Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Новиков, Уравнения, инвариантные относительно дифференциальных подстановок, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:03:48

© 1998 г.

В. С. Новиков*

УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОК

Рассматривается задача классификации дифференциальных автоподстановок вида $\hat{u} = G(u_x, u)$, допускаемых эволюционными уравнениями общего вида с одной пространственной переменной. Показано, что в однополевом случае любая такая подстановка сводится точечным преобразованием к автоподстановке $\hat{u} = u + u_x/u$ для уравнения Бюргерса. Приведены обобщения этой подстановки на двухполевой случай.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим скалярное эволюционное уравнение с одной пространственной переменной

$$\begin{aligned} u_t &= F(u, u_x, u_{xx}, \dots, u^{(l)}), \\ u^{(l)} &= \frac{\partial^l u}{\partial x^l}, \end{aligned} \quad (1)$$

где l – порядок уравнения, допускающее автоподстановку (преобразование Бэклунда) вида

$$\hat{u} = G(u_x, u). \quad (2)$$

Задача о классификации преобразований Бэклунда, допускаемых эволюционными уравнениями второго порядка, описана в недавней работе [1]. В отличие от этой работы мы фиксируем достаточно простой вид автопреобразования, но зато снимаем ограничения на класс рассматриваемых уравнений. Другое важное отличие данной работы состоит в том, что изучаемые преобразования Бэклунда являются вырожденными и характерны для уравнений типа C, а не S в терминологии Калоджеро [2]. Классический пример – уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x,$$

допускающее автоподстановку

$$\hat{u} = u + \frac{u_x}{u} \quad (3)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

и линеаризуемое преобразованием Коула–Хопфа $u = v_x/v$. Кроме того, ясно, что линейные уравнения с постоянными коэффициентами обладают богатым набором дискретных симметрий вида (2). В [1] было показано, что для уравнений второго порядка с точностью до точечных замен $u = \phi(\tilde{u})$ имеются лишь две автоподстановки вида (2): преобразование Бэклунда (3) для уравнения Бюргерса и подстановка $\hat{u} = c_1 u_x + c_2 u$ для линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Основным результатом этой работы является обобщение этого утверждения на уравнения произвольного порядка.

В недавней работе [3] рассматривалась классификация подстановок вида $v = P(x, u, u_x)$, которые переводят решения некоторого эволюционного уравнения в решения другого эволюционного уравнения. Было показано, что существует чрезвычайно широкий произвол как в выборе дифференциальных подстановок, так и уравнений, их допускающих. В нашей работе показано, что такой произвол исчезает при рассмотрении *автоподстановок*.

1. СКАЛЯРНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем называть автоподстановки вида (2), а также уравнения (1), их допускающие, эквивалентными, если они переводятся друг в друга точечными заменами $u = \phi(\tilde{u})$ и растяжениями координат $x \rightarrow \alpha x$, $t \rightarrow \beta t$. Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. *Любая дифференциальная подстановка вида (2) эквивалентна одной из следующих:*

$$\hat{u} = u + \frac{u_x}{u}, \quad (4)$$

$$\hat{u} = c_1 u_x + c_2 u, \quad (5)$$

а уравнения, их допускающие, – соответственно иерархия уравнений Бюргерса

$$u_t = R^{l-1}(u_x), \quad (6)$$

где R – оператор рекурсии

$$R = D_x + u + u_x D_x^{-1},$$

и линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_t = u^{(l)} + \sum_{k=0}^{l-1} a_k D_x^k u. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что определение иерархии уравнений Бюргерса (6) корректно, т.к. при любом $l > 1$ правая часть (6) есть полная производная по x . Перепишем формулу (2) в виде

$$u_x = A(u_1, u). \quad (8)$$

Согласно формуле (8) мы можем переходить от динамических переменных $u, u_x, u_{xx}, \dots, u^{(l)}$ к динамическим переменным $u, u_1, u_2, \dots$. Для того чтобы уравнение (1) было инвариантно относительно подстановки (8), необходимо выполнение условия совместности

$$D_x F = D_t A. \quad (9)$$

Удобно линейаризовать уравнение (9), а именно ввести операторы F_* и A_* по формуле [4, 5]

$$f_*(v) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(u + \varepsilon v, u_x + \varepsilon v_x, \dots) \right|_{\varepsilon=0},$$

тогда

$$A_* = A_1 T + A_0, \quad F_* = \sum_{k=0}^l F_k D_x^k,$$

где

$$A_i \equiv \frac{\partial}{\partial u_i} A \equiv \partial_i A, \\ F_i \equiv \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} F,$$

а T – оператор сдвига динамических переменных $T: u \rightarrow u_1$. Линеаризуем теперь (9) и исключим производные по t согласно (1):

$$\begin{aligned} (D_x F)_*(v) &= \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^l F_{k,j} u^{(k+1)} D_x^j(v) + \sum_{k=0}^l F_k D_x^{k+1}(v) = \\ &= (D_t A)_*(v) = A_{1,1} T(F) v_1 + A_{1,0} T(F) v + A_1 \sum_{k=0}^l T(F_k) D_x^k(v_1) + \\ &+ A_{1,0} F v_1 + A_{0,0} F v + A_0 \sum_{k=0}^l F_k D_x^k(v). \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользуемся связью

$$v_x = A_1 v_1 + A_0 v \implies v_1 = \frac{1}{A_1} D_x(v) - \frac{A_0}{A_1} v$$

и исключим v_1 из (10). Тогда, приравняв нулю коэффициенты при каждой степени выражения $D_x^i(v)$, $i = 0, 1, \dots, l+1$, получим систему уравнений, из которой определим вид функций A и F . При $D_x^{l+1}(v)$ имеем

$$F_l = T(F_l).$$

Из этого уравнения следует, что F_l является *константой*. Очевидно, что за счет растяжения времени можно, не теряя общности, положить $F_l = 1$. Подставив $F_l = 1$ в (10), получим при $D_x^l(v)$

$$F_{l-1} = T(F_{l-1}) + lA_1 D_x \left(\frac{1}{A_1} \right). \quad (11)$$

Покажем, что это уравнение имеет следующие решения:

$$F_{l-1} = lu + \text{const}, \quad A = u(u_1 - u) \quad (12)$$

и

$$F_{l-1} = \text{const} = c_1, \quad A = u_1 + \phi(u). \quad (13)$$

Теперь удобно перейти к переменным $u, u_1, u_2, \dots, u_{l-1}$:

$$u_x = A(u_1, u), \quad u_{xx} = D_x(A(u_1, u)), \quad \dots, \quad u_{1,x} = A(u_2, u_1), \quad \dots$$

Тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$lD_x \log A_1 = (T - 1)(f), \quad f \equiv F_{l-1}. \quad (14)$$

Перепишем уравнение (14), раскрывая производную логарифма и заменяя производные u_x и $u_{1,x}$ согласно формуле (2) на A и $T(A)$, соответственно, в виде

$$l \frac{A_{1,1}}{A_1} T(A) + l \frac{A_{1,0}}{A_1} A = (T - 1)(f). \quad (15)$$

Легко видеть, что $f = f(u_1, u)$. Дифференцирование (15) по u_2 дает

$$l \frac{A_{1,1}}{A_1} T(A_1) = T(f_1), \quad f_i = \frac{\partial}{\partial u_i} f = \partial_i f,$$

откуда

$$l \frac{A_{1,1}}{A_1} = T \left(\frac{f_1}{A_1} \right). \quad (16)$$

Дифференцируя это выражение по u , получаем

$$\partial_0 \frac{A_{1,1}}{A_1} = 0 \quad \implies \quad A_{1,1} = \alpha(u_1) A_1. \quad (17)$$

С помощью соотношения (17) легко получить, что общий вид A есть

$$A = a(u_1)b(u) + c(u),$$

причем $a \neq \text{const}$. Покажем, что калибровочным преобразованием можно добиться того, что $a(u_1) = u_1$. Действительно, из (16) следует, что

$$f = u_x \alpha(u) + \delta(u).$$

Уравнение (1), следовательно, имеет вид

$$u_t = u^{(l)} + (u_x \alpha(u) + \delta(u))u^{(l-1)} + \tilde{F}(u^{(l-2)}, \dots, u). \quad (18)$$

Сделаем калибровочное преобразование $u = \phi(\hat{u})$. Тогда уравнение (18) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}_t = \hat{u}^{(l)} + \hat{u}^{(l-1)} \hat{u}_x \left(\phi_{\hat{u}}(\hat{u}) \alpha(\phi(\hat{u})) + 2(l-1) \frac{\phi_{\hat{u}\hat{u}}(\hat{u})}{\phi_{\hat{u}}(\hat{u})} \right) + \\ + \delta(\phi(\hat{u})) \hat{u}^{(l-1)} + \hat{F}(\hat{u}^{(l-2)}, \dots, \hat{u}). \end{aligned}$$

Пусть функция $\phi(\hat{u})$ удовлетворяет уравнению

$$2(l-1)\phi_{\hat{u}\hat{u}}(\hat{u}) + \phi_{\hat{u}}^2(\hat{u})\alpha(\phi(\hat{u})) = 0.$$

Решение этого уравнения дается неявной формулой

$$\hat{u} = \int \exp \left[\frac{g(t)}{2(l-1)} \right] dt,$$

где

$$g = \int \alpha(t) dt,$$

т.е.

$$A = \gamma(u)u_1 + \beta(u). \quad (19)$$

Возможны два случая: $\gamma(u) \neq \text{const}$ и $\gamma(u) = \text{const}$. Рассмотрим первый случай. Подставив (19) в (15), получаем

$$l \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} (u_1 \gamma(u) + \beta(u)) = (T-1)(f). \quad (20)$$

Легко видеть, что $f = f(u)$. Дифференцируя (20) по u_1 , получаем уравнения

$$f'(u_1) = l\gamma'(u) = \text{const} = c \quad \implies \quad \gamma(u) = \frac{c}{l}u + c_1, \quad f(u) = cu + c_2,$$

которые подставляем в (20), и находим

$$\beta(u) = -\frac{c}{l}u^2 - c_1u.$$

Итак, с точностью до калибровочного преобразования и растяжения координат мы получили решение (12). Второй случай, очевидно, дает решение (13).

Легко показать, что решение (13) приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

При заданной функции A из уравнения (10) однозначно восстанавливается функция F . Хорошо известно, что уравнения Бюргера (6) коммутируют с подстановкой (4). Следовательно, учитывая формулы (12) и (13), мы таким образом находим все решения уравнения (10). Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (1) допускает автоподстановку (2) тогда и только тогда, когда оно сводится к линейному некоторой подстановкой вида

$$u = H(v, v_x).$$

В заключение отметим, что не всякое уравнение класса С вида

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

обладает некоторой нетривиальной дискретной симметрией

$$\hat{u} = G(x, u, u_x). \quad (21)$$

Например, уравнение

$$u_t = u^2 u_{xx}$$

сводится к линейному $\hat{u}_t = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$ заменой

$$d\hat{x} = u^{-1}dx - u_x dt, \quad \hat{u} = u,$$

но не обладает дискретной симметрией вида (21).

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим системы второго порядка вида

$$\begin{aligned} u_t &= F(u_{xx}, v_{xx}, u_x, v_x, u, v), \\ v_t &= G(u_{xx}, v_{xx}, u_x, v_x, u, v). \end{aligned} \quad (22)$$

Для таких систем можно поставить аналогичную задачу, а именно описать с точностью до калибровочного преобразования $u = \phi(\tilde{u}, \tilde{v})$, $v = \psi(\tilde{u}, \tilde{v})$ все такие системы, инвариантные относительно автопреобразования Бэклунда,

$$u_x = A(u_1, u, v), \quad v_x = B(v_1, u, v). \quad (23)$$

Такую задачу можно полностью решить методом, описанным в разделе 1. Мы не будем здесь подробно на этом останавливаться и приведем два примера.

Система

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2uu_x + 2vu_x - (\alpha - 1)uv_x + 2\beta u_x + \gamma v_x - (\alpha - 1)u^2v - (\alpha - 1)v^2u + \\ &\quad + 2(\beta - \eta)uv - \delta u^2 + \gamma v^2 + \mu u + \nu v, \\ v_t &= \alpha v_{xx} + 2\alpha vv_x + 2\alpha uv_x + (\alpha - 1)vu_x + 2\eta v_x + \delta u_x + (\alpha - 1)u^2v + (\alpha - 1)v^2u - \\ &\quad - \gamma v^2 + \delta u^2 - 2(\beta - \eta)uv - \mu u - \nu v \end{aligned}$$

обладает преобразованием Бэклунда

$$u_x = (u_1 - u)(u + v + \kappa), \quad v_x = (v_1 - v)(u + v + \kappa)$$

(здесь греческими буквами обозначены произвольные константы). Эта система сводится к линейной

$$\begin{aligned} p_t &= p_{xx} + 2\beta p_x - \gamma q_x + \rho p - \nu q + \omega, \\ q_t &= \alpha q_{xx} - \delta p_x + 2\eta q_x + \mu p + (\rho - \mu - \nu)q + \omega \end{aligned}$$

подстановкой

$$u = \frac{p_x}{p - q}, \quad v = -\frac{q_x}{p - q},$$

найденной В. Г. Марихиным.

Система

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2uu_x + 2vu_x + 2\beta u_x + (\beta - \gamma)v_x + \delta(u + v)^2 + \mu(u + v), \\ v_t &= v_{xx} + 2vv_x + 2uv_x + 2\gamma v_x - (\beta - \gamma)u_x - \delta(u + v)^2 - \mu(u + v) \end{aligned}$$

обладает преобразованием Бэклунда

$$\begin{aligned} u_x &= (u_1 - u)(u + v + \alpha) + (\beta - \gamma + \alpha + \eta - \delta)(u + v) + \\ &\quad + (\delta - \beta + \gamma)(u + v + \alpha) \log(u + v + \alpha) + \nu, \\ v_x &= (v_1 - v)(u + v + \alpha) + (\delta - \beta + \gamma - \alpha - \eta)(u + v) - \\ &\quad - (\delta - \beta + \gamma)(u + v + \alpha) \log(u + v + \alpha) - \nu \end{aligned}$$

и сводится к линейной

$$\begin{aligned} p_t &= p_{xx} + 2\beta p_x + (\gamma - \beta)q_x + \mu p - \mu q + \rho, \\ q_t &= q_{xx} + (\beta - \gamma)p_x + 2\gamma q_x + \mu p - \mu q + \rho \end{aligned}$$

подстановкой

$$\begin{aligned} u &= \frac{p_x}{p - q} + (\beta - \gamma - \delta) \log(p - q) + (\gamma + \delta - \beta + \xi) + \frac{\zeta}{p - q}, \\ v &= \frac{q_x}{q - p} - (\beta - \gamma - \delta) \log(p - q) - (\gamma + \delta - \beta + \xi) - \frac{\zeta}{p - q}. \end{aligned}$$

Можно показать, что автоподстановки вида (23) сводятся точечными преобразованиями к виду

$$u_x = u_1 \alpha(u, v) + \beta(u, v), \quad v_x = v_1 \gamma(u, v) + \delta(u, v).$$

По-видимому, справедливо также утверждение, что система (22) обладает преобразованием Бэклунда (23) тогда и только тогда, когда эта система линеаризуема.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. Б. Шабату, поставившему эту задачу и внесшему ряд существенных замечаний в метод и текст статьи, а также В. Г. Марихину за ряд ценных частных сообщений.

Список литературы

- [1] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 111. С. 323.
- [2] What Is Integrability? Ed. V.E. Zakharov. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
- [3] *С. Я. Старцев.* Дифференциальные подстановки и симметрии гиперболических уравнений. В кн.: Асимптотики и симметрии в нелинейных динамических системах. Уфа: ИМ с ВЦ РАН, 1995. С. 80–95.
- [4] *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [5] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилев.* УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3.

Поступила в редакцию 5. III. 98 г.