее общее кратное (НОК) чисел d_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$. Тогда время полного возрождения задается как

$$t_{\text{rev}} = \frac{2\pi\hbar K_1}{E_1 - E_0}. \quad (6)$$

Таким образом, важный для практики параметр – время полного возрождения – зависит от рациональности частных величин целей между энергетическими уровнями.

2. КУБИТОВАЯ МОДЕЛЬ ДК

Удобно работать с приведенным гамильтонианом $\tilde{H} = H_{\text{ПВВ}}/\hbar$, имеющим вид

$$\tilde{H} = \omega_a \sigma^+ \sigma^- + \omega_c a^+ a + y \sigma^+ a + y \sigma^- a^+$$

(мы можем считать y вещественным, так как комплексную амплитуду можно свести к вещественной простым изменением фазы базисных векторов). В матричной форме при лексикографическом упорядочении базисных векторов редуцированный гамильтониан имеет блочно-диагональный вид: на главной диагонали сначала стоит ноль, а потом – двумерные блоки вида

$$B_n = \begin{pmatrix} n\omega_a + (n-1)\Delta & \sqrt{ny} \\ \sqrt{ny} & n(\omega_a + \Delta) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = |\omega_c - \omega_a| \ll \omega_a$ есть малая расстройка, а n обозначает номер блока. Каждый блок соответствует двумерному инвариантному подпространству, которое мы

обозначаем через $\mathcal{H}_n$. Полное возрождение этого подпространства имеет место для любых значений ω_a , Δ , y , и это явление представляет собой известные рабиевские осцилляции [21].

Рассмотрим пару подпространств $\mathcal{H}_{n-1}$, $\mathcal{H}_n$. Далее мы найдем такие значения параметров ω_a , Δ , y , для которых существует полное возрождение линейной оболочки $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n)$ этих подпространств. Такое возрождение представляет собой не возрождение рабиевского типа, а нетривиальный резонансный эффект между двумя различными парами энергетических уровней.

Спектр гамильтониана $\hat{H}$, ограниченного на подпространство $\mathcal{H}$, составляют вещественные числа

$$\begin{aligned} S_{n-1}^{\pm} &= \frac{1}{2} (2\omega_a + \Delta + 2(n-1)(\omega_a + \Delta) \pm \sqrt{\Delta^2 + 4ny^2}), \\ S_n^{\pm} &= \frac{1}{2} (2\omega_a + \Delta + 2n(\omega_a + \Delta) \pm \sqrt{\Delta^2 + 4(n+1)y^2}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $S_{n-1}^{\pm}$ и $S_n^{\pm}$ – собственные значения матриц B_{n-1} и B_n , что проверяется непосредственным вычислением.

Введем обозначения $\alpha = \Delta/y$, $\beta = \omega_a/y$. Разделив друг на друга значения энергетических щелей, как описано выше в (5), получаем, что условие существования полного возрождения подпространства $\mathcal{H}$ эквивалентно требованию рациональности чисел

$$\frac{2\alpha + 2\beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(n+1)}}{2\sqrt{\alpha^2 + 4n}}. \quad (8)$$

В случае резонанса (при $\alpha = 0$), вычитая одно число из другого, мы приходим к рациональности дроби $\sqrt{(n+1)/n}$, что невозможно.

Теперь рассмотрим нерезонансный случай $\alpha \neq 0$. Для рациональности чисел (8) достаточно, чтобы оба корня $\sqrt{\alpha^2 + 4n}$ и $\sqrt{\alpha^2 + 4(n+1)}$ были рациональны, поскольку, выбирая надлежащим образом β , мы можем гарантировать рациональность обеих дробей. Рациональность этих дробей будет обеспечена в случае наличия рациональных корней уравнения

$$X^2 - Y^2 = 1, \quad \text{где} \quad X = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + 4(n+1)}, \quad Y = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + 4n}. \quad (9)$$

Одна пара таких корней – целые числа $X = 1$, $Y = 0$. Для нахождения плотного множества корней мы представим каждый из корней как точку пересечения гиперболы (9) с прямой вида $(X - 1) = tY$, проходящей через найденное целочисленное решение. Выражая переменные через параметр t , который мы предполагаем рациональным, находим плотное множество решений:

$$X = 1 + \frac{2t^2}{1 - t^2}, \quad Y = \frac{2t}{1 - t^2}. \quad (10)$$

Так как модель ДК сама по себе является приближением (о возрождениях в присутствии быстро осциллирующих членов, т. е. вне рамок ПВВ, см., например, работу [11]), важно время полного возрождения T . Пусть n обозначает наивысший уровень энергии в рассматриваемой паре подпространств. Значение y пропорционально корню из частоты ω_a , поэтому мы можем примерно оценить зависимость T

Рис. 1. Плотность $\text{LCM}(\text{Denom } X, \text{Denom } Y)$. Вычисление проведено перебором значений $t = nd$ для $n = 1, 2, \dots, 30000$ и $d = 10^{-4}$.

от n как обратно пропорциональную величине $\sqrt{n}$. Более точная зависимость T от параметров модели ω_a , Δ , y достаточно сложна, так как T возрастает с ростом НОК знаменателей несократимых представлений чисел X и Y , заданных в (10). Обозначим это НОК как $\text{LCM}(\text{Denom } X, \text{Denom } Y)$. Плотность $\text{LCM}(\text{Denom } X, \text{Denom } Y)$ (т. е. количество значений НОК, попавших в малый интервал чисел натурального ряда) ведет себя непредсказуемо (см. рис. 1).

Для пары энергетических уровней, которые не являются смежными, возрождение линейной оболочки подпространств исследовать сложнее. В этом случае достаточно найти рациональные решения уравнения $X^2 - Y^2 = K$, где K – расстояние между парами энергетических уровней. Известно, что решение существует, если $K = k^2$ при некотором целом k , или для значений K , которые являются младшими членами пифагоровых троек, т. е. имеют вид $K = k_1^2 - k_2^2$ при целых k_1, k_2 .

Для множества из s пар энергетических уровней, разделенных расстояниями K_j , полное возрождение линейной оболочки можно свести к системе уравнений

$$X_{j-1}^2 - X_j^2 = K_j, \quad j = 1, 2, \dots, s-1,$$

решаемой в рациональных числах. При $s = 3$ имеются частные решения для чисел K_j , входящих в пифагоровы тройки. Так, решение $X^2 - Y^2 = K^2$, $Y^2 - Z^2 = L^2$ может дать значение Y , которое входит в пифагорову тройку и как старший член, и как младший; такими числами являются, скажем, $Y = 15, 20, 30, 40$. Это дает богатое разнообразие возрождений линейной оболочки подпространств, соответствующих трем парам энергетических уровней. С другой стороны, для некоторых K_j проблема возрождений может не иметь решения.

В целом для ненулевой расстройки проблему нахождения полных возрождений можно свести к решению в рациональных числах систем алгебраических уравнений

специального вида. Заметим, что в общей постановке задача поиска рациональных решений систем алгебраических уравнений эквивалентна поиску решений диофантовых уравнений (десятая проблема Гильберта), которая не имеет алгоритмического решения [22].

3. О ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ НЕРАБИЕВСКИХ ВОЗРОЖДЕНИЙ

Рассмотрим численный пример, показывающий реализуемость нерабиевских осцилляций. Для $t = 1/2$ в (10) мы находим $X = 5/3$, $Y = 4/3$. В терминах α для $n = 1$ мы имеем $\alpha^2 + 4 = 64/9$, $\alpha = 2\sqrt{7}/3$. Найдем время нерабиевских возрождений, соответствующих данной рациональной точке. Рациональные числа из формулы (5) таковы: $r_{1,2} = (\alpha + \beta \pm X)/2Y$, и их НОК K_1 можно сделать меньше 10, подбирая $\beta = \omega_a/y$. А именно, мы можем выбрать силу взаимодействия y так, что число $\alpha + \beta$ будет целым.

Принципиальная практическая реализуемость возрождений этого типа будет ясна, если мы покажем, что они воспроизводятся многократно без использования ПВВ. Конечно, мы рассматриваем приблизительные возрождения – с той же точностью, с какой ПВВ приближает точную квантовую динамику. Мы должны проверить, что время t_{rev} этих возрождений меньше, чем время, в течение которого в эксперименте наблюдаются рабиевские осцилляции, т. е. то время, в течение которого ПВВ дает удовлетворительную картину динамики.

В работе [23] изучались экспериментально наблюдаемые переходы $63p_{3/2} \leftrightarrow 61d_{5/2}$ в ^{85}Rb в полости, для которой $\omega_c = 21546 \cdot 10^6$ Гц, $g = 1/70 \cdot 10^6$ с $^{-1}$ и длина волны $\lambda \approx 1.4$ см (длина полости должна быть равна половине длины волны). Для величин такого порядка их слабое изменение дает рассматриваемые нерабиевские осцилляции. Физическая реализация таких малых изменений, конечно, представляет определенные технологические трудности, которые требуют специального рассмотрения и выходят за рамки настоящей работы.

В нашем примере условие $\gamma \ll 1$ применимости ПВВ выполнено, так как здесь $\gamma = y/\omega_a \approx 0.5 \cdot 10^{-6}$. В силу формулы (6) в нашем примере время полного возрождения $t_{\text{rev}} \leq 20\pi/y \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с, что лишь в 20 раз больше периода одной рабиевской осцилляции (составляющего примерно 10^{-4} с) из работы [23]. Мы можем взять другое решение уравнения (9) по формулам (10); для малых значений $n = 2, 3, 4$ уровня возбуждения число K_1 не будет сильно превышать время возрождения t_{rev} . Таким образом, однократное нерабиевское возрождение в линейной оболочке двух пар уровней происходит за время нескольких рабиевских осцилляций, а для более сложных подпространств – за время нескольких сотен этих осцилляций. Это дает надежду наблюдать такие возрождения в эксперименте.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы установили существование возрождений нерабиевского типа в модели ДК в рамках ПВВ для подпространств, порожденных смежными парами энергетических уровней. Эти возрождения точны в пределах точности ПВВ и становятся приближенными при отказе от ПВВ для гамильтониана. Мы продемонстрировали принципиальную реализуемость данных возрождений в эксперименте, хотя физическая реализация представляет определенные технические трудности.

Рассмотренный тип возрождений происходит в четырехмерном пространстве, что радикально отличает его от рабиевских осцилляций в двумерном подпространстве, а также от возрождений отдельных состояний, обычно рассматриваемых в литературе. В нашем случае возрождения имеют место лишь для ненулевой расстройки между частотами полости и атома. Они связаны со специфическим резонансом, возникающим между двумя смежными парами энергетических уровней. Такой тип резонанса может быть препятствием для работы нелинейных оптических устройств, которые используются при конструировании квантовых вентилях. В частности, присутствие малой расстройки может привести к ограничению точности квантовых операций. Однако такие возрождения мы можем пытаться использовать и для улучшения точности выбора времени ожидания для вентиля: если пропущено время, требующееся для совершения операции, мы можем вновь вернуться к выполнению операции через время полного возрождения.

Множество значений параметров, допускающих нерабиевские возрождения, всюду плотно в множестве всех возможных значений этих параметров; это множество получается в результате решения алгебраических уравнений второго порядка в рациональных числах. Нахождение более сложных типов возрождений в данной модели сводится к решению в рациональных числах систем нелинейных алгебраических уравнений специфического вида. В общей постановке эта задача не имеет алгоритмического решения. Некоторые комбинации значений параметров обеспечивают полное возрождение для двух или трех пар уровней энергии, не являющихся смежными, в частности для некоторых троек таких пар.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента, замечания которого способствовали улучшению текста статьи.

Список литературы

- [1] E. Knill, R. Laflamme, G. J. Milburn, *Nature*, **409**:6816 (2001), 46–52.
- [2] J. P. Dowling, J. D. Franson, H. Lee, G. J. Milburn, *Quantum Inf. Process.*, **3**:1–5 (2004), 205–213.
- [3] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, G. J. Milburn, *Rev. Modern Phys.*, **79**:1 (2007), 135–174.
- [4] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:2 (1997), 325–328.
- [5] P. W. Shor, *SIAM J. Comput.*, **26**:5 (1997), 1484–1509, arXiv: quant-ph/9508027.
- [6] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**:1 (1963), 89–109.
- [7] H. Azuma, *Prog. Theor. Phys.*, **126**:3 (2011), 369–385.
- [8] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.
- [10] Q.-H. Chen, Y. Yang, T. Liu, K.-L. Wang, *Phys. Rev. A*, **82**:5 (2010), 052306, 7 pp.
- [11] Y.-Y. Zhang, Q.-H. Chen, S.-Y. Zhu, *Chinese Phys. Lett.*, **30**:11 (2013), 114203.
- [12] Y.-Y. Zhang, Q.-H. Chen, *Phys. Rev. A*, **91**:1 (2015), 013814, 7 pp.
- [13] S. He, Y. Zhao, Q.-H. Chen, *Phys. Rev. A*, **90**:5 (2014), 053848, 10 pp.
- [14] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.*, **44**:20 (1980), 1323–1325.
- [15] H. S. Dhar, A. Chatterjee, R. Ghosh, *J. Phys. B*, **47**:13 (2014), 135501.

- [16] S. Dooley, F. McCrossan, D. Harland, M. J. Everitt, T. P. Spiller, *Phys. Rev. A*, **87**:5 (2013), 052323, 6 pp.
- [17] E. Rasanen, E. J. Heller, *Eur. Phys. J. B*, **86**:1 (2013), 17, 5 pp.
- [18] В. М. Акулин, *Динамика сложных квантовых систем*, Физматлит, М., 2009.
- [19] И. Ш. Авербух, Н. Ф. Перельман, *ЖЭТФ*, **96**:3 (1989), 818–827.
- [20] A. Karatsuba, E. Karatsuba, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:19 (2009), 195304, 16 pp.
- [21] B. W. Shore, P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **40**:7 (1993), 1195–1238.
- [22] Ю. В. Матиясевич, *Десятая проблема Гильберта*, Наука, М., 1993.
- [23] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:4 (1987), 353–356.

Поступила в редакцию 8.05.2015,
после доработки 1.12.2015