Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Никитина, А. И. Соколов, Критические индексы и псевдо- ϵ -разложение, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 230–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:49:25

© 2016 г.

М. А. Никитина^{*†}, А. И. Соколов^{*}

КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ И ПСЕВДО- ϵ -РАЗЛОЖЕНИЕ

Представлены псевдо- ϵ -разложения (τ -ряды) для критических индексов трехмерной $O(n)$ -симметричной модели типа $\lambda\phi^4$, найденные на основе шестипетлевых ренормгрупповых разложений. Численные результаты приведены для физически интересных случаев $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ и $n = 0$, а также для $4 \leq n \leq 32$ с тем, чтобы выявить общие свойства полученных рядов. Псевдо- ϵ -разложения индексов γ и α имеют малые и быстро убывающие по модулю коэффициенты, так что вполне приемлемые численные оценки дает прямое суммирование τ -рядов, а обращение к аппроксимантам Паде позволяет получить высокоточные результаты. Напротив, коэффициенты псевдо- ϵ -разложения индекса поправки к скейлингу ω не имеют выраженной тенденции к убыванию при физических значениях n . Однако соответствующие ряды знакопеременны, и для получения надежных численных оценок здесь также оказывается достаточным использование простых аппроксимант Паде. Таким образом, технику псевдо- ϵ -разложения можно рассматривать как своеобразный метод пересуммирования, превращающий расходящиеся ренормгрупповые ряды в разложения, удобные с вычислительной точки зрения.

Ключевые слова: трехмерная $O(n)$ -симметричная модель, критические индексы, псевдо- ϵ -разложение, аппроксиманты Паде, численные результаты.

DOI: 10.4213/tmf8966

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что точное решение задачи о фазовом переходе в трехмерной n -векторной модели до сих пор неизвестно, критические индексы описываемых этой моделью систем (гейзенберговских и одноосных ферромагнетиков, сверхтекучих бозе-жидкостей и др.) вычислены с весьма высокой точностью. Одним из наиболее

Работа выполнена при поддержке СПбГУ (грант 11.38.636.2013), РФФИ (грант № 15-02-04687) и фонда “Династия”.

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: ais2002@mail.ru

[†]Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

эффективных методов, с помощью которого можно получать прецизионные количественные результаты, является метод теоретико-полевой ренормализационной группы (РГ). Расчет пяти-, шести- и семипетлевых РГ-разложений [1]–[5] открыл дорогу к вычислению критических индексов, отношений критических амплитуд и других универсальных характеристик критического поведения трехмерных систем с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.002–0.003 [3], [6]–[9].

Техника теоретико-полевой РГ базируется на перенормированной теории возмущений – регулярной математической процедуре, которая позволяет находить критические индексы и другие наблюдаемые в виде рядов по степеням эффективной безразмерной константы связи (перенормированного заряда) g . Асимптотическое значение g есть нетривиальный нуль функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$, которая также вычисляется пертурбативными методами. Однако ряды теории возмущений, как известно, являются расходящимися, а для моделей с пространствами физической размерности ($D = 3$, $D = 2$) параметр разложения не мал: $g \sim 1 \div 2$. Поэтому для получения количественных результатов приходится применять различные методы суммирования расходящихся рядов (см., например, книги и обзоры [10]–[14]). Альтернативный подход – обращение к $(4 - \epsilon)$ -мерным моделям – не избавляет от необходимости использования пересуммировочных процедур, так как в физическом пределе $\epsilon \rightarrow 1$ ϵ -разложения имеют те же недостатки, что и разложения по заряду.

В то же время существует метод, с помощью которого можно превращать исходные РГ-разложения в ряды с малыми и быстро убывающими по модулю коэффициентами. Мы имеем в виду предложенный Никелом метод псевдо- ϵ -разложения (см. ссылку [19] в работе [6]). Суть метода состоит в замене коэффициента при линейном члене в разложении β -функции на фиктивный малый параметр τ , вычислении координаты вильсоновской фиксированной точки в виде ряда по степеням τ и построении τ -разложений критических индексов и других универсальных величин. Структура рядов, возникающих в ходе применения этой техники, оказывается столь благоприятной с вычислительной точки зрения, что для получения надежных численных результатов можно ограничиться их прямым суммированием либо использованием простых аппроксимант Паде [15]–[21]. Метод псевдо- ϵ -разложения показал свою высокую эффективность даже в случае двумерных систем, когда известные РГ-разложения короче и расходятся быстрее, чем их аналоги для трехмерных моделей [22]–[25].

Цель настоящей статьи – представить псевдо- ϵ -разложения критических индексов трехмерной n -векторной модели, проанализировать их структуру для различных значений n и обсудить численные результаты, получаемые в рамках данного подхода. Основное внимание уделено случаям $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ и $n = 0$, являющимся наиболее интересными с физической точки зрения. Численные оценки найдены как с помощью аппроксимант Паде, так и прямым суммированием полученных псевдо- ϵ -разложений.

2. ПСЕВДО- ϵ -РАЗЛОЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ N

Критическая термодинамика трехмерных систем с $O(n)$ -симметричным параметром порядка описывается евклидовой теорией поля со взаимодействием вида $\lambda\phi^4$, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(m_0^2\varphi_\alpha^2 + (\nabla\varphi_\alpha)^2) + \frac{\lambda}{24}(\varphi_\alpha^2)^2 \right], \quad (1)$$

где квадрат голой массы m_0 пропорционален $T - T_c^{(0)}$, а $T_c^{(0)}$ есть температура фазового перехода в отсутствие флуктуаций. РГ-разложения β -функции и критических индексов, найденные в рамках массивной теории с пропагатором, вершиной и “треххвосткой” $\Gamma_R^{1,2}$, нормированными при нулевых внешних импульсах,

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(0, m, g_4) &= m^2, & \left. \frac{\partial G_R^{-1}(p, m, g_4)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} &= 1, \\ \Gamma_R(0, 0, 0, m, g) &= m^2 g_4, & \Gamma_R^{1,2}(0, 0, m, g_4) &= 1, \end{aligned} \quad (2)$$

известны сегодня в шестипетлевом приближении [2], [3], [5]. Для того чтобы получить искомые псевдо- ϵ -разложения (τ -ряды), достаточно подставить в РГ-разложения критических индексов τ -ряд для координаты вильсоновской фиксированной точки [25] и переразложить их по степеням τ . В настоящей работе мы приведем результаты вычислений для критических индексов восприимчивости и теплоемкости – именно они наиболее часто и наиболее точно измеряются в экспериментах. Псевдо- ϵ -разложения остальных критических индексов можно найти на основе τ -рядов для параметров γ и α , используя хорошо известные соотношения скейлинга. Итак,

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{(n+2)\tau}{2(n+8)} + \frac{\tau^2(n+2)}{108(n+8)^3} (27n^2 + 490n + 1088) + \\ &+ \frac{\tau^3(n+2)}{8(n+8)^5} (n^4 + 37.936996n^3 + 428.99211n^2 + 1073.0522n - 199.53302) + \\ &+ \frac{\tau^4(n+2)}{16(n+8)^7} (n^6 + 58.533991n^5 + 1336.0645n^4 + 13115.226n^3 + \\ &+ 46827.023n^2 + 60693.508n + 45180.873) + \\ &+ \frac{\tau^5(n+2)}{32(n+8)^9} (n^8 + 79.88230n^7 + 2753.499n^6 + 49024.95n^5 + \\ &+ 433177.7n^4 + 1573332n^3 + 961413.1n^2 - 7398997n - 1.495424 \cdot 10^7) + \\ &+ \frac{\tau^6(n+2)}{64(n+8)^{11}} (n^{10} + 102.140n^9 + 4723.96n^8 + 124384n^7 + \\ &+ 1.93424 \cdot 10^6 n^6 + 1.71104 \cdot 10^7 n^5 + 8.17925 \cdot 10^7 n^4 + 2.27733 \cdot 10^8 n^3 + \\ &+ 5.19328 \cdot 10^8 n^2 + 1.32120 \cdot 10^9 n + 1.96458 \cdot 10^9), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} - \frac{3\tau(n+2)}{4(n+8)} - \frac{\tau^2(n+2)}{72(n+8)^3} (27n^2 + 506n + 1216) - \\ &- \frac{3\tau^3(n+2)}{16(n+8)^5} (n^4 + 38.628325n^3 + 456.42625n^2 + 1330.8024n + 460.64396) - \\ &- \frac{3\tau^4(n+2)}{32(n+8)^7} (n^6 + 59.190931n^5 + 1377.3824n^4 + 14095.696n^3 + \\ &+ 56076.311n^2 + 96550.551n + 94371.957) - \\ &- \frac{3\tau^5(n+2)}{64(n+8)^9} (n^8 + 80.43442n^7 + 2802.339n^6 + 50883.40n^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 468728.9n^4 + 1911709n^3 + 2598713n^2 - 3400834n - 1.087227 \cdot 10^7) - \\
& - \frac{3\tau^6(n+2)}{128(n+8)^{11}}(n^{10} + 102.515n^9 + 4770.89n^8 + 126952n^7 + \\
& + 2.01134 \cdot 10^6n^6 + 1.84139 \cdot 10^7n^5 + 9.40772 \cdot 10^7n^4 + 2.93115 \cdot 10^8n^3 + \\
& + 7.17030 \cdot 10^8n^2 + 1.64131 \cdot 10^9n + 2.18006 \cdot 10^9). \quad (4)
\end{aligned}$$

При анализе экспериментальных данных важно также знать критический индекс поправок к скейлингу ω , псевдо- ϵ -разложение которого имеет вид:

$$\begin{aligned}
\omega = \tau - \frac{4\tau^2}{27(n+8)^2}(41n + 190) + \\
+ \frac{\tau^3}{(n+8)^4}(2.6978855n^3 + 57.675086n^2 + 594.43112n + 1609.6102) - \\
- \frac{\tau^4}{(n+8)^6}(-0.46693767n^5 + 34.440983n^4 + 1119.6990n^3 + \\
+ 11012.281n^2 + 54280.495n + 103646.63) + \\
+ \frac{\tau^5}{(n+8)^8}(0.2049447n^7 + 20.18796n^6 + 680.4944n^5 + 17055.42n^4 + \\
+ 254491.6n^3 + 1892609n^2 + 6986639n + 1.019704 \cdot 10^7) - \\
- \frac{\tau^6}{(n+8)^{10}}(-0.117121n^9 - 12.1743n^8 + 78.8694n^7 + 21145.0n^6 + \\
+ 570921n^5 + 7.69420 \cdot 10^6n^4 + 6.34720 \cdot 10^7n^3 + 3.19979 \cdot 10^8n^2 + \\
+ 9.00151 \cdot 10^8n + 1.07362 \cdot 10^9). \quad (5)
\end{aligned}$$

Приведенные τ -ряды далее использованы при получении численных значений критических индексов при конкретных значениях n .

3. СТРУКТУРА τ -РЯДОВ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим псевдо- ϵ -разложения (3)–(5) при значениях n , представляющих физический интерес. В первую очередь к ним следует отнести случаи $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$, которые отвечают фазовым переходам в простых жидкостях и бинарных смесях, в легкоосных, легкоплоскостных и гейзенберговских ферромагнетиках, в сверхпроводниках с s -спариванием, в сверхтекучих бозе-жидкостях и многих других системах. Соответствующие τ -ряды имеют следующий вид:

при $n = 1$

$$\begin{aligned}
\gamma = 1 + \frac{\tau}{6} + 0.061156836\tau^2 + 0.008519079\tau^3 + 0.00655499\tau^4 - \\
- 0.00467841\tau^5 + 0.0061748\tau^6, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} - 0.099965706\tau^2 - 0.02179070\tau^3 - 0.01543751\tau^4 + \\
+ 0.0033540\tau^5 - 0.011082\tau^6, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega = \tau - 0.42249657\tau^2 + 0.34513249\tau^3 - 0.32006015\tau^4 + \\
+ 0.4494775\tau^5 - 0.678421\tau^6; \quad (8)
\end{aligned}$$

при $n = 2$

$$\gamma = 1 + \frac{\tau}{5} + 0.080592593\tau^2 + 0.01991018\tau^3 + 0.01205280\tau^4 - 0.00057920\tau^5 + 0.0065646\tau^6, \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3\tau}{10} - 0.129777778\tau^2 - 0.03954735\tau^3 - 0.02432025\tau^4 - 0.0032498\tau^5 - 0.012109\tau^6, \quad (10)$$

$$\omega = \tau - 0.40296296\tau^2 + 0.30507558\tau^3 - 0.26575046\tau^4 + 0.3407266\tau^5 - 0.480435\tau^6; \quad (11)$$

при $n = 3$

$$\gamma = 1 + \frac{5}{22}\tau + 0.0974274425\tau^2 + 0.03099116\tau^3 + 0.01805659\tau^4 + 0.00418601\tau^5 + 0.0080091\tau^6, \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{15\tau}{44} - 0.155323900\tau^2 - 0.05637685\tau^3 - 0.03357917\tau^4 - 0.0105846\tau^5 - 0.014517\tau^6, \quad (13)$$

$$\omega = \tau - 0.38322620\tau^2 + 0.27216872\tau^3 - 0.22494669\tau^4 + 0.2641538\tau^5 - 0.352583\tau^6. \quad (14)$$

Физически интересным является и предел $n \rightarrow 0$, в котором модель (1) описывает критическое поведение полимеров (блуждание без самопересечений). В этом случае псевдо- ϵ -разложения критических индексов выглядят следующим образом:

при $n = 0$

$$\gamma = 1 + \frac{\tau}{8} + 0.039351852\tau^2 - 0.00152232\tau^3 + 0.00269299\tau^4 - 0.00696361\tau^5 + 0.0071471\tau^6, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\tau - 0.065972222\tau^2 - 0.00527165\tau^3 - 0.00843751\tau^4 + 0.0075942\tau^5 - 0.011897\tau^6, \quad (16)$$

$$\omega = \tau - 0.43981481\tau^2 + 0.39297124\tau^3 - 0.39538053\tau^4 + 0.6077908\tau^5 - 0.999887\tau^6. \quad (17)$$

Следует отметить, что метод псевдо- ϵ -разложения применялся ранее для определения численных значений критических индексов [6], [7], хотя сами τ -ряды (3)–(17) в указанных работах не приводились. При этом использовалась процедура пересуммирования, основанная на преобразовании Бореля–Леруа и технике конформных отображений. В настоящей работе мы определяем величины критических индексов, не обращаясь к борелевскому суммированию, ставшему каноническим в теории критических явлений.

Как видно из формул (6)–(17), τ -ряды для индексов γ и α имеют малые и быстро убывающие по модулю коэффициенты. Поэтому естественно попытаться найти численные значения этих индексов с помощью простейших средств, а именно используя

Таблица 1. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса γ при $n = 1$. Аппроксиманта $[3/1]$ имеет полюс, близкий к 1, что делает соответствующее значение γ ненадежным. Нижняя строка (RoC) показывает характер сходимости оценок Паде к асимптотическому значению. Здесь и далее оценка Паде k -го порядка есть число, которое дает соответствующая диагональная аппроксиманта, либо полусумма величин, даваемых аппроксимантами вида $[M/M - 1]$ и $[M - 1/M]$, когда диагональная аппроксиманта отсутствует.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1.1667	1.2278	1.2363	1.2429	1.2382	1.2444
1	1.2000	1.2633	1.2377	1.2648	1.2402	1.2409	
2	1.2501	1.2408	1.2434	1.2412	1.2411		
3	1.2389	1.2430	1.2419	1.2411			
4	1.2455	1.2415	1.2409				
5	1.2358	1.2410					
6	1.2475						
RoC	1	1.1833	1.2633	1.2393	1.2434	1.2416	1.2411

Таблица 2. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса γ при $n = 3$. Аппроксиманта $[2/4]$ имеет полюс, близкий к 1, что делает соответствующее значение γ ненадежным.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1.2273	1.3247	1.3557	1.3737	1.3779	1.3859
1	1.2941	1.3978	1.3701	1.3990	1.3792	1.3692	
2	1.3756	1.3728	1.3809	1.3829	1.3866		
3	1.3727	1.3751	1.3830	1.3796			
4	1.3858	1.3820	1.3999				
5	1.3805	1.3842					
6	1.3925						
RoC	1	1.2607	1.3978	1.3715	1.3809	1.3829	1.3796

аппроксиманты Паде и прямое суммирование псевдо- ϵ -разложений. При этом нужно иметь в виду, что полученные ряды, несмотря на их благоприятную структуру, являются расходящимися, о чем говорит, в частности, поведение старших коэффициентов этих рядов, демонстрирующих тенденцию к росту. С другой стороны, поскольку исходные РГ-разложения являются асимптотическими, есть основания считать, что этим же свойством обладают и псевдо- ϵ -разложения – их коэффициенты получаются из коэффициентов РГ-рядов с помощью конечного числа алгебраических операций над коэффициентами данного и более низких порядков [21], [26]. Отсюда следует, что при выполнении прямого суммирования того или иного псевдо- ϵ -разложения наиболее точные оценки можно получить, вычисляя сумму отрезка ряда, ограниченного наименьшим по модулю членом.

Результаты расчета критических индексов восприимчивости и теплоемкости с помощью аппроксимант Паде $[L/M]$ и то, насколько эффективна эта техника применительно к псевдо- ϵ -разложениям, иллюстрируют табл. 1–4, где приведены треуголь-

Таблица 3. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса α при $n = 1$.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6
0	0.5	0.25	0.1500	0.1282	0.1128	0.1162	0.1051
1	0.3333	0.0834	0.1222	0.0753	0.1156	0.1136	
2	0.2564	0.1254	0.1101	0.1119	0.1096		
3	0.2157	0.0959	0.1120	0.1109			
4	0.1890	0.1232	0.1097				
5	0.1718	0.0777					
6	0.1583						
RoC	0.5	0.2917	0.0834	0.1238	0.1101	0.1120	0.1109

Таблица 4. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса α при $n = 3$. Число в нижней строке (RoC), помеченное звездочкой, есть оценка, усредненная по аппроксимантам $[4/2]$ и $[2/4]$, поскольку аппроксиманта $[3/3]$ имеет полюс, близкий к 1, что делает соответствующее значение α ненадежным. Здесь и далее результаты, полученные усреднением значений индексов, даваемых двумя недиагональными аппроксимантами, помечены звездочками.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5	6
0	0.5	0.1591	0.0038	−0.0526	−0.0862	−0.0968	−0.1113
1	0.2973	−0.1262	−0.0847	−0.1356	−0.1016	−0.0577	
2	0.2035	−0.0827	−0.1029	−0.1086	−0.1157		
3	0.1510	−0.1262	−0.1084	−0.0942			
4	0.1169	−0.0991	−0.1145				
5	0.0934	−0.1414					
6	0.0759						
RoC	0.5	0.2282	−0.1262	−0.0837	−0.1029	−0.1085	−0.1151*

ники Паде для γ и α при $n = 1$ (модель Изинга) и $n = 3$ (модель Гейзенберга). Нижние строки этих таблиц (RoC) показывают характер и темп сходимости оценок Паде к предельным величинам. Здесь под оценкой Паде k -го порядка понимается число, которое дает соответствующая диагональная аппроксиманта, либо полусумма величин, даваемых аппроксимантами вида $[M/M - 1]$ и $[M - 1/M]$, когда диагональная аппроксиманта отсутствует.

Как видно, суммирование псевдо- ϵ -разложений критических индексов методом Паде порождает итерационную процедуру, которая весьма быстро сходится к асимптотическим значениям. Возникает вопрос: насколько близки эти значения к наиболее точным численным оценкам, получаемым другими методами? Ответ на него дают табл. 5 и 6, где представлены значения индексов γ и α для различных n , найденные описанным выше методом (τ, Pade) , и их аналоги, полученные путем пересуммирования шестипетлевых РГ-разложений методом Паде–Бореля–Леруа (PBL)

Таблица 5. Критический индекс γ для разных значений n , найденный с использованием аппроксимант Паде (τ , Pade) и прямым суммированием псевдо- ϵ -разложения (3) с обрывом на оптимальном члене (τ , OTDS). Числа, помеченные звездочками, суть оценки, усредненные по аппроксимантам [4/2] и [2/4], поскольку аппроксиманта [3/3] имеет в этих случаях полюсы, близкие к 1. Для сравнения приведены значения γ , полученные путем пересуммирования шестипетлевых РГ-разложений методом Паде–Бореля–Леруа (PBL) и с помощью техники “конформ-Борель” (CB), обработкой разложений сильной связи (SC), а также извлеченные из пятипетлевых ϵ -разложений (ϵ -exp) и результатов расчетов на решетках (LC). Символ bc означает, что при пересуммировании ϵ -разложений использованы точные значения индекса, известные для двумерных моделей. Символами sc и bcc отмечены результаты, полученные на простых кубических и гранецентрированных кубических решетках.

n	0	1	2	3	4	8	16	32
τ , Pade	1.1617	1.2411	1.3154	1.3796	1.4572*	1.6456*	1.8254	1.9138
τ , OTDS	1.1628	1.2382	1.3120	1.3779	1.4358	1.6174	1.7769	1.8798
PBL [3]	1.161	1.241	1.316	1.39				
CB [6]	1.1615	1.241	1.316	1.386				
PBL [5]	1.160	1.239	1.315	1.386	1.449	1.637	1.807	1.908
CB [7]	1.1596	1.2396	1.3169	1.3895	1.456			
SC [8]	1.161	1.241	1.318	1.390	1.451	1.638	1.822	1.920
CB [9]	1.1615	1.2411	1.3172	1.3876				
ϵ -exp [7]	1.1575	1.2355	1.311	1.382	1.448			
ϵ -exp [7], bc	1.1571	1.2380	1.317	1.392	1.460			
LC [27], sc	1.1594	1.2388	1.325	1.406	1.491	1.701		
LC [27], bcc	1.1582	1.2384	1.322	1.402	1.484	1.696		
LC	1.1575	1.2372	1.3177	1.3960		1.68		
	[28]	[29]	[30]	[31]		[32]		
LC	1.1573	1.2373	1.3178					
	[33]	[34]	[35]					

и с помощью техники “конформ-Борель” (CB), обработкой разложений сильной связи (SC), а также извлеченные из пятипетлевых ϵ -разложений (ϵ -exp) и результатов расчетов на решетках (LC). Здесь же приведены оценки γ и α , получающиеся прямым суммированием псевдо- ϵ -разложений с оптимальным обрывом, т. е. с обрывом на наименьшем по модулю члене (τ , OTDS). С тем чтобы выявить общие свойства псевдо- ϵ -разложений, рассчитаны критические индексы не только для физических значений n , но и для $n > 3$. Соответствующие результаты также представлены в табл. 5 и 6.

Из этих таблиц видно, что метод псевдо- ϵ -разложения в сочетании с техникой аппроксимант Паде дает значения критических индексов, очень близкие к их аналогам, найденным альтернативными теоретико-полевыми методами и с помощью расчетов на решетках. Более того, даже прямое суммирование псевдо- ϵ -разложений γ и α ведет к численным оценкам, отличающимся от наиболее надежных значений на величину порядка их разброса, т. е. ожидаемой погрешности теоретического определения индексов. Близость чисел в первых двух строках табл. 5 и 6 к прецизионным

Таблица 6. Критический индекс α для различных значений n , найденный с использованием аппроксимант Паде (τ , Pade) и прямым суммированием псевдо- ϵ -разложения (4) с обрывом на оптимальном члене (τ , OTDS). Звездочками помечены числа, полученные усреднением значений, даваемых аппроксимантами $[4/2]$ и $[2/4]$; диагональная аппроксиманта $[3/3]$ в этих случаях имеет полюсы, близкие к 1. Для сравнения приведены значения α , полученные путем пересуммирования шестипетлевых РГ-разложений методом Паде–Бореля–Леруа (PBL) и с помощью техники “конформ–Борель” (CB), а также извлеченные из пятипетлевых ϵ -разложений (ϵ -exp) и результатов расчетов на решетках (LC). Символы bc, sc и bcc здесь означают то же, что и в табл. 5.

n	0	1	2	3	4	8	16	32
τ , Pade	0.2355	0.1109	-0.0023	-0.1151*	-0.2105*	-0.4828*	-0.7181*	-0.8841
τ , OTDS	0.2413	0.1162	0.0031	-0.0968	-0.2011	-0.4549	-0.6859	-0.8319
PBL [3]	0.236	0.110	-0.007	-0.115				
CB [6]	0.236	0.110	-0.007	-0.115				
PBL [5]	0.231	0.107	-0.010	-0.117	-0.213	-0.489	-0.732	-0.875
CB [7]	0.235	0.109	-0.011	-0.122	-0.223			
ϵ -exp [7]	0.2375	0.1130	-0.0040	-0.1135	-0.211			
ϵ -exp [7], bc	0.2366	0.1085	-0.013	-0.124	-0.226			
LC [36], sc	0.24	0.103	-0.014	-0.11	-0.22			
LC [36] bcc	0.235	0.105	-0.019	-0.13	-0.25			
LC	0.2370	0.1096	-0.0151	-0.1336				
	[33]	[34]	[35]	[31]				

Таблица 7. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса ω при $n = 1$. Аппроксиманты Паде $[L/M]$ вычислены для отношения ω/τ , т. е. в пренебрежении тривиальным множителем $\tau = 1$.

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5
0	1	0.5775	0.9226	0.6026	1.0521	0.3736
1	0.7030	0.7675	0.7566	0.7895	0.7817	
2	0.7963	0.7577	0.7652	0.7830		
3	0.7355	0.7752	0.7906			
4	0.8720	0.7856				
5	0.6867					
RoC	1	0.6402	0.7675	0.7571	0.7652	0.7868

значениям, полученным различными методами, говорит о высокой численной эффективности техники псевдо- ϵ -разложения в задачах данного типа.

Обратимся далее к критическому индексу поправок к скейлингу ω . Здесь ситуация выглядит уже не столь благоприятной в вычислительном отношении, как в случае индексов γ и α . Коэффициенты псевдо- ϵ -разложений (8), (11), (14) и (17) не малы и не обнаруживают выраженной тенденции к убыванию. Сами τ -ряды, однако, знакопеременны и имеют регулярную структуру: монотонное убывание ко-

Таблица 8. Треугольник Паде для псевдо- ϵ -разложения критического индекса ω при $n = 3$. Аппроксиманты Паде $[L/M]$ найдены для отношения ω/τ , т.е. в пренебрежении множителем τ .

$M \backslash L$	0	1	2	3	4	5
0	1	0.6168	0.8889	0.6640	0.9281	0.5756
1	0.7229	0.7759	0.7658	0.7855	0.7771	
2	0.7950	0.7669	0.7729	0.7793		
3	0.7516	0.7777	0.7807			
4	0.8234	0.7803				
5	0.7281					
RoC	1	0.6699	0.7759	0.7664	0.7729	0.7800

Таблица 9. Критический индекс ω для различных значений n , найденный пересуммированием разложения (5) с помощью аппроксимант Паде (τ , Pade) и прямым суммированием с обрывом на оптимальном члене (τ , OTDS). Для сравнения приведены значения ω , полученные путем обработки шестипетлевых РГ-разложений методом Паде–Бореля–Леруа (PBL) и с помощью техники “конформ-Борель” (CB), а также извлеченные из разложений сильной связи (SC), пятипетлевых ϵ -разложений (ϵ -exp) и результатов расчетов на решетках (LC).

n	0	1	2	3	4	8	16	32
τ , Pade	0.7947	0.7868	0.7812	0.7800	0.7825	0.8082	0.8607	0.9201
τ , OTDS	0.9532	0.6026	0.6364	0.6640	0.6877	0.8557	0.8478	0.9181
PBL [3]	0.794	0.788	0.78	0.78				
CB [6]	0.80	0.79	0.78	0.78				
PBL [37]		0.781	0.780	0.780	0.783	0.808	0.861	0.919
CB [7]	0.812	0.799	0.789	0.782	0.774			
SC [8]	0.810	0.805	0.800	0.797	0.795	0.810	0.862	0.924
CB [9]	0.790	0.782	0.778	0.778				
ϵ -exp [7]	0.828	0.814	0.802	0.794	0.795			
ϵ -exp [38]	0.82	0.81	0.80	0.79				
LC		0.83	0.785	0.773	0.765			
		[34]	[35]	[39]	[39]			

эффиценто́в (по модулю) с увеличением номера сменяется монотонным их ростом. Это позволяет заключить, что использование аппроксимант Паде и в этом случае может привести к надежным численным результатам. Содержимое табл. 7, 8, где приведены треугольники Паде для псевдо- ϵ -разложений (8), (14), и сводной табл. 9 подтверждает справедливость этого заключения. Как видно, оценки индекса ω по Паде находятся в очень хорошем согласии с данными теоретико-полевых и решеточных расчетов при всех значениях n вплоть до $n = 32$. В то же время прямое суммирование с оптимальным обрывом дает в этом случае приемлемые результаты лишь для достаточно больших n .

4. СКЕЙЛИНГ И ЧИСЛЕННАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Итак, пересуммирование псевдо- ϵ -разложений методом Паде позволяет вычислять критические индексы трехмерных систем с точностью, сравнимой с точностью наиболее эффективных решеточных и теоретико-полевых итерационных схем. Интересно проверить, являются ли получаемые таким образом результаты внутренне согласованными. Это можно сделать, находя на основе выражений (3), (4) псевдо- ϵ -разложения остальных критических индексов, суммируя по Паде соответствующие τ -ряды и выясняя, насколько точно полученные числа удовлетворяют соотношениям скейлинга. При этом надо иметь в виду, что соотношение $\alpha = 2 - D\nu$ не может служить источником необходимой информации, так как выполняется точно в нашем случае по тривиальным причинам. Продуктивным здесь оказывается обращение к формулам

$$\nu = \frac{\gamma}{2 - \eta}, \quad \nu = \frac{2\beta}{1 + \eta}, \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2,$$

(18)

которые мы и будем использовать в качестве контрольных. Результаты подстановки в эти формулы значений критических индексов, извлеченных из соответствующих τ -рядов путем суммирования по Паде, приведены в табл. 10. Как видно из этой таблицы, техника псевдо- ϵ -разложения воспроизводит соотношения скейлинга с точностью на уровне 0.005 и выше. Это подтверждает тот факт, что обсуждаемый подход позволяет получать высокоточные численные оценки даже при использовании простейших методов пересуммирования.

Таблица 10. Точность, с которой выполняются соотношения скейлинга (18) для критических индексов, найденных пересуммированием соответствующих псевдо- ϵ -разложений с помощью аппроксимант Паде.

n	0	1	2	3	4	8	16	32
$\frac{\gamma}{2 - \eta} - \nu$	0.0009	0.0012	0.0017	0.0037 0.0019*	0.0014* 0.0142	0.0010*	−0.0006	−0.0001
$\frac{2\beta}{1 + \eta} - \nu$	−0.0021	−0.0024	−0.0033	−0.0055 −0.0006*	−0.0009* −0.0076	−0.0015*	0.0040	0.0007
$\beta + \frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$	−0.0002	−0.0001	0.0000	0.0008 0.0042*	0.0047* −0.0101	0.0079*	0.0014	0.0003

Каковы причины столь высокой численной эффективности метода псевдо- ϵ -разложения? Основные особенности этого метода, обуславливающие его вычислительную мощь, заключаются, по нашему мнению, в следующем.

1. Коэффициенты псевдо- ϵ -разложений оказываются значительно меньшими (по модулю) и начинают расти значительно позже, чем коэффициенты соответствующих РГ-рядов. Это объясняется структурой формул, связывающих первые с последними. Она такова, что в ходе вычисления коэффициентов τ -рядов происходят многократные вычитания (“деструктивная интерференция”) коэффициентов исходных РГ-разложений [21].

2. Выражения для коэффициентов псевдо- ϵ -разложений k -го порядка содержат коэффициенты РГ-рядов не только порядка k , но и РГ-коэффициенты более низких порядков вплоть до первого [26]. Это означает, что при работе с псевдо- ϵ -разложениями используется больше информации, содержащейся в РГ-рядах, чем при обращении к самим РГ-разложениям.

3. В методе псевдо- ϵ -разложения физическое значение параметра разложения τ равно 1. Техника теоретико-полевой РГ базируется на разложениях по координате вильсоновской фиксированной точки g . Для трехмерных систем с $0 \leq n \leq 3$ величина $g \approx 1.4$, для двумерной модели Изинга $g \approx 1.8$, т. е. g заметно превосходит единицу. Эта разница является весьма существенной, особенно в высоких порядках теории возмущений.

4. Техника псевдо- ϵ -разложения имеет известное преимущество и перед каноническим методом ϵ -разложения Вильсона–Фишера. Дело в том, что при построении ϵ -разложений интегралы, отвечающие фейнмановским диаграммам, вычисляются в $(4 - \epsilon)$ -мерном пространстве, тогда как коэффициенты псевдо- ϵ -разложений выражаются через интегралы, вычисленные для моделей с пространствами физических размерностей.

Полученные выше результаты и приведенные аргументы позволяют заключить, что метод псевдо- ϵ -разложения можно рассматривать как своеобразный способ пересуммирования, превращающий расходящиеся РГ-ряды в разложения, очень удобные в плане получения надежных численных результатов.

Список литературы

- [1] G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, M. S. Green, D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.*, **36**:23 (1976), 1351–1354.
- [2] B. G. Nickel, D. I. Meiron, G. A. Baker, Jr., *Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin mode*, University of Guelph, Ontario, 1977.
- [3] G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, D. I. Meiron, *Phys. Rev. B*, **17**:3 (1978), 1365–1374.
- [4] D. B. Murray, B. G. Nickel, *11D revised estimates for critical exponents for the continuum n-vector model in three dimensions*, Report University of Guelph, 1991, unpublished.
- [5] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. E*, **51**:3 (1995), 1894–1898, arXiv:hep-th/9803264.
- [6] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B*, **21**:9 (1980), 3976–3998.
- [7] R. Guida, J. Zinn-Justin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:40 (1998), 8103–8121, arXiv:cond-mat/9803240.
- [8] H. Kleinert, *Phys. Rev. D*, **60**:8 (1999), 085001, 15 pp., arXiv:hep-th/9812197.
- [9] А. А. Порогелов, И. М. Суслов, *ЖЭТФ*, **133**:6 (2008), 1277–1289, arXiv:1010.3389.
- [10] J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.*, **344**:4–6 (2001), 159–178, arXiv:hep-th/0002136.
- [11] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [12] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, World Sci., Singapore, 2001.
- [13] A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rep.*, **368**:6 (2002), 549–727, arXiv:cond-mat/0012164.
- [14] И. М. Суслов, *ЖЭТФ*, **127**:6 (2005), 1350–1402, arXiv:hep-ph/0510142.
- [15] C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E*, **56**:6 (1997), 6370–6386, arXiv:cond-mat/9705278.
- [16] C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E*, **59**:6 (1999), 6914–6923, arXiv:cond-mat/9812119.

- [17] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *Phys. Rev. B*, **62**:18 (2000), 12195–12200, arXiv: cond-mat/0003216.
- [18] Yu. Holovatch, D. Ivaneyko, B. Delamotte, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:11 (2004), 3569–3575, arXiv: cond-mat/0312260.
- [19] P. Calabrese, P. Parruccini, *Phys. Rev. B*, **71**:6 (2005), 064416, 8 pp., arXiv: cond-mat/0411027.
- [20] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, *Phys. Rev. E*, **89**:5 (2014), 052127, 10 pp., arXiv: 1402.3531.
- [21] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, *Phys. Rev. E*, **90**:1 (2014), 012102, 5 pp., arXiv: 1402.3894.
- [22] P. Calabrese, E. V. Orlov, D. V. Pakhnin, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **70**:9 (2004), 094425, 15 pp., arXiv: cond-mat/0405432.
- [23] А. И. Соколов, *ФТТ*, **47**:11 (2005), 2056–2059, arXiv: cond-mat/0510088.
- [24] А. И. Соколов, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 140–149.
- [25] M. A. Nikitina, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. E*, **89**:4 (2014), 042146, 6 pp., arXiv: 1312.1062.
- [26] A. I. Sokolov, M. A. Nikitina, *Physica A*, **444** (2016), 177–181, arXiv: 1402.4318.
- [27] P. Butera, M. Comi, *Phys. Rev. B*, **56**:13 (1997), 8212–8240, arXiv: hep-lat/9703018.
- [28] S. Caracciolo, M. S. Causo, A. Pelissetto, *Phys. Rev. E*, **57**:2 (1998), R1215–R1218, arXiv: cond-mat/9703250.
- [29] M. Hasenbusch, *Phys. Rev. B*, **82**:17 (2010), 174433, 13 pp., arXiv: 1004.4486.
- [30] M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, *Phys. Rev. B*, **63**:21 (2001), 214503, 28 pp., arXiv: cond-mat/0010360.
- [31] M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, *Phys. Rev. B*, **65**:14 (2002), 144520, 21 pp., arXiv: cond-mat/0110336.
- [32] F. Delfino, A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rev. E*, **91**:5 (2015), 052109, 12 pp., arXiv: 1502.07599.
- [33] H.-P. Hsu, W. Nadler, P. Grassberger, *Macromolecules*, **37**:12 (2004), 4658–4663, arXiv: cond-mat/0310534.
- [34] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, *Phys. Rev. E*, **65**:6 (2002), 066127, 19 pp., arXiv: cond-mat/0201180.
- [35] M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rev. B*, **74**:14 (2006), 144506, 18 pp., arXiv: cond-mat/0605083.
- [36] P. Butera, M. Comi, *Phys. Rev. B*, **60**:9 (1999), 6749–6760, arXiv: hep-lat/9903010.
- [37] А. И. Соколов, *ФТТ*, **40**:7 (1998), 1284–1290.
- [38] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *J. Physique Lett.*, **46**:4 (1985), 137–141.
- [39] M. Hasenbusch, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:40 (2001), 8221–8236, arXiv: cond-mat/0010463.

Поступила в редакцию 14.05.2015