Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик, Антиквантование деформированных уравнений класса Гойна, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 142–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 02:10:54

© 2016 г.

С. Ю. Славянов*, О. Л. Стесик*

АНТИКВАНТОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССА ГОЙНА

Рассматриваются деформированные уравнения класса Гойна, т.е. уравнения класса Гойна с добавленной ложной особой точкой. Доказано, что каждое деформированное уравнение класса Гойна реализует при антиквантовании переход от уравнения класса Гойна к соответствующему уравнению Пенлеве. Приводится полный список таких переходов.

Ключевые слова: антиквантование, уравнения класса Гойна, деформированные уравнения класса Гойна, уравнения Пенлеве.

DOI: 10.4213/tmf8974

1. УРАВНЕНИЯ КЛАССА ГОЙНА

Уравнение Гойна – это фуксово дифференциальное уравнение с четырьмя регулярными особыми точками, которые выбираются без потери общности в $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$, $z_4 = \infty$ на комплексной плоскости z . Уравнения класса Гойна – это уравнения, в которых осуществлена конфлюэнция регулярных точек в уравнении Гойна в иррегулярные особые точки. Среди конфлюэнтных уравнений Гойна можно выделить класс редуцированных конфлюэнтных уравнений Гойна. Полный список таких уравнений был введен в книге [1]. Под деформированным уравнением класса Гойна мы понимаем уравнение класса Гойна с добавленной ложной особой точкой.

В настоящей работе показано, что в деформированных уравнениях класса Гойна реализуется перевод квантового гамильтониана, отвечающего конфлюэнтному уравнению Гойна, в классический гамильтониан, отвечающий соответствующему уравнению Пенлеве.

Первоначально связь уравнений Гойна с уравнениями Пенлеве была показана в работе [2], где, однако, был представлен лишь эвристический подход без глубинного понимания процесса, а также содержались пробелы и ошибки. Некоторые детали вычислений были впоследствии уточнены в статье [3]. Наиболее полное изложение вопроса представлено в статье [4] и книге [1]. Выбранный в настоящей статье альтернативный подход с использованием деформированных уравнений класса Гойна

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@ss2034.spb.edu, o.stesik@spbu.ru

вместо уравнений класса Гойна дает более прозрачное толкование антиквантования, хотя технические выкладки остаются в значительной мере прежними.

Представим уравнение Гойна:

$$\sigma(z)w'' + \sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j) \sigma_j(z) w' + (\alpha \beta z - \sigma_3(t) h) w = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(z) = z(z-1)(z-t)$ – полином третьей степени, стоящий множителем при второй производной, а $\sigma_j(z) = \sigma(z)/(z-z_j)$ – полиномы второго порядка, входящие в множитель при первой производной. Параметры θ_j , $j = 1, 2, 3$, являются характеристическими показателями для решений уравнения (1) с сингулярностями в z_j , в то время как α , β – это характеристические показатели на бесконечности. Следует отметить, что θ_3 рассматривается как зависимый параметр, поскольку относительно характеристических показателей в особенностях должно выполняться условие Фукса

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j + \alpha + \beta = 2.$$

Выбор одного зависимого параметра θ_3 среди θ_1 , θ_2 , θ_3 , α и β произволен. Таким образом, часто вместо θ_3 зависимым параметром считается параметр β . Параметр h называется аксессуарным параметром уравнения (1). Он нормирован в соответствии с условием

$$\operatorname{res}_{z=t} \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(z)} = 1. \quad (2)$$

Такая нормировка связана со степенью полинома $\sigma(z)$. Параметр h с физической точки зрения обозначает энергию. Уравнение Гойна характеризуется шестью параметрами: четыре локальных параметра θ_1 , θ_2 , α и β , параметр $z_3 = t$ – положение третьей особенности, который мы называем временем, и параметр h .

Более компактно уравнение (1) можно записать в виде

$$\sigma w'' + \tau w' + \omega w - \sigma_3(t) h w = 0, \quad (3)$$

где σ , τ , ω – полиномы соответственно третьей, второй и первой степени по z , равные

$$\sigma(z) = \prod_{j=1}^3 (z - z_j), \quad \tau(z) = \sigma(z) \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \theta_j}{z - z_j}, \quad \omega(z) = \alpha \beta z.$$

Применяя процесс конфлюэнции, в котором особенности сливаются одна с другой, а некоторые коэффициенты стремятся к бесконечности (см. [1]), можно получить различные конфлюэнтные уравнения Гойна: однократно конфлюэнтное уравнение Гойна

$$z(z-1)w''(z) + \left(-tz(z-1) + \sum_{j=1}^2 (1 - \theta_j)(z - z_j) \right) w'(z) + (-t\alpha z)w(z) - thw(z) = 0, \quad (4)$$

где $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, биконфлюэнтное уравнение Гойна

$$zw''(z) - (z^2 + tz - c)w'(z) + (-\alpha z)w(z) - hw(z) = 0, \quad (5)$$

дважды конфлюэнтное уравнение Гойна

$$z^2w''(z) + (-z^2 + cz - t)w'(z) + (-\alpha z)w(z) - thw(z) = 0 \quad (6)$$

и триконфлюэнтное уравнение Гойна

$$w''(z) + (-z^2 - t)w'(z) + (-\alpha z)w(z) - hw(z) = 0. \quad (7)$$

Заметим, что для любого конфлюэнтного уравнения в свободном члене выбор z можно изменить на выбор $z - z^*$ с произвольной z^* . Это отвечает сдвигу энергии. Заметим, что степень полинома при старшей производной вторая для уравнений (4) и (6), тогда как в уравнении (5) степень полинома при старшей производной первая, а в уравнении (7) – нулевая.

Перечислим более специальные конфлюэнтные уравнения Гойна – результат слабой конфлюэнции (см. [1]): редуцированное конфлюэнтное уравнение Гойна

$$z(z-1)w''(z) + [(1-\theta_1)(z-1) + (1-\theta_2)z]w'(z) - t(z+h)w(z) = 0, \quad (8)$$

редуцированное биконфлюэнтное уравнение Гойна

$$zw''(z) + (1-\theta_1)w'(z) - (z^2 + tz)w(z) - thw(z) = 0, \quad (9)$$

редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна

$$z^2w''(z) - zw'(z) + \left(-az - \frac{1}{z}\right)w(z) - thw(z) = 0, \quad (10)$$

дважды редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна

$$z^2w''(z) - \left(z + \frac{t}{z}\right)w(z) - thw(z) = 0 \quad (11)$$

и редуцированное триконфлюэнтное уравнение Гойна

$$w''(z) - (z^2 + tz)w(z) - hw(z) = 0. \quad (12)$$

Существует еще редуцированное биконфлюэнтное уравнение Гойна, но оно не приводит к новому уравнению Пенлеве. В окрестности иррегулярной особой точки редуцированного уравнения решения представляются субнормальным разложением по полуцелым степеням.

Все написанные выше уравнения, включая уравнение (1), можно обобщить следующим уравнением:

$$\sigma(z)w''(z) + \tau(z)w'(z) + (\omega(z) - f(t)h)w(z) = 0, \quad (13)$$

где $\tau(z)$ – полином второй степени от z , $\omega(z)$ – полином первой степени от z , а степень полинома $\sigma(z)$ варьирует от третьей до нулевой. Соответственно степень полинома $f(t)$ также варьирует от двух до нуля.

Ниже мы используем термин “исторические уравнения Пенлеве”, понимая под этим тот, например, список, который приводится в книге [5]. В данной статье возникают несколько иные уравнения, чем в [5], их мы также называем уравнениями Пенлеве, причем каждый раз проводится анализ сведения одних уравнений к другим.

2. ДЕФОРМИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССА ГОЙНА

Добавим в каждое из представленных выше уравнений ложную особую точку (т. е. точку, где решение голоморфно), что в общем случае дает

$$\sigma(z)w'' + \left(\tau(z) - \frac{\sigma(z)}{z-q}\right)w' + \left(\omega(z) + \mu \frac{\sigma_1(q)z}{z-q} - f(t)h\right)w = 0, \quad (14)$$

где $f(t)$ – надлежащая нормировка энергии. Выбор множителя $\sigma_1(q)$ определяется нормировкой

$$\operatorname{res}_{z=q} \frac{\sigma_1(q)z}{z-q} = \sigma(q). \quad (15)$$

Необходимое условие того, что $z = q$ является ложной особой точкой, имеет вид

$$\mu^2\sigma(q) + (\tau q - \sigma(q))\mu + \omega(q) - f(t)h = 0, \quad (16)$$

что следует из разрешимости системы для коэффициентов разложения решения $w(z)$ в степенной ряд в окрестности ложной сингулярности $z = q$.

Равенство (16) позволяет исключить $f(t)h$ в (14):

$$\begin{aligned} \sigma(z)w'' + \tau(z)w' + \omega(z)w(z) - (\sigma(q)\mu^2 + \mu\tau(q) + \omega(q))w(z) - \\ - \frac{\sigma(z)}{z-q}w'(z) + \mu \frac{\sigma(q)}{z-q}w(z) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) можно представить в симметричном операторном виде:

$$(H(p, z) - H(\mu, q))w(z) + \frac{\mu\sigma(q)w(z) - \sigma(z)w'(z)}{z-q} = 0, \quad (18)$$

где p – квантовый оператор дифференцирования $p = d/dz$.

В окрестности ложной особой точки можно выделить два базисных решения уравнения (18) $w_1(z)$ и $w_2(z)$:

$$\begin{aligned} w_1(q) = 0, \quad w_1'(q) = \mu, \quad w_1''(q) = 0; \\ w_2(q) = 0, \quad w_2'(q) = \mu = 0, \quad w_2''(q) = 1. \end{aligned}$$

Указанная выше симметрия, конечно, реализуется только при рассмотрении решения $w_1(z)$.

Функцию $H(\mu, q)$, выражаемую равенством

$$H(\mu, q) = \sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \omega(q), \quad (19)$$

мы назовем классическим гамильтонианом. Классический гамильтониан порождает различные уравнения Пенлеве. Антиквантование уравнения (18) состоит в замене p на μ и z на q , что переводит уравнение (18) в тождество при дополнительном требовании, что рассматривается решение $w_1(z)$. Очевидно, что два первых слагаемых в (18) сокращаются. Последнее слагаемое $(-\sigma(z)w'(z) + \mu\sigma(q)w(z))/(z - q)$ надо разложить по степеням $z - q$. Множитель при нулевой степени $z - q$ равен $-\mu^2\sigma(q) + \mu^2\sigma(q) = 0$. Остальные слагаемые в разложении пропадают при $z = q$.

Гамильтониан $H(\mu, q)$ является гамильтонианом для соответствующих уравнений Пенлеве, что проверяется напрямую. Предложенный подход является оправданием эвристического антиквантования уравнений Пенлеве, предложенного в предыдущих статьях одного из авторов.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Перейдем от гамильтониана $H(\mu, q)$ к лагранжиану $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$, введя вместо переменной μ переменную

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \mu} = 2\sigma\mu + \tau.$$

Для лагранжиана получаем выражение

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \dot{q}\mu - \sigma\mu^2 - \tau\mu - \omega = \frac{(\dot{q} - \tau)^2}{4\sigma} - \omega. \quad (20)$$

Далее надо вывести уравнение Эйлера–Лагранжа, имеющее вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (21)$$

Вычисления дают

$$\ddot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial q} \dot{q}^2 - \frac{\partial \ln \sigma}{\partial t} \dot{q} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{\sigma} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{\sigma} + 2\sigma \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0. \quad (22)$$

Однако такой алгоритм приводит к правильному результату только для тех уравнений, для которых $f(t) = 1$. Для других уравнений оба гамильтониана и оставшиеся в (18) слагаемые делятся на $f(t)$. При этом, очевидно, уравнение (18) не меняется по существу.

Здесь используется рецепт выбора $f(t)$ в соответствии со степенью полинома $\sigma(z)$.

Выведем уравнение Эйлера–Лагранжа в общем случае. Гамильтониан примет вид

$$H(\mu, q) = \frac{1}{f(t)} [\sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \omega(q)]. \quad (23)$$

Лагранжиан для этого случая записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{(f(t)^{1/2}\dot{q} - f(t)^{-1/2}\tau)^2}{4\sigma} - \frac{\omega}{f(t)}. \quad (24)$$

Соответствующее уравнение Эйлера после вычислений принимает вид

$$\ddot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial(\ln f - \ln \sigma)}{\partial t} \dot{q} - \frac{\sigma}{2f^2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{\sigma} - \frac{\sigma}{f} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{\sigma} + \frac{2\sigma}{f^2} \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0. \quad (25)$$

В частном случае $f(t) = 1$ получим уравнение (22).

Здесь рассматриваются три варианта множителя $f(t)$: 1) $f(t) = t(t-1)$; 2) $f(t) = t$; 3) $f(t) = 1$. Выбор конкретного варианта определяется требованием, чтобы соответствующее деформированное уравнение класса Гойна обладало свойством изо-модромии, т. е. данные модромии сохранялись бы при изменении параметра t . Исследование этого вопроса выходит за рамки данной статьи. Уравнения (22) и (25) представляют все многообразие уравнений Пенлеве.

Рассмотрение конкретных случаев начнем с уравнения Гойна. Выберем для него $f(t) = t(t-1)$ и выполним следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial q} \sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j) \sigma_j \sum_{i=1}^3 \frac{1 - \theta_i}{q - q_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{(1 - \theta_j)^2 (q_j - q_{j+1})(q_j - q_{j+2})}{q - q_j} + K(\theta_j, q_j) + q \left(\sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j) \right)^2 \right] = \\ &= - \sum_{j=1}^3 \frac{(1 - \theta_j)^2 (q_j - q_{j+1})(q_j - q_{j+2})}{(q - q_j)^2} + \left(\sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j) \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь выражение $K(\theta_j, q_j)$ не зависит от q и, следовательно, пропадает при дифференцировании по q , а индексы i, j берутся по модулю 3.

Преобразуем далее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \theta_j}{q - q_j} = - \frac{1 - \theta_3}{(q - t)^2}.$$

Собрав все промежуточные вычисления и учитывая условие Фукса в виде

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j + \alpha + \beta = 0, \quad (26)$$

получим из (25)

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \dot{q}^2 + \dot{q} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) + \\ + \frac{\sigma}{2t^2(t-1)^2} \left[\frac{(1 - \theta_1)^2 t}{q^2} - \frac{(1 - \theta_2)^2 (t-1)}{(q-1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \theta_3)(3 - \theta_3)t(t-1)}{(q-t)^2} - (\alpha - \beta)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27) является уравнением Пенлеве Р6, и его коэффициенты являются инвариантами деформированного уравнения Гойна. Хотя внешне оно выглядит зависящим от пяти параметров, условие Фукса сокращает это число до четырех.

Перейдем к тем уравнениям класса Гойна, для которых выполняется $f(t) = t$. Для однократно конфлюэнтного уравнения Гойна

$$\sigma = z(z-1), \quad \tau = -tz(z-1) + (1-\theta_1)(z-1) + (1-\theta_2)z, \quad \omega = t\alpha z.$$

Предварительные вычисления дают

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{\sigma} = \frac{\partial}{\partial q} \left[t^2 q(q-1) - 2tq(2-\theta_1-\theta_2) - \frac{(1-\theta_1)^2}{q} + \frac{(1-\theta_2)^2}{q-1} + K(\theta_j, t) \right],$$

где функция $K(\theta_j, t)$ не зависит от q и, следовательно, после дифференцирования пропадает.

Собрав вместе предварительные вычисления, получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} \right) \dot{q}^2 + \frac{1}{t} \dot{q} - \frac{1}{2} q(q-1)(2q-1) + \\ + \frac{q(q-1)}{t} (1-2a-\theta_1-\theta_2) - \frac{1}{2t^2} \left[\frac{(1-\theta_1)^2(q-1)}{q} + \frac{(1-\theta_2)^2 q}{(q-1)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Это уравнение естественно назвать уравнением Пенлеве Р5. Однако исторически уравнением Р5 называется несколько иное уравнение. Постараемся прояснить этот вопрос. В конфлюэнтном уравнении Гойна можно поменять местами иррегулярную особую точку на бесконечности и одну из конечных регулярных особых точек. Пусть это будет точка $z = 1$, так что делается преобразование $z = x/(x-1)$. Пересчитав производные, приходим к уравнению

$$x(x-1)^2 w'' + [-tx - (1-\theta_1)(x-1) + (1+\theta_2)x(x-1)] w' + \left[\frac{ta}{x-1} - t\bar{h} \right] w = 0. \quad (29)$$

Это уравнение также можно считать однократно конфлюэнтным уравнением Гойна. Оно отличается от уравнения (4) тем, что функция $\omega(x)$ не является полиномом, однако это обстоятельство не влияет на дальнейшие результаты. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(q) = q(q-1)^2, \quad \tau(q) = -tq - (1-\theta_1)(q-1) + (1-\theta_2)q(q-1), \\ \omega(q) = \frac{ta}{q-1}. \end{aligned}$$

Проделав предварительные вычисления, аналогичные приведенным выше,

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma(q)}{t^2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{\sigma} &= \frac{q}{q-1} + (\theta_2 - \theta_1 + 2) \frac{q}{t} + \frac{(q-1)^2}{2t^2} \left(\frac{(1-\theta_1)^2}{q} - (1-\theta_2)^2 q \right), \\ -\frac{1}{2} \frac{\sigma(q)}{t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{\sigma} &= \frac{q}{t}, \quad \frac{2\sigma}{t^2} \frac{\partial \omega}{\partial q} = -\frac{2aq}{t}, \end{aligned}$$

получим другой вариант уравнения Пенлеве P5:

$$\ddot{q} - \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2q} \right) \dot{q}^2 + \frac{1}{t} \dot{q} + (\theta_2 - \theta_1 + 1 - 2a) \frac{q}{t} + \frac{(q-1)^2}{2t^2} \left(\frac{(1-\theta_1)^2}{q} - (1-\theta_2)^2 q \right) + \frac{q(q+1)}{q-1} = 0. \quad (30)$$

С помощью масштабирования $q \rightarrow \delta q$, $q-1 \rightarrow \delta(q-1)$, $q+1 \rightarrow \delta(q+1)$ можно сделать последнее слагаемое в (30) пропорциональным множителю δ . Вычисления для редуцированного конфлюэнтного уравнения Гойна также с иррегулярной особой точкой в единице дают

$$\ddot{q} - \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2q} \right) \dot{q}^2 + \frac{1}{t} \dot{q} + \frac{(q-1)^2}{2t^2} \left(\frac{(1-\theta_1)^2}{q} - (1+\theta_2)^2 q \right) - \frac{2q}{t} = 0. \quad (31)$$

Историческое уравнение Пенлеве P5 есть совокупность уравнений (30) и (31).

Для дважды конфлюэнтного уравнения Гойна, в котором

$$\sigma(q) = q^2, \quad \tau(q) = -q^2 + cq - t, \quad \omega(q) = -aq,$$

проделаем предварительные вычисления:

$$\begin{aligned} -\frac{q^2}{2t^2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau^2}{q^2} &= -\frac{q^2}{2t^2} \frac{\partial}{\partial q} \left(q^2 + \frac{t^2}{q^2} - 2cq - 2c \frac{t}{q} \right) = -\frac{q^3}{t^2} + \frac{1}{q} + c \frac{q^2}{t^2} - \frac{c}{t}, \\ -\frac{\sigma}{t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{\sigma} &= \frac{1}{t}, \quad \frac{2\sigma}{t^2} \frac{\partial \omega}{\partial q} = -2a \frac{q^2}{t^2}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (25), получим один из вариантов уравнения Пенлеве P3:

$$\ddot{q} - \frac{1}{q} \dot{q}^2 + \frac{1}{t} \dot{q} - \frac{q^3}{t^2} + \frac{1}{q} + (c-2a) \frac{q^2}{t^2} - \frac{c}{t} = 0. \quad (32)$$

Перейдем к новым переменным $t := t^2$, $q := tq$. Такое преобразование, очевидно, не нарушает свойство Пенлеве, и, следовательно, преобразованное уравнение также будет являться уравнением Пенлеве. Вычисления

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{\dot{q}}{t} &:= \frac{1}{4t} \left(\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{\dot{q}}{t} \right), \\ -\frac{q^3}{t^2} + \frac{1}{q} + (c-2a) \frac{q^2}{t^2} - \frac{c}{t} &:= \frac{1}{t} \left(-q^3 + \frac{1}{q} \right) + (c-2a) \frac{q^2}{t^2} - \frac{c}{t} \end{aligned}$$

приводят к новому варианту уравнения Пенлеве P5:

$$\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{\dot{q}}{t} + 4 \left(-q^3 + \frac{1}{q} \right) + 4(c-2a) \frac{q^2}{t} - 4 \frac{c}{t} = 0. \quad (33)$$

Заметим, что с помощью масштабирования переменной $q := \gamma q$ можно изменять множители при q^3 и q^{-1} .

Для редуцированного дважды конфлюэнтного уравнения Гойна (10) имеем

$$\sigma = q^2, \quad \tau = -q^2, \quad \omega = -aq - \frac{t}{q}.$$

Как следствие получим уравнение Пенлеве

$$\ddot{q} - \frac{1}{q}\dot{q}^2 + \frac{\dot{q}}{t} - \frac{q^3}{t^2} - \frac{2aq^2}{t^2} + \frac{2}{t} = 0, \quad (34)$$

которое может быть получено как частный случай исторического уравнения Пенлеве Р3.

Редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна, для которого $\sigma = q^2$, $\omega = -q - t/q$, порождает другой частный случай уравнения Пенлеве Р3:

$$\ddot{q} - \frac{1}{q}\dot{q}^2 + \frac{\dot{q}}{t} - \frac{2q^2}{t^2} + \frac{2}{t} = 0. \quad (35)$$

Биконфлюэнтное уравнение Гойна, для которого

$$\sigma(q) = q, \quad \tau(q) = -q^2 - tq + c, \quad \omega(q) = aq,$$

генерирует уравнение Пенлеве Р4

$$\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{2q} - \frac{3}{2}q^3 - 2q^2t + \frac{1}{2}qt^2 + (c + 1 + 2a)q + \frac{c^2}{q} = 0. \quad (36)$$

Триконфлюэнтное уравнение Гойна (7) с $\sigma(q) = 1$, $\tau(q) = -q^2 - t$, $\omega(q) = -aq$ порождает в соответствии с (22) уравнение Пенлеве Р2

$$\ddot{q} - \frac{1}{2}(2q^2 + t) + 1 - 2a = 0. \quad (37)$$

Это уравнение простыми заменами переменных сводится к историческому уравнению Р2.

Наконец, редуцированное триконфлюэнтное уравнение Гойна (12), для которого $\sigma(q) = 1$, $\tau(q) = 0$, $\omega(q) = -z^2 - tz$, порождает уравнение Пенлеве Р1

$$\ddot{q} - 2(q^2 + t) = 0. \quad (38)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Показано, что с помощью антиквантования деформированных уравнений Гойна можно сгенерировать всю совокупность уравнений Пенлеве. Отметим некоторые особенности этого процесса.

1. Параметры, которые входят в уравнение Пенлеве, являются инвариантами соответствующих уравнений Гойна. Тем самым s-гомотопные преобразования уравнений Гойна не влияют на вид уравнений Пенлеве.

2. Перестановка особых точек в уравнениях Гойна меняет вид уравнений Пенлеве, как можно видеть на примере уравнений (30) и (31), но, конечно, сохраняет свойство Пенлеве.

3. Исторический вид уравнений P5 и P3 переопределен по числу параметров, по четыре в обоих случаях. На самом деле число параметров должно составлять три и два соответственно. Причина этого в перегрузке уравнений P5 и P3 использованием редуцированных уравнений Гойна.

Благодарности. Авторы благодарны А. Я. Казакову и М. В. Бабичу за стимулирующие дискуссии.

Список литературы

- [1] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, СПб., 2002.
- [2] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:22 (1996), 7329–7335.
- [3] S. Yu. Slavyanov, “Kovalevskaya’s dynamics and Schrödinger equations of Heun class”, *Operator Methods in Ordinary and Partial Differential Equations* (Stockholm, Sweden, June 2000), *Operator Theory: Advances and Applications*, **132**, eds. S. Albeverio, N. Elander, W. N. Everitt, P. Kurasov, Birkhäuser, Basel, 2002, 395–402.
- [4] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 395–406.
- [5] A. R. Its, V. Y. Novokshenov, *The Isomodromic Deformation Method in the Theory of the Penlevé Equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, **1191**, Berlin, 1986.