Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: строение радиальных волновых функций, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 123–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 09:16:00

© 2016 г.

В. В. Пупышев*

ДВУМЕРНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ: СТРОЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Показано, что радиальные волновые функции заряженной квантовой частицы, движущейся в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и рассеивающейся неподвижным кулоновским центром, лежащим в той же плоскости, удовлетворяют уравнению Кулона с полуцелым индексом. Исследовано строение этих функций. Рассмотрены три интересных с физической точки зрения предела: некулоновский предел и пределы низких и высоких энергий. Выявлены основные отличия двумерного кулоновского рассеяния от трехмерного.

Ключевые слова: двумерное кулоновское рассеяние, радиальные волновые функции, предел нулевой энергии.

DOI: 10.4213/tmf8973

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается светлой памяти Станислава Петровича Меркурьева, вклад которого в построение квантовой теории рассеяния для систем нескольких квантовых частиц [1] невозможно переоценить. Особо значимыми являются предложенные С. П. Меркурьевым подходы к решению задачи трех заряженных частиц в трехмерном координатном пространстве. К ним несомненно относятся разбиение парных кулоновских взаимодействий “гладкой срезкой” [2] и вывод координатных асимптотик волновой функции и ее фаддеевских компонент при больших расстояниях между частицами [3].

Эти подходы представляются ключевыми и для постановки задачи трех заряженных квантовых частиц, движущихся в двумерной плоскости их трехмерного координатного пространства. Первым и неизбежным этапом решения этой задачи является подробное исследование двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы неподвижным силовым центром. Такому исследованию предполагается

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

посвятить серию работ. Первая из них – недавняя работа [4]. Ее продолжением является настоящая работа.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 мы перечисляем основные предположения, поясняем физический смысл используемых параметров и аргументов и напоминаем вывод исходного для наших исследований уравнения Кулона с полуцелым индексом. В разделе 3 для решения этого уравнения сначала выводятся и исследуются представления через вырожденные гипергеометрические функции, а затем изучаются представления в виде рядов по степеням кулоновских аргументов и их логарифмов. Раздел 4 посвящен анализу таких рядов в трех интересных с физической точки зрения пределах: в некулоновском пределе и в пределах высоких и низких энергий. В разделе 5 выявляются физически значимые отличия двумерного кулоновского рассеяния от трехмерного. В разделе 6 суммируются основные результаты.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть квантовая частица p_1 имеет конечную положительную массу $m_1 > 0$, вещественный кулоновский заряд z_1 и движется только в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее трехмерного координатного пространства $\mathbb{R}^3$: волновой вектор $\mathbf{k}$ этой частицы всегда лежит в плоскости $\mathcal{P}$. Предполагаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является кулоновским силовым центром с вещественным зарядом Z , воздействующим на частицу p_1 посредством кулоновского потенциала. Считаем, что этот потенциал определяется формулой $z_1 Z/r$, где r – расстояние между частицей p_1 и точкой O в плоскости $\mathcal{P}$. В этой плоскости используем полярные координаты частицы p_1 : расстояние r и угол $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Напомним, что волновое число $k \equiv |\mathbf{k}|$ частицы p_1 связано с ее полной энергией E равенством $k = \sqrt{2m_1 E/\hbar^2}$, где $\hbar$ – константа Планка, а параметр $R \equiv \hbar^2/2m_1 z_1 Z$ в случае $z_1 Z < 0$ является аналогом боровского радиуса [5]. Символом α обозначим знак этого параметра. Будем различать два случая: случай кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$) и случай кулоновского притяжения ($\alpha = -1$).

Наряду с размерными переменными r и k будем использовать безразмерные аргументы: безразмерные расстояния $x \equiv r/|R|$ и $\rho \equiv kr$, безразмерные волновое число $q \equiv k|R|$, параметр Зоммерфельда $\eta \equiv 1/2kR = \alpha/2q$ и аргумент $v \equiv \sqrt{8|\eta|\rho}$. Приведем список принятых обозначений:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2m_1 E}{\hbar^2}}, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 z_1 Z}, \quad \alpha \equiv \text{sign } R, \quad \eta \equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q}, \\ x &\equiv \frac{r}{|R|}, \quad \rho \equiv kr = qx, \quad v \equiv \sqrt{8|\eta|\rho} = 2\sqrt{\frac{r}{|R|}} = 2\sqrt{x}, \quad x = \frac{v^2}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Безразмерные “рабочие” переменные s и t переопределяем. Используем формулы с верхними и нижними знаками. В таких формулах по определению берутся или все верхние знаки, или все нижние знаки. Всюду далее индекс λ принимает полуцелые значения ($2\lambda = -1, 1, \dots$) и считается, что $\varepsilon_\lambda = 1$, если $2\lambda = -1$, и $\varepsilon_\lambda = 2$, если $2\lambda \geq 1$.

Волновая функция $\Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta)$ двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ подчиняется уравнению Шредингера

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{rR} + k^2 \right) \Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение подстановкой

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = (2\pi\rho)^{-1/2} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda u_\lambda(\rho, \eta) \cos \frac{(2\lambda+1)\varphi}{2} \quad (3)$$

сводится к счетной ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) последовательности не зацепляющихся друг с другом радиальных уравнений Шредингера:

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (4)$$

Качественный анализ уравнений (2), (4) и представления (3) дан в работе [4]. Уравнение (4) будет исходным для наших исследований. Его решение $u_\lambda(\rho, \eta)$, обладающее физически приемлемой асимптотикой в пределе $\rho \rightarrow \infty$, называем приведенной радиальной волновой функцией частицы p_1 в состоянии $|q, \lambda\rangle$ с сохраняющимися квантовыми числами q и λ .

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

Начнем с замечаний. Любое решение u_λ уравнения (4) можно представить в виде линейной комбинации двух его линейно независимых решений. Обозначим их символами F_λ и H_λ . В уравнении (4) заменим индекс λ индексом ℓ , который будет принимать целые значения ($\ell = 0, 1, 2, \dots$). Тогда полученное уравнение станет давно известным в теории трехмерного рассеяния радиальным уравнением Кулона [5]. Многие свойства его решений – радиальных кулоновских волновых функций $F_\ell(\rho, \eta)$ и $H_\ell(\rho, \eta)$ целого порядка ℓ – детально изучены [6].

В силу сделанных замечаний представляется вполне достаточным и логичным найти в случае полуцелых значений $\lambda \geq -1/2$ лишь два линейно независимых решения $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $H_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (4), определив их по аналогии с известными кулоновскими функциями $F_\ell(\rho, \eta)$ и $H_\ell(\rho, \eta)$.

Поступим именно таким образом. В п. 3.1 сформулируем определения функций Кулона F_λ , H_λ и G_λ полуцелого порядка λ и обсудим представления этих функций через вырожденные гипергеометрические функции [7], а п. 3.2 посвятим анализу разложений функций F_λ и G_λ по степенным и логарифмическим функциям переменных ρ , η , x , q и v определенных формулами (1).

3.1. Представления функций Кулона через функции Кумера и Трикоми. Регулярной в точке $\rho = 0$ волновой функцией Кулона $F_\lambda(\rho, \eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ назовем решение уравнения (4), обладающее асимптотиками

$$F_\lambda(\rho, \eta) = O(\rho^{\lambda+1}), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (5)$$

и

$$F_\lambda(\rho, \eta) = \sin \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) \right] + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $\delta_\lambda^c(\eta)$ – парциальная кулоновская фаза.

Нерегулярной в точке $\rho = 0$ волновой функцией Кулона полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ считаем решение $H_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \begin{cases} O(\sqrt{\rho} \ln \rho), & 2\lambda = -1, \\ O(\rho^{-\lambda}), & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (7)$$

и

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \exp \left\{ i \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Кроме решений F_λ и H_λ нам потребуется и нерегулярная в точке $\rho = 0$ функция Кулона полуцелого порядка G_λ . Определим ее формулой

$$G_\lambda(\rho, \eta) \equiv H_\lambda(\rho, \eta) - iF_\lambda(\rho, \eta), \quad 2\lambda = -1, 1, 3, \dots \quad (9)$$

Вследствие такого определения и формул (5)–(8) функция $G_\lambda(\rho, \eta)$ в пределе $\rho \rightarrow 0$ ведет себя так же, как функция $H_\lambda(\rho, \eta)$, а в пределе $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \cos \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) \right] + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Решим уравнение (4) с условиями (5)–(10). Подстановкой

$$\xi = -2i\rho, \quad u_\lambda(\rho, \eta) = \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} U(\xi)$$

сведем это уравнение к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$[\xi \partial_\xi^2 + (2\lambda + 2 - \xi) \partial_\xi - (\lambda + 1 + i\eta)] U(\xi) = 0.$$

Как известно [7], такое уравнение имеет два линейно независимых решения, которыми являются функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ и функция Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$ с комплексным параметром $a = \lambda + 1 + i\eta$ и целым параметром $c = 2\lambda + 2$.

Следовательно, при любых множителях $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ решениями исходного уравнения (4) являются произведения

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &\equiv C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} \Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2, -2i\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &\equiv D_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} \Psi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2, -2i\rho). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя известные асимптотики [7] функций $\Phi(a, c; \xi)$ и $\Psi(a, c; \xi)$, убедимся в том, что произведения (11) имеют требуемые асимптотики (5)–(8) тогда и только тогда, когда кулоновская фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$ определена формулой

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\eta), \quad (12)$$

множитель $C_\lambda(\eta)$ задан равенством

$$C_\lambda(\eta) = 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} e^{-\pi\eta/2}, \quad (13)$$

а множитель $D_\lambda(\eta)$ – равенством

$$D_\lambda(\eta) = (-1)^{\lambda+1/2} 2^{2\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)}{\Gamma(2\lambda + 2)C_\lambda(\eta)}. \quad (14)$$

Осталось найти функцию G_λ . Для этого в ее определении (9) заменим найденные функции F_λ и H_λ правыми частями равенств (11).

Выведем полезные представления функции $C_\lambda(\eta)$ переменной η .

Вследствие определения (13) и известных свойств гамма-функций и пси-функций [7]

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) \right| = \frac{\pi}{\text{ch}(\pi\eta)}, \quad \text{Im } \Psi\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) = \frac{\pi}{2} \text{th}(\pi\eta), \quad \Gamma(1+t) = t\Gamma(t)$$

для квадрата функции $C_{-1/2}(\eta)$ имеются три представления:

$$C_{-1/2}^2(\eta) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\pi\eta}}{\text{ch}(\pi\eta)} = \frac{\pi}{e^{2\pi\eta} + 1} = \frac{\pi}{2} - \text{Im } \Psi\left(\frac{1}{2} + i\eta\right), \quad (15)$$

а все остальные функции $C_\lambda(\eta)$ можно вычислить по рекуррентной формуле

$$C_\lambda(\eta) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}}{\lambda(2\lambda + 1)} C_{\lambda-1/2}(\eta), \quad 2\lambda > -1,$$

или используя порожденное этой формулой представление

$$C_\lambda(\eta) = \frac{2^{\lambda+1/2}}{(2\lambda + 1)!} C_{-1/2}(\eta) \prod_{p=1/2}^{\lambda} \sqrt{p^2 + \eta^2}, \quad 2\lambda > -1. \quad (16)$$

Из этого представления следует, что функция

$$P_\lambda(q^2) \equiv q^{2\lambda+1} \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}(\eta)} \right]^2 = \frac{1}{[(2\lambda + 1)!]^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2}{3} \lambda(\lambda + 1)(2\lambda + 1) q^2 \left[1 + \frac{1}{15} (\lambda - 1)(2\lambda - 1)(5\lambda + 6) q^2 + \dots \right] \right\} \quad (17)$$

является полиномом степени $\lambda/2 + 1$ переменной q^2 .

3.2. Разложения функций Кулона по степенным и логарифмическим функциям. Для вывода и анализа разложений функций $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $G_\lambda(\rho, \eta)$ по степенным и логарифмическим функциям аргументов ρ и η используем известные представления [7] функции Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ и функции Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$. Приведем

и обсудим такие представления. Функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ является степенным рядом

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{\xi^n}{n!} = 1 + \frac{a}{c} \frac{\xi}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{\xi^2}{2!} + \dots \quad (18)$$

и удовлетворяет тождеству (преобразованию) Куммера

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv e^{\xi} \Phi(c - a, c; -\xi). \quad (19)$$

Случай неотрицательного, но целого значения $n+1$, $n = 0, 1, \dots$, параметра c является особым (логарифмическим) случаем. В этом случае функция Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$ имеет довольно сложное строение и представляется в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \Psi(a, n+1; \xi) = & \frac{(-1)^{n-1}}{n! \Gamma(a-n)} \left\{ \Phi(a, n+1; \xi) \ln \xi + \right. \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a)_p}{(n+1)_p} [\Psi(a+p) - \Psi(1+p) - \Psi(1+n+p)] \frac{\xi^p}{p!} \Big\} + \\ & + \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(a-n)_p}{(1-n)_p} \frac{\xi^{p-n}}{p!}. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое слагаемое этой суммы – произведение логарифмической функции $\ln \xi$ и функции $\Phi(a, c; \xi)$, второе слагаемое – бесконечный ряд, содержащий пси-функции, а третье слагаемое – конечная сумма, которая полагается равной нулю в случае $n = 0$.

Формулы (18) и (20) содержат гамма-функцию $\Gamma(t)$ и символ Похгаммера $(a)_n$, поэтому стоит напомнить, что при комплексном сопряжении, которое далее обозначается символом $*$, гамма-функция и пси-функция преобразуются по правилам $\Gamma^*(t) = \Gamma(t^*)$ и $\Psi^*(t) = \Psi(t^*)$, а символ Похгаммера $(a)_n$ вычисляется по формулам

$$(a)_0 = 1; \quad (a)_n \equiv a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Например,

$$(2\lambda+2)_n = \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{(2\lambda+1)!}, \quad (-2\lambda)_n = (-1)^n \frac{(\nu-1-n)!}{(2\lambda)!}, \quad \nu \equiv 2\lambda+1. \quad (21)$$

Приступим к выводу и анализу разложений функций F_λ и G_λ .

Вывод представления функции $F_\lambda(\rho, \eta)$ в виде степенного ряда по переменной ρ довольно прост. В первом из равенств (11) заменим функцию Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ ее разложением (18), положив в нем $a = \lambda + 1 + i\eta$ и $c = 2\lambda + 2$, $\xi = -2i\rho$, а затем воспользуемся тождеством Куммера (19). В итоге получим два искомых разложения:

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{\pm i\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1 \pm i\eta)_n}{(2\lambda+2)_n} \frac{(\mp 2i\rho)^n}{n!}. \quad (22)$$

Положив в этих разложениях $\rho = qx$ и $\eta = \alpha/2q$, выведем еще два представления:

$$f_\lambda(\rho, \eta) \equiv \frac{F_\lambda(\rho, \eta)}{q^{\lambda+1}C_\lambda(\eta)} = x^{\lambda+1}e^{\pm iqx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1 \pm i(\alpha/2q)_n}{(2\lambda+2)_n} \frac{(\mp 2iqx)^n}{n!}. \quad (23)$$

В силу этих представлений функция f_λ инвариантна относительно замены $i \rightarrow -i$. Такая замена равносильна как комплексному сопряжению функции f_λ , так и замене $q \rightarrow -q$ переменной q . Следовательно, F_λ и f_λ – вещественные функции, а f_λ – четная функция переменной q . Функция F_λ из-за множителя $q^{\lambda+1}C_\lambda(\eta)$ не является таковой.

Кроме представлений (22) и (23) потребуется специальное представление функции F_λ . Выведем его. Для этого в формуле (23) возьмем все верхние знаки, перейдем к переменным $v = 2\sqrt{x}$ и q и воспользуемся первым из равенств (21). Полученное соотношение запишем в следующем виде:

$$F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = q^{\lambda+1}C_\lambda(\eta)(2\lambda+1)! \frac{v}{2} f_\lambda^\pm(v, q), \quad \rho = qx = q \frac{v^2}{4}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad (24)$$

где по определению

$$f_\lambda^\pm(v, q) \equiv e^{iqv^2/4} \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1 \pm i/2q)_n}{\Gamma(\nu+n+1)n!} \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n, \quad \nu \equiv 2\lambda+1, \quad (25)$$

все верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а все нижние знаки – в случае $\alpha = -1$.

Нерегулярная волновая функция G_λ , определенная формулой (9), имеет более сложное строение. Чтобы выявить его, докажем равенство

$$G_\lambda(\rho, \eta) = -\frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta), \quad (26)$$

в котором $h^c(\eta)$ – неаналитическая функция,

$$h^c(\eta) \equiv \operatorname{Re} \Psi\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) - \ln |\eta|, \quad (27)$$

а $\Theta_\lambda(\rho, \eta)$ – следующий ряд:

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(\rho, \eta) \equiv & -\left\{q^{2\lambda+1} \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}(\eta)}\right]^2\right\} x^{\lambda+1} e^{iqx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1+i\eta)_n}{(2\lambda+2)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!} \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n+\lambda-p+i\eta} - \Psi(n+1) - \Psi(2\lambda+2+n) + \ln x \right] + \\ & + \frac{(-1)^{2\lambda+1}}{2\lambda+1} x^{-\lambda} e^{iqx} \sum_{n=0}^{2\lambda} \frac{(-\lambda+i\eta)_n}{(-2\lambda)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!}, \quad \rho = qx, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \end{aligned} \quad (28)$$

где фигурными скобками выделен полином (17) переменной q^2 .

Приступим к доказательству представлений (26)–(28). Чтобы его заметно сократить, вместо определения (9) функции G_λ используем следующее из него равенство

$$-iG_\lambda(\rho, \eta) = -iH_\lambda(\rho, \eta) - F_\lambda(\rho, \eta). \quad (29)$$

Сначала выведем специальное разбиение функции $-iH_\lambda$, а затем выделим из него искомую мнимую часть $-G_\lambda$ этой функции. Во втором равенстве (11) выразим множитель $D_\lambda(\eta)$ через множитель $C_\lambda(\eta)$ по формуле (14), а функцию $\Psi(\lambda+1+i\eta, 2\lambda+2, -2i\rho)$ заменим ее разложением (20), положив в нем $a = \lambda+1+i\eta$, $c = 2\lambda+2$ и $\xi = -2i\rho$. Далее, используя представление (22) функции F_λ с верхними знаками, запишем исследуемое разложение функции $-iH_\lambda$ в виде суммы трех слагаемых, определенных следующим образом: первое слагаемое – функция

$$-iF_\lambda(\rho, \eta) \ln(-2i\rho) \frac{1}{C_\lambda^2(\eta)},$$

второе слагаемое – произведение функции

$$i \left[\frac{C_\lambda(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} \right] \rho^{\lambda+1} e^{i\rho}$$

и бесконечного ряда по целым степеням аргумента $(-2i\rho)^n$, $n = 0, 1, \dots$, а третье слагаемое – произведение конечной суммы ($n \leq 2\lambda$) по таким же степеням и функции

$$-i(-1)^{2\lambda+1} [(2\lambda+1)C_\lambda(\eta)]^{-1} \rho^{-\lambda} e^{i\rho}.$$

В первом слагаемом множитель $\ln(-2i\rho)$ представим в виде

$$\ln(-2i\rho) = \ln \rho - \frac{i\pi}{2} = \ln \left[\frac{2k}{|R|} \frac{r}{|R|} \right] - \frac{i\pi}{2} = \ln x - \ln |\eta| - \frac{i\pi}{2}, \quad (30)$$

а функцию $\Psi(n+\lambda+1+i\eta)$, содержащуюся во втором слагаемом в качестве коэффициента, заменим известной суммой [7]

$$\Psi(n+\lambda+1+i\eta) = \sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n+\lambda-p+i\eta} + \operatorname{Re} \Psi\left(\frac{1}{2}+i\eta\right) + i \operatorname{Im} \Psi\left(\frac{1}{2}+i\eta\right), \quad (31)$$

в которой первое слагаемое считается равным нулю в случае $n+\lambda = 1/2$. В полученном после замен (30) и (31) представлении функции $-iH_\lambda$ приведем подобные члены таким образом, чтобы слагаемые $-\ln |\eta|$ и $\operatorname{Re} \Psi(1/2+i\eta)$ разбиений (30) и (31) и оказались бы слагаемыми алгебраической суммы (27), а слагаемые $-i\pi/2$ и $i \operatorname{Im} \Psi(1/2+i\eta)$ этих же разбиений и коэффициент $iC_{1/2}^2(\eta)$ образовали бы алгебраическую сумму

$$i \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Im} \Psi\left(\frac{1}{2}+i\eta\right) - C_{1/2}^2(\eta) \right]. \quad (32)$$

Согласно формулам (15) такая сумма равна нулю. Поэтому исследуемое разбиение функции $-iH_\lambda$ существенно упростится, а его мнимая часть, взятая с обратным знаком и равная функции G_λ , запишется в виде (26)–(28), что и требовалось показать.

Выведем еще одно представление функции Θ_λ . Для этого в формуле (28) перейдем к переменным $v = 2\sqrt{x}$ и q , а затем применим оба соотношения (21). Полученные таким способом равенства представим в виде

$$\Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \theta_\lambda^\pm(v, q), \quad \rho = qx = q\frac{v^2}{4}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad (33)$$

где функции $\theta_\lambda^\pm$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_\lambda^\pm(v, q) \equiv & -\frac{1}{2}[(2\lambda + 1)!]^2 P_\lambda(q^2) e^{iqv^2/4} \times \\ & \times \left(\frac{v}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu + n)!n!} \left(\lambda + 1 \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(-2iq\frac{v^2}{4}\right)^n \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\lambda-1/2} \frac{1}{n + \lambda - p \pm i/2q} - \Psi(n + 1) - \Psi(\nu + n + 1) + 2 \ln \frac{v}{2} \right] + \\ & + \frac{1}{2} e^{iqv^2/4} \left(-\frac{2}{v}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - n - 1)!}{n!} \left(-\lambda \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(2iq\frac{v^2}{4}\right)^n, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь P_λ – полином (17), верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а нижние знаки – в случае $\alpha = -1$.

Выявим важные свойства функции Θ_λ .

Как показано в работе [4], функция G_λ благодаря ее асимптотике (10) является вещественной. В силу определения (27) функция h^c вещественная. Поэтому из равенства (26) следует, что функция Θ_λ тоже вещественная. Следовательно, комплексное сопряжение ряда (28) не изменяет его, но такое сопряжение сводится к замене $i \rightarrow -i$ во всех множителях и слагаемых этого ряда. Эта же замена порождается и инверсией $q \rightarrow -q$. Значит, Θ_λ – четная функция переменной q . Функция G_λ таковой не является из-за наличия в ее представлении (26) функции $q^\lambda C_\lambda(\eta)$.

Теперь заметим, что вследствие соотношения (26) верно равенство

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) = q^\lambda C_\lambda(\eta) \left[G_\lambda(\rho, \eta) + \frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) \right]. \quad (35)$$

Следовательно, функция Θ_λ удовлетворяет уравнению Кулона (4) и благодаря асимптотикам (6) и (10) его решений F_λ и G_λ имеет асимптотики

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) \sim \left(\frac{q}{\rho}\right)^\lambda \begin{cases} \ln \frac{q}{\rho}, & 2\lambda = -1, \\ (2\lambda + 1)^{-1}, & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0,$$

и

$$\Theta_\lambda(\rho, \eta) \sim \frac{q^\lambda C_\lambda(\eta)}{\cos \alpha^c(\eta)} \cos \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) - \alpha^c(\eta) \right], \quad \rho \rightarrow \infty,$$

где угол α^c таков, что

$$\sin \alpha^c(\eta) \equiv \frac{h^c(\eta)}{\sqrt{[h^c(\eta)]^2 + C_{-1/2}^4(\eta)}}, \quad \alpha^c(\eta) \in [0, \pi].$$

Выведем удобное для дальнейшего анализа и вычислений представление функции h^c , определенной формулой (27). Так как $\Psi^*(t) = \Psi(t^*)$, то $h^c(\eta)$ – четная функция: $h^c(\eta) = h^c(-\eta)$. Поэтому можно ограничиться ее анализом лишь на полуоси $\eta > 0$, что и делается всюду далее. В известном представлении пси-функции [7]

$$\Psi(t) = \ln t - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+t} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+t} \right) \right] \quad (36)$$

положим $t = 1/2 + i\eta$ и применим формулу Муавра:

$$t = \frac{1}{2} + i\eta = \left(\frac{1}{4} + \eta^2 \right)^{1/2} e^{i \arctg(2\eta)}.$$

Затем, используя тождество

$$\ln t - \ln |\eta| \equiv \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) + i \arctg(2\eta),$$

выведем искомое представление функции h^c в виде разности

$$h^c(\eta) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) - S(\eta) \quad (37)$$

логарифмической функции и функции S , определенной как бесконечный ряд:

$$S(\eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2 + 4\eta^2} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{8(n+1)}{(2n+1)^2 + 4\eta^2} \right] \right\}. \quad (38)$$

Завершим настоящий раздел двумя замечаниями. Все полученные представления (22)–(28) и (33)–(35) верны в любом из случаев $2\lambda = \pm 1, 3, \dots$. Представления (26)–(28), но лишь в частном случае $2\lambda = -1$, получены ранее в работе [8].

4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КУЛОНА

Дадим определения трех интересных с физической точки зрения пределов.

Некулоновский предел порождается двумя условиями: волновое число k фиксированно и положительно, модуль параметра R неограниченно растет ($|R| \rightarrow \infty$). Согласно списку (1) принятых обозначений в таком пределе $\eta = 1/2kR \rightarrow 0$, $q = k|R| \rightarrow +0$. Поэтому в уравнении Шредингера (2) кулоновский потенциал $1/rR$ сходится к нулю на всей полуоси $r > |R|^{-1}$.

Предел высоких энергий выделяется двумя условиями: параметр R фиксирован и отличен от нуля, а энергия E неограниченно возрастает. В таком пределе $k \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, а $\eta \rightarrow 0$. Поэтому в уравнении (2) модуль кулоновского потенциала $1/rR$ становится малой добавкой к квадрату волнового числа k в области $r > (k^2|R|)^{-1}$.

Вследствие данных выше пояснений в некулоновском пределе ($\eta \rightarrow 0$) и в пределе высоких энергий ($\eta \rightarrow 0$) все кулоновские функции одной или двух переменных η или ρ и η должны подчиняться одинаковым предельным соотношениям.

Для исследуемых уравнений Шредингера и Кулона (2) и (4) пределом нулевой энергии назовем предел $E \rightarrow +0$ при фиксированных значениях параметра $R \neq 0$ и порядка $\lambda \geq -1/2$. В таком пределе $k \rightarrow +0$ и $q \rightarrow +0$, а $|\eta| \rightarrow 0$.

В настоящем разделе ключевыми окажутся известные разложения [7] функций Бесселя первого рода J_ν , Y_ν и модифицированных функций Бесселя I_ν и K_ν . Приведем эти разложения в компактном виде. Обе функции I_ν и I_ν – степенные ряды:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_\nu(t) \\ J_\nu(t) \end{array} \right\} = \left(\frac{t}{2} \right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm t^2/4)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad (39)$$

функции K_ν и Y_ν устроены более сложно:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(-1)^\nu K_\nu(t) \\ -\pi Y_\nu(t) \end{array} \right\} = \left(\mp \frac{t}{2} \right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} [\Psi(n+1) + \Psi(\nu + n + 1)] \frac{(\pm t^2/4)^n}{(\nu + n)! n!} - \\ - 2 \ln \frac{t}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_\nu(t) \\ J_\nu(t) \end{array} \right\} + \left(\frac{2}{t} \right)^\nu \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - n - 1)!}{n!} \left(\pm \frac{t^2}{4} \right)^n. \quad (40)$$

Последовательно исследуем поведение всех кулоновских функций в некулоновском пределе и в пределах высоких и низких энергий.

4.1. Некулоновский предел и предел высоких энергий. Найдем асимптотику фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ в пределе $\eta \rightarrow 0$. В известном разложении [7] гамма-функции комплексного аргумента $s + it$ в ряд Лорана с центром в точке s

$$\Gamma(s + it) = \Gamma(s) \left\{ 1 + i\Psi(s)t - \frac{1}{2}[\partial_s \Psi(s) + \Psi^2(s)]t^2 + O(it^3) \right\}, \quad t \rightarrow 0,$$

положим $s = \lambda + 1$ и $t = \eta$. Используя полученное представление из определения (12) фазы $\delta_\lambda(\eta)$ выводим ее искомую асимптотику:

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \Psi(\lambda + 1)\eta + \eta^2 + O(\eta^3), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (41)$$

Исследуем эту асимптотику. Для этого в известном представлении пси-функции [7]

$$\Psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (42)$$

содержащем константу Эйлера $\gamma = 0.57721566\dots$, положим $n = \lambda + 1/2$. Из полученной таким образом формулы следуют неравенства $\Psi(\lambda + 1) < 0$, $2\lambda = -1$,

и $\Psi(\lambda + 1) > 0$, $2\lambda \geq 1$. Следовательно, в случае $2\lambda = -1$ старшее слагаемое асимптотики (41) фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ и переменная η имеют противоположные знаки, а в случае $2\lambda \geq 1$ — одинаковые.

Например, согласно обсуждаемым формулам (41) и (42), если $\eta \rightarrow 0$, то

$$\delta_{-1/2}^c(\eta) \sim -(\gamma + 2 \ln 2)\eta, \quad \delta_{1/2}^c(\eta) \sim (2 - \gamma - 2 \ln 2)\eta, \quad \delta_{3/2}^c(\eta) \sim \left(\frac{8}{3} - \gamma - 2 \ln 2\right)\eta.$$

Заметим, что из определений (12) и (14) функций $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ следуют предельные соотношения

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} C_\lambda(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\lambda)!!}{(2\lambda + 1)!} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-\lambda-1}}{(\lambda + 1/2)!}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} D_\lambda(\eta) = (-1)^{\lambda+1/2} 2^{\lambda+1}. \quad (43)$$

Найдем некулоновскую асимптотику функции h^c . Напомним, что эта функция равна разности (37) логарифмической функции и бесконечного ряда S , заданного формулой (38). Используя известные ряды Тейлора [6]

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots, \quad \ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \dots$$

с центром в точке $s = \eta^2 = 0$, убедимся в том, что $S(\eta) = S(0) + O(\eta^2)$, если $\eta \rightarrow 0$. Сравнив ряд $S(0)$ с разложением пси-функции (36) в случае $t = 1/2$ и используя представление (42) такой пси-функции, выведем цепочку равенств

$$S(0) = \left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \ln 2 = -[\gamma + 2 \ln 2] + \ln 2 = -\gamma - \ln 2.$$

Далее, применив формулу (37), получаем искомую асимптотику:

$$\begin{aligned} h^c(\eta) &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) + S(0) + O(\eta^2) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right) - \gamma - \ln 2 + O(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Осталось найти некулоновские пределы функций F_λ , G_λ и H_λ . Достижем эту цель по следующей схеме. Разложения (22) и (28) функций F_λ и Θ_λ , а затем и равенства (9) и (26), определяющие функции H_λ и G_λ , запишем в точке $\eta = 0$. Значения функций C_λ и h^c в этой же точке найдем по формулам (43) и (44). Применим равенства (21). Полученные разложения функций F_λ и G_λ в случае $\eta = 0$ сравним с соответствующими разложениями (39) и (40) функций Бесселя $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ целого порядка $\nu = m = \lambda + 1/2$ и переменной $t = \rho$. В итоге придем к следующему выводу: в некулоновском пределе функции F_λ , G_λ и H_λ вырождаются в произведения функции $\sqrt{\pi\rho/2}$ и функций Бесселя J_m , Y_m и $H_m^{(1)}$ целого порядка $m = \lambda + 1/2$:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &= \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_m(\rho), \quad G_\lambda(\rho, \eta) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} Y_m(\rho), \\ H_\lambda(\rho) &= i\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_m^{(1)}(\rho); \quad \eta = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Завершая настоящий пункт, отметим, что соотношения (41) и (43)–(45) верны как в некулоновском пределе, так и в пределе высоких энергий.

4.2. Предел нулевой энергии рассеяния. Начнем с исследования кулоновской фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$. По определению (12) эта фаза равна аргументу гамма-функции $\Gamma(t)$ переменной

$$t \equiv \lambda + 1 + i\eta = \sqrt{(\lambda + 1)^2 + \eta^2} e^{i \arctg(\eta/(\lambda+1))}.$$

В рассматриваемом пределе $q \rightarrow +0$, а $|\eta| \rightarrow \infty$. Значит, модуль переменной t неограниченно возрастает. Поэтому можно применить известную формулу Стирлинга [7]

$$\Gamma(t) = \sqrt{2\pi} e^{-t+(t-1/2)\ln t} (1 + O(t^{-1})), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\arg t| < \pi,$$

а затем представить кулоновскую фазу в виде суммы

$$\delta_\lambda^c(\eta) = \left\{ \frac{\eta}{2} \ln[(\lambda + 1)^2 + \eta^2] - \eta + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \arctg \frac{\eta}{\lambda + 1} \right\} [1 + O(\tau(\lambda, q))], \quad (46)$$

в которой функция

$$\tau(\lambda, q) \equiv [(\lambda + 1)^2 + q^{-2}]^{1/2}$$

убывает в пределе $q \rightarrow +0$ как $O(q)$ при любом фиксированном λ .

Асимптотика (46) имеет особенность: только в случае $2\lambda = -1$ ее слагаемое

$$\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \arctg \frac{\eta}{\lambda + 1}$$

обращается в нуль. Согласно этой же асимптотике фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$ при $q \rightarrow +0$ и любом λ неограниченно возрастает или убывает, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

Заметим, что модуль аргумента $t = \lambda + 1 + i\eta$ неограниченно возрастает и в случае $\lambda \rightarrow \infty$, $|\eta| < \infty$. Поэтому и в этом случае можно использовать формулу Стирлинга и показать, что фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$ имеет асимптотику (46), в которой функция $\tau(\lambda, q)$ убывает как $O(\lambda^{-1})$ при любом фиксированном, но ненулевом значении q .

Теперь исследуем поведение функции $C_\lambda(\eta)$ в том же пределе $q \rightarrow +0$. В силу формул (15) и (16) эта функция имеет асимптотику

$$C_\lambda(\eta) \sim \frac{2^{\lambda+1/2} \sqrt{\pi}}{(2\lambda + 1)!} |\eta|^{\lambda+1/2} \begin{cases} e^{-\pi|\eta|}, & \alpha = +1, \\ 1, & \alpha = -1, \end{cases} \quad q \rightarrow +0. \quad (47)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow +0$ функция $C_\lambda(\eta)$ быстро убывает, если $\alpha = 1$, и растет, как обратная целая степень $\lambda + 1/2$ переменной q , если $\alpha = -1$.

Выведем асимптотику функции $h^c(\eta)$ при $q \rightarrow 0$. По определению (27) эта функция четная. Поэтому рассмотрим только случай $\eta > 0$. Введем переменную

$$t \equiv \frac{1}{2} + i\eta = \sqrt{\frac{1}{4} + \eta^2} e^{i \arctg(2\eta)}, \quad \eta > 0.$$

В формуле (27) заменим пси-функцию такой переменной известным разложением [7]

$$\Psi(t) = \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} + \frac{1}{120t^4} - \frac{1}{256t^6} + O(|t|^{-8}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \arg t < \pi.$$

Затем, применив равенство

$$\ln t - \ln |\eta| = \frac{1}{2} \ln(1 + q^2) + i \operatorname{arctg} \frac{1}{q}$$

и известное представление [6]

$$\ln(1 + q^2) = q^2 - \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{3}q^6 - \frac{1}{4}q^8 + \dots, \quad q \rightarrow 0,$$

получим искомую асимптотику:

$$h^c(\eta) = -\frac{1}{6}q^2 - \frac{7}{60}q^4 - \frac{1}{4}q^6 - \frac{49}{24}q^8 + O(q^{10}), \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad q \rightarrow 0. \quad (48)$$

Перейдем к выводу предельных ($q \rightarrow +0$) соотношений для функций F_λ , Θ_λ и G_λ . Сначала в рядах (24), (25) и (33), (34) почленно перейдем к пределу $q \rightarrow +0$. Для этого используем асимптотику (48), равенства

$$\left(\lambda + 1 \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(-2iq \frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\pm \frac{v^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [\mp 2iq(j + \lambda) + 1]$$

и равенства

$$\left(-\lambda \pm \frac{i}{2q}\right)_n \left(2iq \frac{v^2}{4}\right)^n = \left(\mp \frac{v^2}{4}\right)^n \prod_{j=1}^n [\mp 2iq(j - \lambda - 1) + 1].$$

Затем сравним полученные разложения функций $f_\lambda^\pm$ и Θ_λ с соответствующими разложениями (39) и (40) функций Бесселя целого порядка $\nu = 2\lambda + 1$ и переменной $t = v$. Сформулируем результаты сравнения: функция F_λ удовлетворяет равенствам

$$\lim_{q \rightarrow +0} \frac{F_\lambda(\rho, \eta)}{q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta)} = (2\lambda + 1)! \frac{v}{2} \begin{cases} I_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ J_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1, \end{cases} \quad (49)$$

а функция Θ_λ подчиняется предельным соотношениям

$$\lim_{q \rightarrow +0} \Theta_\lambda(\rho, \eta) = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \begin{cases} K_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ -\frac{\pi}{2} Y_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \quad (50)$$

Теперь нетрудно найти асимптотику функции $q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta)$ при $q \rightarrow +0$. Для этого умножим обе части равенства (26) на функцию $q^\lambda C_\lambda(\eta)$, функцию $F_\lambda(\rho, \eta)$ заменим по формуле (49) и воспользуемся определением (17) полинома $P_\lambda(q^2)$. В результате выведем искомое асимптотическое представление:

$$q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta) \sim \Theta(\rho, \eta)|_{q=0} + h^c(\eta) P_\lambda(q^2) (2\lambda + 1)! \frac{v}{2} \begin{cases} I_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ J_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \quad (51)$$

Исследуем это представление. Согласно формулам (17) и (48), если $q \rightarrow +0$, то полином $P_\lambda(q^2)$ сходится к числу $[(2\lambda + 1)!]^{-2}$, а функция $h^c(\eta)$ убывает как $O(q^2)$. Поэтому обсуждаемое представление и формулы (50) порождают соотношения

$$\lim_{q \rightarrow +0} q^\lambda C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta) = \Theta(\rho, \eta)|_{q=0} = \frac{v}{(2\lambda + 1)!} \begin{cases} K_{2\lambda+1}(v), & \alpha = +1, \\ -\frac{\pi}{2} Y_{2\lambda+1}(v), & \alpha = -1. \end{cases} \quad (52)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow +0$ функции $C_\lambda(\eta) G_\lambda(\rho, \eta)$ и $\Theta(\rho, \eta)$ совпадают.

5. ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Используя полученные в разделах 3 и 4 представления, сначала выявим интересные с физической точки зрения особенности парциальных фаз δ_λ^c , затем обсудим особенности строения функций h^c и G_λ и, завершая настоящий раздел, сравним двумерное кулоновское рассеяние с трехмерным.

5.1. Особенности кулоновских парциальных фаз. Как следует из определения (12) и асимптотик (41), (46), все фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$, $2\lambda > -1$, являются нечетными и непрерывными функциями аргумента η . Знаки этих фаз при любом η совпадают со знаком параметра R кулоновского потенциала $1/Rr$. Любая фаза $\delta_\lambda^c(\eta)$, $2\lambda > -1$, равна нулю только в точке $\eta = 0$ и монотонно возрастает с ростом аргумента η на всей полуоси $\eta > 0$.

Поведение фазы $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ радикально отличается от поведения всех остальных фаз. Действительно, в силу равенств (44) и (48) фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ отрицательная или положительная в пределе малых или больших положительных значений ее аргумента η . Следовательно, в области $0 < \eta < \infty$ эта фаза должна иметь по крайней мере один локальный минимум и один нуль.

Перечисленные выше особенности подтверждает рис. 1, иллюстрирующий зависимость фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$ и $d_\lambda^c(q) \equiv \delta_\lambda^c(\eta)$, $\eta = 1/2q$, $2\lambda = \pm 1, 3$, от переменной η и переменной $q = 1/2\eta$. Фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ имеет локальный минимум в точке $\eta = \eta_1 = 1.047665\dots$. В этой точке фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ принимает значение $\delta_{-1/2}^c(\eta_1) = -0.956229\dots$. Числу η_1 отвечает число $q = q_1 = 1/2\eta_1 = 0.477254\dots$. Фаза $\delta_{-1/2}^c(\eta)$ имеет простой нуль в точке $\eta = \eta_2 = 2.702690\dots$. Ей соответствует точка $q = q_2 = 1/2\eta_2 = 0.185000\dots$.

5.2. Особенности функций h^c и G_λ . В силу определения (27) и асимптотических представлений (44) и (48) функция $h^c(\eta)$ является четной и непрерывной функцией аргумента $\eta \neq 0$, причем положительной или отрицательной и сходящейся к нулю в пределе его малых или больших по модулю значений. Следовательно, в области $0 < \eta < \infty$ эта функция должна иметь по крайней мере один локальный минимум и один нуль. Эти выводы подтверждает численный анализ функции $h^c(\eta)$ и функции $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$, $\eta = 1/2q$. Функция $h^c(\eta)$ имеет локальный минимум в точке $\eta = \eta_3 = 0.361049\dots$. В этой точке функция $h^c(\eta)$ принимает значение $h^c(\eta_3) = -0.207638\dots$. Числу η_3 отвечает число $q = q_3 = 1/2\eta_3 = 1.384851\dots$. Функция $h^c(\eta)$ имеет простой нуль в точке $\eta = \eta_4 = 0.178126\dots$. Ей соответствует точка $q = q_4 = 1/2\eta_4 = 2.806988\dots$.

Выявим особенность строения всех функций $G_\lambda(\rho, \eta)$, $2\lambda \geq -1$, в случае $\eta = \eta_4$. Так как функция $h^c(\eta)$ обращается в нуль только в точке $\eta = \eta_4$, то только в этой

Рис. 1. Зависимость кулоновских фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$ и $d_\lambda^c(q) \equiv \delta_\lambda^c(\eta)$ от их аргументов $\eta = 1/2q$ и q в трех случаях: $2\lambda = -1, 1, 3$ – сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые соответственно. Графики фаз $\delta_\lambda^c(\eta)$ (а), графики фаз $d_\lambda^c(q)$ (б).

точке представление (9) функции $G_\lambda(\rho, \eta)$ при любых λ и ρ преобразуется в равенство

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta), \quad \eta = \eta_4.$$

5.3. Сравнение двумерного и трехмерного кулоновского рассеяния.

В разделе 3 волновые функции Кулона F_λ , H_λ и G_λ полуцелого порядка были определены в полной аналогии с волновыми функциями целого порядка F_λ , H_λ и G_λ . Поэтому все формулы, приведенные в разделах 3 и 4, за исключением определений функций h^c и Θ_λ и асимптотик функции h^c , останутся справедливыми, если в них положить $\lambda = \ell$ и считать, что $\ell = 0, 1, \dots$.

Докажем, что функция $G_\ell(\rho, \eta)$ является суммой

$$G_\ell(\rho, \eta) = \frac{2\eta \tilde{h}^c(\eta)}{C_0^2(\eta)} F_\ell(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\ell C_\ell(\eta)} \Theta_\ell(\rho, \eta), \quad \ell = 0, 1, \dots, \quad (53)$$

в которой

$$\tilde{h}^c(\eta) \equiv \operatorname{Re} \Psi(1 + i\eta) - \ln |\eta| = \operatorname{Re} \Psi(i\eta) - \ln |\eta|, \quad (54)$$

а вещественная и четная по переменной q функция Θ_ℓ определена как

$$\begin{aligned} \Theta_\ell(\rho, \eta) \equiv & \alpha \left[q^{2\ell+1} \frac{C_\ell(\eta)}{C_0(\eta)} \right]^2 x^{\ell+1} e^{iqx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell+1+i\eta)_n}{(2\ell+2)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!} \times \\ & \times \left[\sum_{p=0}^{n+\ell-1} (n+\ell-p+i\eta)^{-1} - \Psi(n+1) - \Psi(2\ell+2+n) + \ln x - \frac{i}{2\eta} \right] + \\ & + \frac{i^{2\ell+1}}{2\ell+1} x^{-\ell} e^{iqx} \sum_{n=0}^{2\ell} \frac{(-\ell+i\eta)_n}{(-2\ell)_n} \frac{(-2iqx)^n}{n!}, \quad \rho = qx, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}. \end{aligned} \quad (55)$$

Рис. 2. Зависимость функций $h^c(\eta)$, $\tilde{h}^c(\eta)$ (а) и $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$, $\tilde{g}^c(q) \equiv \tilde{h}^c(\eta)$ (б) от их аргументов η и q , $\eta = 1/2q$. Графики функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ – сплошная и штриховая кривые, графики функций $g^c(q)$ и $\tilde{g}^c(q)$ – сплошная и штриховая кривые.

Доказательство отличается от изложенного в разделе 3 вывода формул (26)–(28) только двумя шагами: вместо разбиения (31) нужно положить

$$\Psi(n + \ell + 1 + i\eta) = \sum_{p=0}^{n+\ell-1} \frac{1}{n + \ell - p + i\eta} + \operatorname{Re} \Psi(1 + i\eta) + i \operatorname{Im} \Psi(1 + i\eta),$$

а вместо суммы (32) выделить сумму

$$-i \left[\operatorname{Im} \Psi(1 + i\eta) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\eta} C_0^2(\eta) \right]$$

и заметить, что эта сумма равна $-i/2\eta$ благодаря известным равенствам [6], [7]

$$\operatorname{Im} \Psi(1 + i\eta) = -\frac{1}{2\eta} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cth}(\pi\eta), \quad C_0^2(\eta) = \pi\eta \frac{e^{-\pi\eta}}{\operatorname{sh}(\pi\eta)}.$$

Сравним функции $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$, заданные формулами (27) и (54). Функция $\tilde{h}^c(\eta)$, в отличие от функции $h^c(\eta)$, не имеет ни нулей, ни локальных экстремумов. Асимптотика функции $\tilde{h}^c(\eta)$,

$$\tilde{h}^c(\eta) = \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{15}q^4 + \frac{1}{4}q^6, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad q \rightarrow 0,$$

отличается от асимптотики (48) функции $h^c(\eta)$. Остальные различия обсуждаемых функций видны из рис. 2. Зависимость функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ от их аргумента η иллюстрирует рис. 2а. Графики функций $g^c(q) \equiv h^c(\eta)$ и $\tilde{g}^c(q) \equiv \tilde{h}^c(\eta)$, изображенные на рис. 2б, поясняют зависимость функций $h^c(\eta)$ и $\tilde{h}^c(\eta)$ от переменной $q = 1/2\eta$.

Сделаем три замечания. Представление (53) впервые доказано Ламбертом в работе [9]. Формулы (53)–(55) в частном случае $\ell = 0$ воспроизводят соотношения,

Рис. 3. Графики эффективных потенциалов $V_{-1/2}^+(x)$, $V_{1/2}^+(x)$ и $V_{-1/2}^-(x)$ (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые соответственно).

полученные в работе [8]. Предложенный выше вывод разложения (54) довольно прост.

Выявим наиболее интересную с физической точки зрения особенность двумерного кулоновского рассеяния, не имеющую аналога в трехмерном пространстве. Для этого используем список обозначений (1) и подстановкой

$$u_\lambda(\rho, \eta) = w_\lambda^\pm(x, q), \quad x \equiv \frac{r}{|R|} = \frac{\rho}{q}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}$$

сведем уравнение (4) к уравнению

$$[\partial_x^2 - V_\lambda^\pm(x) + q^2]w_\lambda^\pm(x; q) = 0, \quad V_\lambda^\pm(x) \equiv \pm \frac{1}{x} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}, \quad x > 0, \quad (56)$$

где верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а нижние – в случае $\alpha = -1$.

Теперь обсудим полученное уравнение (56). Это уравнение является одномерным уравнением Шредингера для радиальной волновой функции $w_\lambda^\pm(x, q)$ квантовой частицы p_1 в состоянии $|\lambda, q\rangle$ с сохраняющимися квантовыми числами λ и q . На эту частицу воздействует эффективный потенциал $V_\lambda^\pm(x)$. Только в одном случае $\alpha = 1$ и $2\lambda = -1$ такой потенциал является знакопеременной функцией. Действительно, функция $V_{-1/2}^+(x)$, график которой изображен на рис. 3 сплошной кривой, имеет нуль в точке $x = 1/4$ и локальный максимум в точке $x = 1/2$. Следовательно, в области $x < 1/4$ потенциал $V_{-1/2}^+(x)$ является притягивающим потенциалом, а в области $x \geq 1/4$ – отталкивающим барьером. Из-за наличия такого барьера квантовая частица p_1 в рассмотренном случае $\alpha = 1$ и $2\lambda = -1$ может иметь резонансные состояния. Доказательство их отсутствия или существования представляется интересным для дальнейшего построения теории двумерного кулоновского рассеяния.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги выполненных исследований.

Дан вывод и анализ различных представлений (22)–(28) и (33)–(35) функций Кулона F_λ , G_λ и Θ_λ полуцелого порядка $\lambda \geq -1/2$. Получены асимптотики (41), (46)

и (44), (48) кулоновской фазы рассеяния $\delta_\lambda(\eta)$ и функции $h^c(\eta)$ в пределах $|\eta| \rightarrow \infty$ и $|\eta| \rightarrow 0$. Доказано, что в пределе нулевой энергии функции Кулона F_λ , Θ_λ и G_λ связаны с функциями Бесселя соотношениями (49)–(52). Выявлены особенности фазы $\delta_{-1/2}^c$, функции h^c и потенциала $V_{-1/2}^+$.

Необходимо подчеркнуть, что все перечисленные выше формулы получены впервые, верны при любом значении квантового числа $\lambda = \pm 1/2, 3/2, \dots$ и представляют для будущих исследований двумерного рассеяния квантовой частицы суперпозицией кулоновского потенциала и потенциала ядерного типа. Актуальность таких исследований обусловлена интенсивным развитием теоретической и экспериментальной физики ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках [10].

Список литературы

- [1] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [2] С. П. Меркурьев, *ЯФ*, **24**:2 (1976), 289–297.
- [3] С. П. Меркурьев, *ТМФ*, **32**:2 (1977), 187–207.
- [4] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **186**:2 (2016), 251–271; *Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: волновые функции и функции Грина*, Препринт ОИЯИ Р4-2015-17, ОИЯИ, Дубна, 2015.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [6] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.
- [8] D. Bollé, F. Gesztesy, *Phys. Rev. A*, **30**:3 (1984), 1279–1293.
- [9] E. Lambert, *Helv. Phys. Acta*, **42**:4 (1969), 667–677.
- [10] L. D. Carr, D. DeMille, R. V. Krems, J. Ye, *New J. Phys.*, **11** (2009), 055049, 87 pp.