Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Макаров, Э. Р. Цекановский, Диссипативные и неунитарные решения операторных коммутационных соотношений, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 51–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:19:58

© 2016 г.

К. А. Макаров*, Э. Р. Цекановский†

ДИССИПАТИВНЫЕ И НЕУНИТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Изучаются (обобщенные) полувейлевы коммутационные соотношения вида $U_g A U_g^* = g(A)$ на $\text{Dom}(A)$, где A – оператор с плотной областью определения, а $G \ni g \mapsto U_g$ является унитарным представлением подгруппы G аффинной группы $\mathcal{G}$ (группы аффинных отображений действительной прямой, сохраняющих ориентацию). Если A – симметричный оператор, то группа G индуцирует действие/поток на единичном шаре в операторном пространстве сжимающих отображений из $\text{Ker}(A^* - iI)$ в $\text{Ker}(A^* + iI)$. Для данного потока доказаны несколько теорем о неподвижных точках. В случае однопараметрических непрерывных подгрупп линейных отображений самосопряженные (максимально диссипативные) операторы, соответствующие неподвижным точкам потока, дают решения для (редуцированных) обобщенных коммутационных соотношений Вейля. Показано, что в диссипативном случае редуцированные соотношения Вейля допускают ряд представлений, не являющихся унитарно-эквивалентными; для индексов дефекта $(1, 1)$ основные результаты можно усилить и вынести в отдельный случай.

Ключевые слова: коммутационные соотношения Вейля, аффинные группы, индексы дефекта, самосопряженные расширения.

DOI: 10.4213/tmf8975

Посвящено памяти Станислава Петровича Меркурьева

1. ВВЕДЕНИЕ

Широко известно (см., например, монографии [1] или [2]), что канонические коммутационные соотношения в форме Вейля [3]

$$U_t V_s = e^{ist} V_s U_t, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

*Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, Missouri, USA.
E-mail: makarovk@missouri.edu

†Department of Mathematics, Niagara University, Lewiston, NY, USA.
E-mail: tsekanov@niagara.edu

для двух сильно непрерывных унитарных групп $U_t = e^{itB}$ и $V_s = e^{isA}$ в (сепарабельном) гильбертовом пространстве имеют место тогда и только тогда, когда

$$U_t A U_t^* = A + tI \quad \text{на} \quad \text{Dom}(A), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Менее известный, хотя и очевидный, факт (который является прямым следствием результата Стоуна–фон Неймана о единственности [4], [5]) состоит в том, что если самосопряженный оператор A удовлетворяет равенству (1.2), то A всегда допускает симметричное сужение $\dot{A} \subset A$ с индексами дефекта $(1, 1)$ такое, что

$$U_t \dot{A} U_t^* = \dot{A} + tI \quad \text{на} \quad \text{Dom}(\dot{A}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

В этой ситуации возникает следующий естественный вопрос. Пусть соотношение (1.3) выполняется для некоторого симметричного оператора $\dot{A}$. В более общем случае предположим, что выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$U_t \dot{A} U_t^* = g_t(\dot{A}) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(\dot{A}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

причем g_t является однопараметрической группой аффинных отображений действительной прямой, а $g_t \mapsto U_t$ есть ее сильно непрерывное представление унитарными операторами.

ЗАДАЧА РАСШИРЕНИЯ. Предположим, что соотношение (1.4) выполняется для некоторого симметричного оператора $\dot{A}$. Требуется классифицировать все максимально диссипативные, в частности самосопряженные (если таковые существуют), решения A полувейлевых коммутационных соотношений

$$U_t A U_t^* = g_t(A) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(A), \quad (1.5)$$

которые являются расширениями $\dot{A}$ такими, что $\dot{A} \subset A \subset (\dot{A})^*$.

Воспользуемся тем, что любая однопараметрическая подгруппа аффинной группы имеет вид либо

$$g_t(x) = x + vt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{для некоторого} \quad v \in \mathbb{R} \quad (v \neq 0), \quad (1.6)$$

либо

$$g_t(x) = a^t(x - \gamma) + \gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{для некоторого} \quad 0 < a \neq 1 \quad \text{и} \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Формальное дифференцирование равенства (1.5) дает коммутационные соотношения для генераторов B и A унитарной группы $U_t = e^{itB}$ и полугруппы сжимающих отображений $V_s = e^{isA}$, $s \geq 0$, соответственно. Эти соотношения имеют вид

$$[A, B] = ivI \quad (1.8)$$

в случае подгруппы трансляций g_t (1.6) и

$$[A, B] = i\lambda A - i\mu I, \quad \lambda = \ln a, \quad \mu = \gamma \ln a, \quad (1.9)$$

в случае подгруппы g_t , заданной в (1.7). Здесь $[A, B]$ – коммутатор, $[A, B] = AB - BA$ на $\text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B)$.

Проведем замену переменных: пусть $X = A$, $Y = B$, $Z = ivI$ в первом случае и $X = A - \gamma I$, $Y = (1/i\lambda)B$ во втором случае. Мы получаем следующие коммутационные соотношения:

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0 \quad \text{и} \quad [X, Y] = X \quad (1.10)$$

соответственно. Таким образом, решение полувеилевых коммутационных соотношений (1.5) можно рассматривать как несамосопряженное квантование трех- и двумерных алгебр Ли соответственно. Альтернативный подход к квантованию алгебр Ли малой размерности и их функциональных моделей можно найти в работе [6].

В настоящей статье мы решаем значительно более общую задачу расширения. Конкретнее, мы предполагаем, что $G \ni g \mapsto U_g$ является унитарным представлением произвольной подгруппы аффинной группы $\mathcal{G}$, т. е. группы аффинных отображений действительной прямой, сохраняющих ориентацию. Мы также предполагаем, что $\dot{A}$ – симметричный оператор с плотной областью определения, удовлетворяющий полувеилевым соотношениям

$$U_g \dot{A} U_g^* = g(\dot{A}) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(\dot{A}), \quad g \in G. \quad (1.11)$$

Такие операторы $\dot{A}$ мы будем называть G -инвариантными (относительно унитарного представления $G \ni g \mapsto U_g$ группы G).

Отметим, что взаимосвязь между G -инвариантными ограниченными операторами (относительно группы дробно-линейных отображений и группы Лоренца) изучалась в [7], [8] (см. главу 10), [9].

Перечислим главные результаты настоящей статьи.

Показано, что в полуограниченном случае, т. е. в случае полуограниченного оператора $\dot{A}$ в (1.4), задача расширения (1.5) всегда имеет решение, которое может быть задано G -инвариантными самосопряженными операторами. Если неотрицательный симметричный оператор является G -инвариантным относительно группы всех преобразований масштаба действительной прямой в себя ($g(x) = ax$, $a > 0$, $g \in G$), то расширения Фридрихса и Крейна–фон Неймана также являются G -инвариантными. Более того, если симметричный оператор имеет индексы дефекта $(1, 1)$, то эти расширения являются единственными G -инвариантными расширениями.

Для изучения общего случая мы рассматриваем поток отображений на множестве $\mathcal{V}$ сжимающих отображений из дефектного подпространства $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в дефектное подпространство $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$, которые получены с помощью унитарного представления $G \ni g \mapsto U_g$. Опираясь на этот анализ, мы показываем, что $\dot{A}$ допускает G -инвариантное максимально диссипативное расширение тогда и только тогда, когда данный поток имеет неподвижную точку.

В случае конечных индексов дефекта мы применяем теорему Шаудера о неподвижной точке и показываем, что задача расширения (1.5) всегда имеет решение в пространстве максимально диссипативных операторов. Кроме того, если индексы равны друг другу, поток, ограниченный на множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ всех изометрий из

$\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$, оставляет это множество инвариантным. В данном случае поиск G -инвариантных самосопряженных решений задачи расширения сводится к поиску одной из неподвижных точек ограниченного потока. Мы хотели бы отметить, что в случае оператора $\dot{A}$, не являющегося полуограниченным, самосопряженные G -инвариантные расширения оператора $\dot{A}$ могут в общем случае не существовать, даже если индексы дефекта этого оператора равны друг другу и конечны.

Особое внимание уделено случаю индексов дефекта, равных $(1, 1)$. В частности, мы показываем, что если G – однопараметрическая непрерывная подгруппа аффинной группы, то задача расширения всегда имеет самосопряженное аффинно-инвариантное решение, если не относительно всей группы G , то, по крайней мере, относительно дискретной подгруппы группы G . Данный феномен (см. замечание 7.1) можно считать абстрактным теоретико-операторным аналогом “катастрофы” падения частицы на центр в квантовой механике [10]. Обсуждение топологического происхождения данного эффекта см. в замечании 6.2. В связи с этим эффектом мы также ссылаемся на статью [11] и монографию [12], где приведено подробное обсуждение эффекта Ефимова для системы трех тел, и на работу [13], где было обнаружено явление распада системы из трех тел с точечным взаимодействием (см. также работу [14] и ссылки в ней).

2. G -ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Далее в статье $\mathcal{G}$ обозначает “ $(ax + b)$ ”-группу, которая является некоммутативной группой невырожденных аффинных отображений (относительно композиции отображений) действительной прямой, сохраняющих ориентацию.

Напомним, что группа $\mathcal{G}$ содержит линейные отображения действительной прямой в композиции с трансляциями:

$$x \mapsto g(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$.

Введем понятие унитарно аффинно-инвариантного оператора. Пусть G – подгруппа в $\mathcal{G}$. Более того, предположим, что $G \ni g \mapsto U_g$ является унитарным представлением группы G на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$,

$$U_f U_g = U_{fg}, \quad f, g \in G.$$

Если G – непрерывная группа, предположим, что представление $G \ni g \mapsto U_g$ является сильно непрерывным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Замкнутый оператор с плотной областью определения A называется *унитарно аффинно-инвариантным* или, более точно, *G -инвариантным относительно унитарного представления $G \ni g \mapsto U_g$* , если $U_g(\text{Dom}(A)) = \text{Dom}(A)$ для всех $g \in G$ и

$$U_g A U_g^* = g(A) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(A). \quad (2.2)$$

Заметим, что операторное равенство (2.2) нужно понимать в том смысле, что

$$U_g A U_g^* f = g(A) f = a A f + b f \quad \text{для всех } f \in \text{Dom}(A), \quad (2.3)$$

когда отображение $g \in G$ имеет вид $x \mapsto g(x) = ax + b$.

Случай однопараметрических непрерывных подгрупп аффинной группы заслуживает отдельного обсуждения. Напомним, что если g_t является однопараметрической подгруппой аффинной группы, то группа $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ либо состоит из аффинных отображений действительной прямой $\mathbb{R}$ вида

$$g_t(x) = x + vt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

для некоторого $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$, либо

$$g_t(x) = a^t(x - \gamma) + \gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

для некоторых $a > 0$, $a \neq 1$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ (см. монографию [15]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае (2.5) в отличие от (2.4) все отображения g_t , $t \in \mathbb{R}$, имеют конечную неподвижную точку: $g_t(\gamma) = \gamma$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Понятие G -инвариантных самосопряженных операторов в случае группы трансляций $g_t(x) = x + t$ возникает естественным образом в связи с каноническими коммутационными соотношениями в форме Вейля.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – однопараметрическая непрерывная подгруппа аффинных преобразований

$$g_t(x) = x + t. \quad (2.6)$$

Предположим, что A – самосопряженный оператор, G -инвариантный относительно сильно непрерывного унитарного представления $t \mapsto U_t$, в сепарабельном гильбертовом пространстве. Это означает, что

$$U_t A U_t^* = A + tI \quad \text{на } \text{Dom}(A).$$

Тогда унитарная группа U_t и унитарная группа V_s , заданная генератором A как $V_s = e^{iAs}$, $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяют коммутационным соотношениям Вейля

$$U_t V_s = e^{ist} V_s U_t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Обратное также верно: если две сильно непрерывные унитарные группы U_t и V_s удовлетворяют соотношениям Вейля (2.7), то генератор A группы V_s G -инвариантен относительно группы сдвига (2.6) и ее унитарного представления $g_t \mapsto U_t$.

Для доказательства данного результата мы ссылаемся на книгу [2] (см. главу II, раздел 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Согласно утверждению Стоуна–фон Неймана [4] о единственности, инвариантный относительно сдвига самосопряженный оператор A и генератор B унитарной группы U_t унитарно эквивалентны конечной или бесконечной прямой сумме операторов импульса и координаты представления Шредингера:

$$(A, B) \approx \bigoplus_{n=1}^{\ell} (P, Q), \quad \ell = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\begin{aligned} (Pf)(x) &= i \frac{d}{dx} f(x), & \text{Dom}(P) &= W_2^1(\mathbb{R}), \\ (Qf)(x) &= xf(x), & \text{Dom}(Q) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})\}, \end{aligned}$$

суть операторы импульса и координаты соответственно.

Теорема 2.1 допускает обобщение на случай произвольных непрерывных однопараметрических аффинных подгрупп.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – однопараметрическая непрерывная подгруппа аффинной группы $\mathcal{G}$. Предположим, что A – самосопряженный оператор, G -инвариантный относительно сильно непрерывного унитарного представления $G \ni g_t \mapsto U_t$, в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда унитарная группа U_t и унитарная группа V_s с генератором A , заданная как $V_s = e^{iAs}$, $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяют обобщенным коммутационным соотношениям Вейля

$$U_t V_s = e^{i s g_t(0)} V_{g'_t(0)s} U_t, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

где

$$g'_t(0) = \left. \frac{d}{dx} g_t(x) \right|_{x=0}.$$

Обратное также верно: если две сильно непрерывные унитарные группы U_t и V_s удовлетворяют обобщенным соотношениям Вейля (2.8), то генератор A группы V_s является G -инвариантным относительно однопараметрической непрерывной группы $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ и ее унитарного представления $G \ni g_t \mapsto U_t$.

Легко видеть, что если $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является группой трансляций, $g_t(x) = x + t$, то коммутационные соотношения (2.8) превращаются в обычные коммутационные соотношения Вейля (2.7). Действительно, в этом случае $g_t(0) = t$ и $g'_t(0) = 1$, поэтому равенство (2.8) сводится к (2.7).

За дальнейшим обобщением результата Стоуна–фон Неймана мы отсылаем читателя к статье [16].

Вместе с коммутационными соотношениями Вейля (2.8) также появляются обобщенные редуцированные коммутационные соотношения Вейля (2.8),

$$U_t V_s = e^{i s g_t(0)} V_{g'_t(0)s} U_t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0,$$

в которые входят сильно непрерывная унитарная группа U_t и сильно непрерывная сжимающая полугруппа V_s , $s \geq 0$ (см. труды [17]–[25], где обсуждается понятие редуцированных коммутационных соотношений Вейля в случае группы аффинных трансляций).

Следующий результат, который является прямым обобщением теоремы 2.2 на случай максимально диссипативных G -инвариантных генераторов, позволяет найти неунитарные решения редуцированных обобщенных коммутационных соотношений Вейля (см. п. 7.3 и 7.7, где приведены несколько примеров подобных решений).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является однопараметрической непрерывной подгруппой аффинной группы $\mathcal{G}$. Предположим, что A – максимально диссипативный оператор, G -инвариантный относительно унитарного представления $G \ni g_t \mapsto U_t$, в гильбертовом пространстве. Тогда сильно непрерывная унитарная группа U_t и сильно непрерывная сжимающая полугруппа $V_s = e^{iAs}$, $s \geq 0$, с генератором A удовлетворяют редуцированным обобщенным коммутационным соотношениям Вейля

$$U_t V_s = e^{isg_t(0)} V_{g'_t(0)s} U_t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0, \quad (2.9)$$

где

$$g'_t(0) = \left. \frac{d}{dx} g_t(x) \right|_{x=0}.$$

Также верно обратное: если сильно непрерывная унитарная группа U_t и сильно непрерывная сжимающая полугруппа V_s , $s \geq 0$, удовлетворяют обобщенным редуцированным коммутационным соотношениям Вейля (2.9), то генератор A полугруппы V_s является G -инвариантным относительно однопараметрической непрерывной группы $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ и ее унитарного представления $g_t \mapsto U_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f \in \text{Dom}(A)$. Тогда (см., к примеру, теорему 1.3 в [26])

$$V_s f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{i\lambda s} (A - \lambda I)^{-1} f d\lambda, \quad s \geq 0,$$

где Γ – контур в нижней полуплоскости, параллельный действительной оси, а интеграл понимается в смысле главного значения. Так как A является G -инвариантным оператором, легко убедиться, что

$$U_t (A - \lambda I)^{-1} f = g'_{-t}(\lambda) (A - g_{-t}(\lambda) I)^{-1} U_t f,$$

откуда (с помощью несложной замены переменных) получаем

$$\begin{aligned} U_t V_s f &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{i\lambda s} U_t (A - \lambda I)^{-1} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{i\lambda s} g'_{-t}(\lambda) (A - g_{-t}(\lambda) I)^{-1} U_t f d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{ig_t(\lambda)s} (A - \lambda I)^{-1} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{i(g'_t(0)\lambda + g_t(0))s} (A - \lambda I)^{-1} f d\lambda = \\ &= e^{isg_t(0)} V_{g'_t(0)s} U_t f, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Gamma' = g_{-t}(\Gamma)$ – контур в нижней полуплоскости.

Итак, соотношение (2.10) показывает, что представление (2.9), понимаемое в сильном смысле, выполняется на плотном множестве $\text{Dom}(A)$. Принимая во внимание, что операторы U_t , $t \in \mathbb{R}$, и V_s , $s \geq 0$, являются ограниченными, можно продолжить равенство (2.10) с плотного множества на все гильбертово пространство, что завершает доказательство прямого утверждения теоремы.

Обратное утверждение следует из дифференцирования коммутационных соотношений.

3. G -ИНВАРИАНТНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЗАДАЧА РАСШИРЕНИЯ

Поиск самосопряженных или, в более общем случае, максимально диссипативных операторов можно осуществить, решая следующую задачу расширения. Пусть дан симметричный G -инвариантный оператор, необходимо найти все его максимально диссипативные G -инвариантные расширения. Следует отметить, что поиск самосопряженной реализации симметричного оператора возможен только в случае равных индексов дефекта.

Мы начнем со следующего элементарного наблюдения.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\dot{A}$ является G -инвариантным симметричным оператором. Предположим, что A – максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$. Тогда ограничение A_g сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на $D_g = U_g(\text{Dom}(A))$,

$$A_g = (\dot{A})^*|_{D_g}, \quad (3.1)$$

есть максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того что оператор $\dot{A}$ G -инвариантен, $U_g A U_g^*$, $g \in G$, является максимально диссипативным расширением оператора $g(\dot{A})$, следовательно, $g^{-1}(U_g A U_g^*)$ – максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$. Поскольку

$$\text{Dom}(g^{-1}(U_g A U_g^*)) = \text{Dom}(U_g A U_g^*) = U_g(\text{Dom}(A)),$$

заключаем, что ограничение A_g , заданное формулой (3.1), является максимально диссипативным оператором. Лемма доказана.

Напомним, что множество максимально диссипативных расширений $\dot{A}$ находится во взаимно однозначном соответствии со множеством $\mathcal{V}$ сжимающих отображений из дефектного подпространства $\mathcal{N}_+ = \text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в дефектное подпространство $\mathcal{N}_- = \text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$. Заметим, что $\mathcal{V}$ – единичный шар операторов в банаховом пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\dot{A}$ – замкнутый симметричный оператор, $V \in \mathcal{V}$ – сжимающее отображение из $\mathcal{N}_+$ в $\mathcal{N}_-$. Тогда ограничение A сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на множество

$$\text{Dom}(A) = \text{Dom}(\dot{A}) \dot{+} (I - V) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI) \quad (3.2)$$

есть максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$. Более того, область определения любого максимально диссипативного расширения A оператора $\dot{A}$ такова, что $\dot{A} \subset A \subset (\dot{A})^*$, допускает разложение вида (3.2), где V – ограничение преобразования Кэли $(A - iI)(A + iI)^{-1}$ на дефектное подпространство $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если у оператора $\dot{A}$ равные индексы дефекта, а V является изометрическим отображением из $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$, то формула (3.2), также известная как формула фон Неймана, дает параметрическое описание всех самосопряженных расширений симметричного оператора $\dot{A}$. Обобщение формулы фон Неймана на случай диссипативных операторов можно найти в работах [27], [28] (также см. теорему 4.1.9 в книге [29]).

4. ПОТОК НА МНОЖЕСТВЕ $\mathcal{V}$

Пусть дан симметричный G -инвариантный оператор $\dot{A}$. Формула фон Неймана (3.2) из предложения 3.1 определяет поток преобразований на множестве сжимающих отображений $V \in \mathcal{V}$. Более точно, отображение $G \ni g \mapsto A_g$, где оператор A_g задан в (3.1), допускает естественное “поднятие” до действия группы G на операторном единичном шаре $\mathcal{V}$.

Для того чтобы более подробно описать действие группы G на $\mathcal{V}$, предположим, что $V \in \mathcal{V}$, а A – единственное максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$ такое, что

$$\text{Dom}(A) = \text{Dom}(\dot{A}) \dot{+} (I - V) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI). \quad (4.1)$$

Определим расширение A_g , как в (3.1), выражением $A_g = (\dot{A})^*|_{U_g(\text{Dom}(A))}$. Пусть также в соответствии с леммой 3.1 и предложением 3.1 сжимающее отображение $V_g \in \mathcal{V}$ таково, что

$$\text{Dom}(A_g) = \text{Dom}(\dot{A}) \dot{+} (I - V_g) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI), \quad g \in G. \quad (4.2)$$

Введем действие группы G на множестве сжимающих отображений $\mathcal{V}$ следующим образом:

$$\Gamma_g(V) = V_g, \quad g \in G. \quad (4.3)$$

Отсюда вытекает, что $\Gamma_{f \cdot g} = \Gamma_f \circ \Gamma_g$ для $f, g \in G$, следовательно,

$$\varphi(f \cdot g, V) = \varphi(f, \varphi(g, V)), \quad f, g \in G, \quad V \in \mathcal{V}, \quad (4.4)$$

где

$$\varphi(g, V) = \Gamma_g(V). \quad (4.5)$$

Очевидно, максимально диссипативное расширение A , заданное равенством (4.1), является G -инвариантным тогда и только тогда, когда $V \in \mathcal{V}$ есть неподвижная точка потока $G \ni g \mapsto \Gamma_g$. Это означает, что

$$\Gamma_g(V) = V \quad \text{для всех} \quad g \in G. \quad (4.6)$$

Таким образом, множество максимально диссипативных расширений оператора $\dot{A}$ находится во взаимно однозначном соответствии со множеством всех неподвижных точек потока Γ_g , следовательно, поиск всех G -инвариантных максимально диссипативных расширений $\dot{A}$ сводится к поиску неподвижных точек потока (4.3). Если к тому же симметричный оператор $\dot{A}$ обладает равными индексами дефекта, ограничение потока Γ_g на множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ всех изометрических отображений из дефектного подпространства $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в дефектное подпространство $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$ оставляет множество $\mathcal{U}$ инвариантным. В свою очередь, множество всех самосопряженных расширений оператора $\dot{A}$ находится во взаимно однозначном соответствии со множеством неподвижных точек потока $\Gamma_g|_{\mathcal{U}}$.

Следующий технический результат позволяет выписать формулу для отображения Γ_g , $g \in \mathcal{G}$, операторного единичного шара $\mathcal{V}$ в себя.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $\dot{A}$ является G -инвариантным замкнутым оператором с плотной областью определения, а Γ_g , $g \in G$, есть поток, заданный соотношениями (4.1) и (4.3). Тогда*

$$\Gamma_g(V) = -[P_- U_g(\gamma I - \delta V)][P_+ U_g(\alpha I - \beta V)]^{-1}, \quad (4.7)$$

где через $P_{\pm}$ обозначены ортогональные проекторы на $\text{Ker}((\dot{A})^* \mp iI)$ и

$$\alpha = g^{-1}(i) + i, \quad \beta = g^{-1}(-i) + i, \quad \gamma = g^{-1}(i) - i, \quad \delta = g^{-1}(-i) - i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in \mathcal{V}$; обозначим через A максимально диссипативный оператор, полученный ограничением сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на область

$$\text{Dom}(A) = \text{Dom}(\dot{A}) \dot{+} (I - V) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI).$$

Таким образом, каждый элемент $f \in D(A)$ допускает разложение

$$f = f_0 \dot{+} h - Vh, \quad f_0 \in D(\dot{A}), \quad h \in \text{Ker}((\dot{A})^* - iI), \quad Vh \in \text{Ker}((\dot{A})^* + iI). \quad (4.8)$$

Согласно определению отображения Γ_g мы имеем $\Gamma_g(V) \in \mathcal{V}$, область определения оператора A_g , заданного как (ср. с (3.1)) $A_g = (\dot{A})^*|_{U_g(\text{Dom}(A))}$, принимает вид

$$\text{Dom}(A_g) = \text{Dom}(\dot{A}) \dot{+} (I - \Gamma_g(V)) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI). \quad (4.9)$$

Предположим, что $f \in D(A)$ и выполнено разложение (4.8). Принимая во внимание, что

$$U_g f \in \text{Dom}(U_g A U_g^*) = \text{Dom}(A_g),$$

из (4.9) получаем, что

$$U_g f = U_g f_0 + U_g h - U_g Vh = k_0 + m - \Gamma_g(V)m \quad (4.10)$$

для некоторого $k_0 \in D(\dot{A})$ и некоторого $m \in \text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$. Тогда

$$m - \Gamma_g(V)m = U_g h - U_g Vh + \ell_0, \quad (4.11)$$

где $\ell_0 = U_g f_0 - k_0 \in D(\dot{A})$. Применяя оператор $(\dot{A})^* + iI$ к обеим частям равенства (4.11), получаем

$$2im = ((\dot{A})^* + iI)U_g h - ((\dot{A})^* + iI)U_g Vh + (\dot{A} + iI)\ell_0. \quad (4.12)$$

Здесь мы использовали тот факт, что $m \in \text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ и $\Gamma_g(V)m \in \text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$. Так как согласно условию теоремы оператор $\dot{A}$ является G -инвариантным, сопряженный оператор $(\dot{A})^*$ также G -инвариантен. Получаем

$$((\dot{A})^* + iI)U_g h = U_g(g^{-1}((\dot{A})^* + iI))h = (g^{-1}(i) + i)U_g h. \quad (4.13)$$

Аналогично получаем

$$((\dot{A})^* + iI)U_g Vh = (g^{-1}(-i) + i)U_g Vh. \quad (4.14)$$

Применяя формулы (4.12)–(4.14), получаем выражение

$$2im = (g^{-1}(i) + i)U_g h - (g^{-1}(-i) + i)U_g Vh + (\dot{A} + iI)\ell_0. \quad (4.15)$$

Операторы $P_{\pm}$ являются ортогональными проекторами на $\text{Ker}((\dot{A})^* \mp iI)$. Из соотношения (4.15) следует, что

$$2im = P_+ U_g ((g^{-1}(i) + i)h - (g^{-1}(-i) + i)Vh). \quad (4.16)$$

Применяя оператор $(\dot{A})^* - iI$ к обеим частям (4.11), полностью аналогичным образом приходим к равенству

$$-2i\Gamma_g(V)m = P_- U_g ((g^{-1}(i) - i)h - (g^{-1}(-i) - i)Vh). \quad (4.17)$$

Комбинируя формулы (4.16) и (4.17), получаем равенство

$$-\Gamma_g(V)P_+ U_g (\alpha h - \beta Vh) = P_- U_g (\gamma h - \delta Vh), \quad (4.18)$$

где

$$\alpha = g^{-1}(i) + i, \quad \beta = g^{-1}(-i) + i, \quad \gamma = g^{-1}(i) - i, \quad \delta = g^{-1}(-i) - i.$$

Поскольку $U_g(\text{Dom}(A)) = \text{Dom}(U_g A U_g^*)$, из соотношений (4.10) и (4.16) следует, что оператор $P_+ U_g (\alpha I - \beta V)$ отображает дефектное подпространство $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в себя. Более того, ядро $P_+ U_g (\alpha I - \beta V)$ тривиально. Действительно, пусть

$$P_+ U_g (\alpha I - \beta V)h = 0$$

для некоторого $h \in \text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$. Определим m , как было сказано выше (см. формулу (4.10)). Из (4.16) следует, что $m = 0$. Таким образом, возвращаясь к равенству (4.10), заключаем, что $U_g (\alpha I - \beta V)h \in \text{Dom}(\dot{A})$. Поскольку оператор $\dot{A}$ является G -инвариантным, получаем, что $(\alpha I - \beta V)h \in \text{Dom}(\dot{A})$, а это возможно,

лишь когда $h = 0$ (α всегда отлично от нуля). Из теоремы о замкнутом графике следует, что ограниченное отображение $P_+U_g(\alpha I - \beta V)$ из дефектного подпространства $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в себя имеет ограниченное обратное отображение, таким образом, из (4.18) следует, что

$$\Gamma_g(V) = -[P_-U_g(\gamma I - \delta V)][P_+U_g(\alpha I - \beta V)]^{-1},$$

и это завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть G – непрерывная подгруппа аффинной группы $\mathcal{G}$. Предположим дополнительно, что $\dot{A}$ есть G -инвариантный замкнутый симметричный оператор с конечными индексами дефекта. Тогда отображение $(g, V) \mapsto \Gamma_g(V)$ из $G \times \mathcal{V}$ в $\mathcal{V}$ является непрерывным. В частности, если $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – непрерывная однопараметрическая подгруппа аффинной группы $\mathcal{G}$, то для любого $V \in \mathcal{V}$ график $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Gamma_{g_t}(V)$ является непрерывным.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Чтобы корректно использовать термин “поток” в наших общих рассуждениях, напомним, что поток на замкнутом ориентированном многообразии $\mathcal{M}$ – это однопараметрическая группа гомоморфизмов многообразия $\mathcal{M}$. Таким образом, поток является функцией

$$\varphi: \mathbb{R} \times \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M},$$

причем эта функция непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x)), \quad \varphi(0, x) = x$$

для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{M}$. Если $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – непрерывная однопараметрическая группа аффинных преобразований и индексы дефекта оператора $\dot{A}$ конечны, то согласно следствию 4.1 равенство (4.5) определяет поток в стандартном понимании на n -мерном многообразии $\mathcal{V}$, где

$$n = \dim(\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)) \cdot \dim(\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)).$$

5. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

Основной результат данного раздела – несколько теорем о неподвижных точках для потока Γ_g , заданного с помощью соотношения (4.3) на операторном единичном шаре $\mathcal{V}$, описанном в предыдущем разделе.

Мы начнем с того, что напомним теорему о неподвижной точке, доказанную в работе [30]. Данная теорема позволяет решить задачу о существовании неподвижных точек потока (4.3) в случае, когда симметричный оператор $\dot{A}$ является полуограниченным. Для того чтобы сформулировать необходимый результат, нам понадобятся несколько вводных фактов.

Напомним, что если $\dot{A}$ – положительный (замкнутый) оператором с плотной областью определения, то множество всех положительных самосопряженных расширений оператора $\dot{A}$ имеет минимальный элемент A_{KN} (расширение Крейна–фон Неймана) и максимальный элемент A_{F} (расширение Фридрихса). Таким образом, для

любого положительного самосопряженного расширения $\tilde{A}$ выполняется следующее двустороннее операторное неравенство [31]

$$(A_F + \lambda I)^{-1} \leq (\tilde{A} + \lambda I)^{-1} \leq (A_{KN} + \lambda I)^{-1} \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Для удобства читателя напомним следующие фундаментальные результаты, относящиеся к расширениям Фридрихса и Крейна–фон Неймана [32].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\dot{A}$ – замкнутый положительный симметричный оператор с плотной областью определения. Обозначим через $\mathbf{a}$ замыкание квадратичной формы

$$\mathbf{a}[f] = (\dot{A}f, f), \quad \text{Dom}[\mathbf{a}] = \text{Dom}(\dot{A}). \quad (5.1)$$

Тогда расширение Фридрихса A_F совпадает с ограничением сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на область $\text{Dom}(A_F) = \text{Dom}((\dot{A})^*) \cap \text{Dom}[\mathbf{a}]$. Расширение Крейна–фон Неймана A_{KN} совпадает с ограничением сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на область $\text{Dom}(A_{KN})$, представляющую собой множество элементов f , для которых существует последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \text{Dom}(\dot{A})$, такая, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbf{a}[f_n - f_m] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{A}f_n = (\dot{A})^*f.$$

Теперь мы готовы сформулировать вышеупомянутую теорему о неподвижной точке для случая полуограниченного симметричного G -инвариантного оператора.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть G – подгруппа аффинной группы $\mathcal{G}$. Пусть $\dot{A}$ – замкнутый симметричный оператор с плотной областью определения, полуограниченный снизу с точной нижней гранью γ . Тогда расширение Фридрихса A_F оператора $\dot{A}$ и расширение $A_K = (\dot{A} - \gamma I)_{KN} + \gamma I$, где $(\dot{A} - \gamma I)_{KN}$ обозначает расширение Крейна–фон Неймана положительного симметричного оператора $\dot{A} - \gamma I$, являются G -инвариантными.

Мы приводим краткое доказательство, идея которого принадлежит Геральду Тешлу (см. статью [30], где приведены исходные рассуждения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\dot{A}$ G -инвариантен относительно унитарного представления $G \ni g \mapsto U_g$. Обозначим через $\mathcal{I}$ операторный интервал самосопряженных расширений для $\dot{A}$ с точной нижней гранью, большей или равной γ . Напомним, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполняется операторное неравенство $A_K \leq A \leq A_F$. Поскольку симметричный оператор $\dot{A}$ является G -инвариантным, соответствие

$$A \mapsto g^{-1}(U_g A U_g^*), \quad g(x) = ax + b,$$

где A – самосопряженное расширение оператора $\dot{A}$, отображает операторный интервал $\mathcal{I} = [A_K, A_F]$ на себя. Более того, данное отображение монотонно в операторном смысле, т. е. сохраняет порядок. Таким образом, концы A_K и A_F операторного интервала $\mathcal{I}$ являются неподвижными точками отображения, что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Следует отметить, что в условиях теоремы 5.1 точная нижняя грань γ всегда является неподвижной точкой для любого преобразования из группы G . Таким образом, предположение о том, что оператор $\dot{A}$ полуограничен, ведет к значительной потере общности. В частности, из данного предположения следует, что группа G обязательно должна быть собственной подгруппой аффинной группы $\mathcal{G}$. К примеру, группа G не содержит преобразования $g(x) = x + b$, $b \neq 0$, без (конечных) неподвижных точек.

Мы утверждаем, что (при некоторых предположениях) для конечных индексов дефекта оператора $\dot{A}$ поток (4.3) всегда имеет неподвижную точку. Из этого следует, что любой G -инвариантный симметричный оператор с конечными индексами дефекта имеет либо самосопряженное, либо максимально диссипативное G -инвариантное расширение $\dot{A}$ (ср. с теоремой 15 в работе [20]).

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть G – циклическая или однопараметрическая непрерывная подгруппа аффинных отображений действительной прямой в себя с сохранением ориентации. Предположим, что $G \ni g \mapsto U_g$ является унитарным представлением в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Также предположим, что $\dot{A}$ – замкнутый симметричный G -инвариантный оператор с конечными индексами дефекта. Тогда оператор $\dot{A}$ допускает G -инвариантное максимально диссипативное расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $g \in G$ отображение $\Gamma_g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ является непрерывным отображением единичного шара $\mathcal{V}$ в себя. Поскольку индексы дефекта оператора $\dot{A}$ конечны, шар $\mathcal{V}$ есть компактное выпуклое множество, следовательно, по теореме Шаудера о неподвижной точке (см., например, монографию [33]) отображение Γ_g имеет неподвижную точку $V \in \mathcal{V}$. Это означает, что $\Gamma_g(V) = V$. В частности, $\Gamma_{g^n}(V) = V$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, ограничение A сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на область $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(\dot{A}) + (I - V) \text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ является $G[g]$ -инвариантным оператором, где $G[g]$ – циклическая группа с генератором $g \in G$. Это завершает доказательство для случая циклической группы G .

В случае однопараметрической непрерывной подгруппы $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ отметим, что в силу первой части доказательства для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $V_n \in \mathcal{V}$ такой, что

$$\Gamma_{g_q}(V_n) = V_n \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}/n. \quad (5.2)$$

Поскольку по предположению оператор $\dot{A}$ обладает конечными индексами дефекта и, следовательно, единичный шар $\mathcal{V}$ компактен, можно найти элемент $V \in \mathcal{V}$ и подпоследовательность $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{n_k} = V. \quad (5.3)$$

Для заданного $t \in \mathbb{R}$ выберем последовательность рациональных чисел $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = t, \quad g_k \in \mathbb{Z}/n_k. \quad (5.4)$$

Применяя соотношения (5.2) и (5.3), получаем, что $\Gamma_{g_{q_k}}(V_{n_k}) = V_{n_k}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в этом равенстве, на основании (5.3) и (5.4) с применением следствия 4.1 заключаем, что $\Gamma_{g_t}(V) = V$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если у оператора $\dot{A}$ равные индексы дефекта и если неподвижная точка V есть изометрия из $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$, то соответствующее максимально диссипативное расширение является самосопряженным. Также необходимо отметить, что теорема 5.2 не гарантирует существование G -инвариантных самосопряженных расширений $\dot{A}$ в общем случае. Другими словами, ограниченный поток $\Gamma_g|_{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}$ – множество всех изометрий из $\text{Ker}((\dot{A})^* - iI)$ в $\text{Ker}((\dot{A})^* + iI)$, может не иметь неподвижных точек (см. раздел 7 для соответствующих примеров и замечание 7.1 для подробного обсуждения теоретико-группового убывания данных примеров).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Теорема 5.2 является простым следствием следующей теоремы Лефшеца о неподвижной точке для потоков на многообразиях (см., например, теорему 6.28 в монографии [34]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Если $\mathcal{M}$ – замкнутое ориентированное многообразие с ненулевой эйлеровой характеристикой $\chi(\mathcal{M})$, то любой поток на $\mathcal{M}$ имеет неподвижную точку.

Действительно, возьмем $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ и заметим, что $\mathcal{V}$ является замкнутым выпуклым множеством с $\chi(\mathcal{V}) \neq 0$.

6. СЛУЧАЙ ИНДЕКСОВ ДЕФЕКТА (1, 1)

В данном разделе мы представим несколько результатов для решения задачи расширения (1.5), характерных для индексов дефекта (1, 1), как в диссипативном, так и в самосопряженном случаях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6.1. Будем считать, что G – подгруппа аффинной группы $\mathcal{G}$ и $\dot{A}$ является G -инвариантным замкнутым симметричным оператором с индексами дефекта (1, 1).

При выполнении этих предположений на основе результатов предложения 3.1 и леммы 4.1 можно отождествить поток $G \ni g \mapsto \Gamma_g$ с представлением группы G в группе $\text{Aut}(\mathbb{D})$ автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D}$ (которая состоит из дробно-линейных преобразований $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ для некоторых $|a| < 1$ и $\theta \in \mathbb{R}$, отображающих единичную окружность $\mathbb{T}$ в себя).

Напомним следующий элементарный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Любой автоморфизм Γ (замкнутого) единичного круга $\mathbb{D}$, отличный от тождественного отображения, имеет по крайней мере две неподвижные точки в $\mathbb{D}$. Если Γ имеет ровно две неподвижные точки, то обе эти точки лежат на границе $\mathbb{T}$ круга $\mathbb{D}$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнено предположение 6.1. Пусть оператор $\dot{A}$ имеет:

1) по крайней мере три разных самосопряженных G -инвариантных расширения или

2) по крайней мере два G -инвариантных максимально диссипативных расширения, одно из которых не является самосопряженным.

Тогда любое максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$ является G -инвариантным. Более того, в этом случае, если группа G нетривиальна, оператор $\dot{A}$ не является полуограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1 для любого $g \in G$ автоморфизм Γ_g единичного круга $\mathbb{D}$ имеет по крайней мере три разные неподвижные точки. Следовательно, в силу предложения 6.1 Γ_g является тождественным отображением на $\mathbb{D}$, в результате любое максимально диссипативное расширение A оператора $\dot{A}$ такое, что $\dot{A} \subset A \subset (\dot{A})^*$, является G -инвариантным.

В случае 2 для любого $g \in G$ автоморфизм Γ_g имеет по крайней мере две неподвижные точки, одна из которых не лежит на границе единичного круга, следовательно, вновь в силу предложения 6.1 автоморфизм Γ_g , $g \in G$, есть тождественное отображение, и это доказывает тот факт, что любое максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$ является G -инвариантным.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, предположим обратное: допустим, что $\dot{A}$ – полуограниченный симметричный оператор. Положим для большей определенности, что $\dot{A}$ полуограничен снизу.

Пусть существует точка $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ слева от точной нижней грани оператора $\dot{A}$ такая, что множество $\Sigma = \bigcup_{g \in G} g(\lambda_0)$ неограничено снизу,

$$\inf \Sigma = -\infty. \quad (6.1)$$

По теореме Крейна (см. теорему 23 в [31]) существует самосопряженное расширение A симметричного оператора $\dot{A}$ такое, что λ_0 – простое собственное значение расширения A . Поскольку любое максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$ является G -инвариантным, самосопряженный оператор A также G -инвариантен. Спектр G -инвариантного оператора есть G -инвариантное множество, отсюда можно заключить, что множество Σ принадлежит чисто дискретному спектру оператора A , следовательно, A не является полуограниченным снизу в силу (6.1). Последнее невозможно: любое самосопряженное расширение полуограниченного самосопряженного оператора с конечными индексами дефекта полуограничено снизу.

Для того чтобы корректно выбрать λ_0 в соответствии со свойством (6.1), можно привести следующие аргументы.

По предположению группа G нетривиальна, поэтому G содержит преобразование g либо вида $g(x) = x + b$ для некоторого $b \neq 0$, либо $g(x) = a(x - \gamma) + \gamma$ для некоторых $a > 0$, $a \neq 1$, и $\gamma \in \mathbb{R}$. В первом случае множество Σ содержит орбиту $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_0 + nb\}$, тогда можно выбрать любое значение λ_0 слева от точной нижней грани оператора $\dot{A}$, и оно будет удовлетворять требованию (6.1). Во втором случае

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{a^n(\lambda_0 - \gamma) + \gamma\} \subset \bigcup_{g \in G} g(\lambda_0) = \Sigma.$$

Следовательно, можно выбрать любое $\lambda_0 < \gamma$ слева от точной нижней грани оператора $\dot{A}$, чтобы условие (6.1) выполнялось.

Наш следующий результат демонстрирует, что полуограниченный G -инвариантный симметричный оператор с индексами дефекта $(1, 1)$ обладает только самосопряженными G -инвариантными расширениями.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть выполнено предположение 6.1. Предположим также, что $\dot{A}$ полуограничен снизу. Если A – максимально диссипативное G -инвариантное расширение оператора $\dot{A}$, то A с необходимостью является самосопряженным. Более того, $A = A_F$ или $A = A_K$, где операторы A_F и A_K заданы в теореме 5.1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что A , для которого $\dot{A} \subset A \subset (\dot{A})^*$, является G -инвариантным максимально диссипативным расширением для $\dot{A}$, отличным от A_F и A_K .

Если $A_F \neq A_K$, то $\dot{A}$ имеет по крайней мере три разных G -инвариантных расширения. Таким образом, по теореме 6.1 оператор $\dot{A}$ не является полуограниченным снизу, что противоречит предположению. Следовательно, либо $A = A_F$, либо $A = A_K$.

Если расширения A_F и A_K совпадают, $A_F = A_K$, будем действовать следующим образом. По предположению $A \neq A_F = A_K$, а G -инвариантное максимально диссипативное расширение A обязательно является самосопряженным. Действительно, ведь иначе оператор $\dot{A}$ имеет по крайней мере два G -инвариантных максимально диссипативных расширения, A_F и A , причем одно из них не является самосопряженным. Применяя теорему 6.1, получаем, что симметричный оператор $\dot{A}$ не является полуограниченным, и это противоречит предположению. Таким образом, $A = A_F = A_K$.

Обозначим через $\tilde{\gamma}$ точную нижнюю грань оператора A . Поскольку $A_K = A_F$, точная нижняя грань $\tilde{\gamma}$ расширения A строго меньше, чем точная нижняя грань γ симметричного оператора $\dot{A}$. Индексы дефекта оператора $\dot{A}$ равны $(1, 1)$, поэтому $\tilde{\gamma}$ является собственным значением оператора A . Следуя схеме доказательства второго утверждения теоремы 6.1, заключаем, что орбита $\Sigma = \bigcup_{g \in G} g(\tilde{\gamma})$ принадлежит спектру G -инвариантного самосопряженного оператора A . Согласно замечанию 5.1 точная нижняя грань γ – неподвижная точка любого преобразования g из группы G ,

$$g(\gamma) = \gamma, \quad g \in G, \quad (6.2)$$

другими словами, $g(x) = a(x - \gamma) + \gamma$ для некоторого $a > 0$ (ср. с (2.5)). Поскольку $\tilde{\gamma} < \gamma$ и выполнено (6.2), также очевидно, что $\inf \Sigma = -\infty$. Таким образом, оператор A не является полуограниченным снизу, как и $\dot{A}$. Мы пришли к противоречию.

Следует напомнить, что с учетом замечания 5.2 результат о неподвижных точках, а именно теорема 5.2, в общем случае не гарантирует существование самосопряженных унитарно аффинно-инвариантных расширений симметричного инвариантного оператора. Тем не менее G -инвариантный симметричный оператор с индексами дефекта $(1, 1)$ всегда имеет аффинно-инвариантное самосопряженное расширение, если не относительно всей группы G , то, по крайней мере, относительно циклической подгруппы группы G при условии, что G – непрерывная однопараметрическая группа.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть выполнено предположение 6.1. Пусть $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – непрерывная однопараметрическая группой, а оператор $\dot{A}$ не имеет самосопряженных G -инвариантных расширений. Тогда существует дискретная циклическая подгруппа $G[g]$, генератором которой служит элемент $g \in G$, такая, что любое максимально диссипативное, в частности самосопряженное, расширение оператора $\dot{A}$ является $G[g]$ -инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in \mathbb{T}$ есть параметр фон Неймана на единичной окружности, а A_V – соответствующее самосопряженное расширение оператора $\dot{A}$. Введем непрерывный поток на границе $\mathbb{T}$ уравнением

$$\varphi(t, V) = \Gamma_{g_t}(V), \quad t \in \mathbb{R}, \quad g_t \in G. \quad (6.3)$$

Чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать, что отображение $t \mapsto \varphi(t, V)$ неинъективно для некоторого $V \in \mathbb{T}$. Действительно, если данное отображение неинъективно, то существуют два различных значения t_1 и t_2 параметра t такие, что $\varphi(t_1, V) = \varphi(t_2, V)$. Таким образом, V является неподвижной точкой преобразования $\varphi(t_2 - t_1, \cdot)$. Следовательно, $V = \varphi(n(t_2 - t_1), V)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, поэтому расширение $A[g] = A_V$ является $G[g]$ -инвариантным относительно дискретной подгруппы $G[g]$ с генератором $g = g_{t_1 - t_2}$. По предположению самосопряженный оператор $A[g]$ не является G -инвариантным (относительно всей подгруппы G), следовательно, V не может быть неподвижной точкой для всего семейства преобразований γ_t . В частности, орбита $S_V = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, V)$ является бесконечным множеством. Далее, если $W = \varphi(t, V) \in S_V$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$, то $\varphi(T, W) = \varphi(T + t, V) = \varphi(t, V) = W$, где

$$T = t_2 - t_1. \quad (6.4)$$

Таким образом, $\gamma_{nT}(W) = W$ для всех $W \in S_V$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, следовательно, соответствующие самосопряженные операторы A_W , $W \in S_V$, являются $G[g]$ -инвариантными. В результате, поскольку множество S_V бесконечно, оператор $\dot{A}$ имеет бесконечно много, тем самым как минимум три, различных $G[g]$ -инвариантных самосопряженных расширения. В силу теоремы 6.1 каждое максимально диссипативное расширение оператора $\dot{A}$ (полученное как ограничение оператора $(\dot{A})^*$) является $G[g]$ -инвариантным.

Для завершения доказательства осталось показать, что отображение $t \mapsto \varphi(t, V)$ неинъективно для некоторого $V \in \mathbb{T}$. Чтобы сделать это, предположим обратное: пусть отображение $t \mapsto \varphi(t, V)$ инъективно для всех $V \in \mathbb{T}$. Тогда по теореме Брауэра об инвариантности области [35] множество $S_V = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, V)$ является открытой дугой¹⁾. Таким образом, множество $\mathbb{T} = \bigcup_{V \in \mathbb{T}} S_V$ есть открытое покрытие. Поскольку $\mathbb{T}$ – компактное множество, выбирая конечное подпокрытие, $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1}^N S_{V_k}$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, мы получаем, что окружность $\mathbb{T}$ покрыта конечным числом открытых дуг, а потому некоторые из них должны пересекаться. Если это так, то граница $\mathbb{T}$ является траекторией некоторой точки $V_* \in \mathbb{T}$. Это означает, что $\mathbb{T} = S_{V_*}$, из чего следует, что отображение $t \mapsto \varphi(t, V_*)$ не является инъективным. Мы пришли к противоречию. Доказательство завершено.

¹⁾Мы признательны Н. Ю. Нецветаеву, который привлек наше внимание к этому факту.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из теорем 5.2 и 6.1 следует, что в условиях теоремы 6.3, т.е. если $\dot{A}$ не имеет G -инвариантных самосопряженных расширений, симметричный оператор $\dot{A}$ допускает единственное несамосопряженное максимально диссипативное G -инвариантное расширение A такое, что $\dot{A} \subset A \subset (\dot{A})^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Конкретные примеры (см. примеры 7.1 и 7.2) показывают, что наше предположение об отсутствии у $\dot{A}$ самосопряженных G -инвариантных расширений может быть выполнено. Соответственно, данное предположение влечет, что поток $\varphi(t, V) = \gamma_t(V)$ на границе $M = \mathbb{T}$, заданный формулой (6.3), не имеет неподвижных точек. Это неудивительно: эйлерова характеристика окружности $\mathbb{T}$ равна нулю, поэтому предложение 5.2 применить нельзя. Вместо этого данный поток периодичен с периодом T , заданным в (6.4), и, таким образом, $\varphi(T, \cdot) = \text{Id}_{\mathbb{T}}$. Из этого следует, что любая точка $V \in \mathbb{T}$ является неподвижной, $\varphi(nT, V) = V$ для $n \in \mathbb{Z}$.

7. ПРИМЕРЫ

В данном разделе мы приведем несколько примеров, которые иллюстрируют наши главные результаты. В частности, мы покажем, что даже в самых простых случаях редуцированные обычные или обобщенные коммутационные соотношения Вейля обладают рядом решений, не являющихся унитарно-эквивалентными.

ПРИМЕР 7.1. Пусть $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ есть однопараметрическая группа трансляций,

$$g_t(x) = x + t. \quad (7.1)$$

Пусть $\dot{A}$ – оператор дифференцирования в $L^2(0, \ell)$,

$$(\dot{A})f(x) = i \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(\dot{A}) = \{f \in W_2^1(0, \ell) \mid f(0) = f(\ell) = 0\}.$$

Широко известно (см., например, книгу [36]), что $\dot{A}$ имеет индексы дефекта $(1, 1)$. Более того, $\dot{A}$, очевидно, является G -инвариантным относительно группы унитарных преобразований, заданных соотношением

$$(U_t f)(x) = e^{ixt} f(x), \quad f \in L^2(0, \ell).$$

7.1. Сначала заметим, что симметричный G -инвариантный оператор $\dot{A}$ из примера 7.1 не допускает самосопряженных G -инвариантных расширений. Действительно, если A – самосопряженное расширение оператора $\dot{A}$, то существует число $\Theta \in [0, 2\pi)$ такое, что A совпадает с оператором дифференцирования на

$$\text{Dom}(A) = \{f \in W_2^1(0, \ell) \mid f(\ell) = e^{i\Theta} f(0)\}.$$

Таким образом, как показывают несложные вычисления, спектр оператора A дискретен и состоит из простых собственных значений, образующих арифметическую прогрессию:

$$\text{spec}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\Theta + 2\pi n}{\ell} \right\}. \quad (7.2)$$

Следовательно, спектр G -инвариантного оператора является G -инвариантным множеством: если λ – собственное значение оператора A , то для всех $t \in \mathbb{R}$ точка $g_t(\lambda) = \lambda + t$ также является собственным значением оператора A , а это невозможно в силу того, что гильбертово пространство, в котором мы работаем, сепарабельно. Таким образом, $\dot{A}$ не допускает G -инвариантных самосопряженных расширений.

Это наблюдение доказывает предположение из замечания 5.2 о том, что ограниченный поток $\Gamma_g|_{\mathcal{U}}$ может вовсе не иметь неподвижных точек даже в случае равных индексов дефекта.

7.2. Поскольку оператор $\dot{A}$ из примера 7.1 не имеет G -инвариантных самосопряженных расширений, наша общая теорема 5.2 о неподвижной точке утверждает, что существует максимально диссипативное G -инвариантное расширение. В свою очередь, теорема 6.1 показывает, что данное расширение единственно. Очевидно, что G -инвариантное расширение задается оператором дифференцирования с граничными условиями Дирихле на левом конце интервала,

$$(Af)(x) = i \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(A) = \{f \in W_2^1(0, \ell) \mid f(0) = 0\}. \quad (7.3)$$

7.3. Необходимо упомянуть, что диссипативное расширение A , заданное в (7.3), генерирует нильпотентную полугруппу сдвигов V_s с индексом ℓ . Действительно,

$$(V_s f)(x) = \begin{cases} f(x-s), & x > s, \\ 0, & x \leq s \end{cases}, \quad f \in L^2(0, \ell),$$

и поэтому $V_s = 0$ для $s \geq \ell$. Непосредственное вычисление показывает, что ограниченные коммутационные условия Вейля

$$U_t V_s = e^{ist} V_s U_t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0, \quad (7.4)$$

для унитарной группы U_t и полугруппы сжимающих отображений V_s удовлетворяются.

Следует также отметить, что генераторы A – операторы дифференцирования на конечном интервале, заданные в (7.3), – не являются унитарно-эквивалентными для разных значений параметра ℓ , задающего длину интервала $[0, \ell]$ (см. книгу [36]). Таким образом, редуцированные коммутационные соотношения Вейля (7.4) допускают несколько решений, не являющихся унитарно-эквивалентными.

7.4. Приведем несколько примеров для иллюстрации теоремы 6.3.

Можно заметить, что любое максимально диссипативное, в частности самосопряженное, расширение оператора $\dot{A}$ обладает следующим свойством:

$$U_t(\text{Dom}(A)) = \text{Dom}(A) \quad \text{для всех} \quad t = \frac{2\pi}{\ell} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.5)$$

Таким образом, оператор A является $G[g]$ -инвариантным, где $G[g]$ – дискретная подгруппа однопараметрической группы G (7.1), генераторами которой являются

трансляции $g(x) = x + 2\pi/\ell$. Действительно, как показано в [36], область определения любого максимально диссипативного расширения допускает представление $\text{Dom}(A) = \{f \in W_2^1(0, \ell) \mid f(0) = \rho f(\ell)\}$ для некоторого $|\rho| \leq 1$. Таким образом, свойство инвариантности области определения (7.5) автоматически выполняется. В частности, спектр оператора A представляет собой решетку в верхней полуплоскости с периодом $2\pi/\ell$, если расширение A максимально диссипативное и несамосопряженное. Если $|\rho| = 1$ и, следовательно, оператор A самосопряженный, спектр совпадает с набором точек, образующих арифметическую прогрессию (7.2) (для некоторого Θ).

Наш второй пример относится к однородному оператору Шредингера с точечным потенциалом. В данном примере однопараметрическая группа, о которой пойдет речь, совпадает с группой преобразований масштаба действительной прямой.

ПРИМЕР 7.2. Предположим, что $G = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является группой преобразований масштаба, $g_t(x) = e^t x$. Пусть $\dot{A}$ – замыкание в $L^2(0, \infty)$ симметричного оператора, заданного дифференциальным выражением

$$\tau_\nu = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x^2}, \quad (7.6)$$

изначально определенном на $C_0^\infty(0, \infty)$.

Широко известно (см., например, главу X книги [37]), что:

- 1) если $\gamma < 3/4$, то оператор $\dot{A}$ имеет индексы дефекта $(1, 1)$,
- 2) оператор $\dot{A}$ неотрицателен при $\gamma \geq 1/4$,
- 3) оператор $\dot{A}$ не является полуограниченным снизу при $\gamma < -1/4$.

Независимо от абсолютной величины константы взаимодействия γ оператор $\dot{A}$ является G -инвариантным (однородным) относительно унитарной группы преобразований масштаба

$$(U_t f)(x) = e^{t/4} f(e^{t/2} x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+). \quad (7.7)$$

7.5. Сначала отметим, что, как и в примере 7.1, симметричный G -инвариантный оператор $\dot{A}$ из примера 7.2 при $\gamma < -1/4$ не допускает самосопряженных G -инвариантных расширений. Действительно, хорошо известно (см., например, книгу [38]), что если A – самосопряженное расширение оператора $\dot{A}$, то область определения оператора $\dot{A}$ можно задать с помощью следующих асимптотических граничных условий: существует значение $\Theta \in [0, 2\pi)$ такое, что для любого $f \in \text{Dom}(A) \subset W_{2, \text{loc}}^2(0, \infty)$ асимптотическое выражение

$$f(x) \sim C\sqrt{x} \sin(\nu \ln x + \Theta) \quad \text{при} \quad x \downarrow 0 \quad (7.8)$$

верно для некоторого $C \in \mathbb{C}$, где $\nu = \sqrt{|\gamma + 1/4|}$. Очевидно, что

$$U_t(\text{Dom}(A)) = \text{Dom}(A) \quad \text{для всех} \quad t = \frac{4\pi n}{\nu}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где группа U_t преобразований масштаба задана в (7.7). Таким образом, расширение A является $G[g]$ -инвариантным, где $G[g]$ обозначает дискретную циклическую

подгруппу, генератором которой служит линейное преобразование $g \in \mathcal{G}$,

$$g(x) = \kappa x \quad \text{при} \quad \kappa = e^{4\pi/\nu}. \quad (7.9)$$

В частности, если λ_0 – отрицательное собственное значение самосопряженного расширения A , то элементы двусторонней геометрической прогрессии

$$\lambda_n = \kappa^n \lambda_0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.10)$$

попадают в (отрицательный) дискретный спектр оператора A .

Осталось отметить, как и в случае дифференциального оператора на конечном интервале из примера 7.1, что $\dot{A}$ не имеет G -инвариантных самосопряженных расширений. Также, применяя теорему 6.3, получаем, что любое максимальное расширение $\dot{A}$ инвариантно относительно циклической группы $G[g]$, где g задано с помощью равенства (7.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Самосопряженные реализации оператора Шредингера

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x^2}, \quad \gamma < -\frac{1}{4},$$

определенные асимптотическими граничными условиями (7.8), хорошо подходят для описания феномена падения частицы на центр в квантовой механике [10] (см. также [39] и [38]). С теоретико-групповой точки зрения данный эффект можно объяснить следующим образом. Изначальный симметричный однородный оператор (по отношению к преобразованиям масштаба) не является полуограниченным снизу и не допускает самосопряженной однородной реализации, а любое самосопряженное выражение для соответствующего гамильтониана однородно только относительно циклической подгруппы преобразований. В результате отрицательный дискретный спектр оператора как множество является инвариантным относительно естественного действия подгруппы преобразований масштаба действительной прямой. Это означает, что

$$\text{spec}(A) \cap (-\infty, 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\kappa^n \lambda_0\}.$$

7.6. Теорема 5.2 в сочетании с теоремой 6.1 показывает, что $\dot{A}$ имеет единственное максимально диссипативное G -инвариантное расширение, которое совпадает со следующим однородным оператором A : ограничением сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на

$$\text{Dom}(A) = \left\{ f \in \text{Dom}((\dot{A})^*) \left| \text{существует} \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x^{1/2+i\sqrt{|\gamma+1/4|}}} \right. \right\}. \quad (7.11)$$

Очевидно, что A является G -инвариантным. Мы утверждаем (без доказательства), что A – максимально диссипативный оператор.

7.7. Диссипативный оператор Шредингера A с точечным потенциалом из п. 7.6 генерирует сжимающую полугруппу $V_s = e^{iAs}$, $s \geq 0$. Согласно теореме 2.3 выполнены редуцированные обобщенные коммутационные соотношения Вейля

$$U_t V_s = e^{ise^t} V_{e^t s} U_t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0. \quad (7.12)$$

Также можно показать, что однородные расширения A не являются унитарно-эквивалентными для различных значений константы взаимодействия $\gamma < 1/4$. Таким образом, редуцированные обобщенные коммутационные соотношения Вейля (7.12) допускают непрерывное семейство решений, не являющихся унитарно-эквивалентными (ср. с п. 7.3).

7.8. В заключение мы иллюстрируем теорему 6.2, которая относится к случаю полуограниченных G -инвариантных операторов.

Предположив, что

$$-\frac{1}{4} \leq \gamma < \frac{3}{4}, \quad (7.13)$$

можно заметить, что симметричный оператор $\dot{A}$ неотрицателен. Более того, очевидно, что два однородных расширения, заданные как сужения сопряженного оператора $(\dot{A})^*$ на

$$\begin{aligned} \text{Dom}(A_F) &= \left\{ f \in \text{Dom}((\dot{A})^*) \mid \text{существует } \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x^{1/2 + \sqrt{\gamma + 1/4}}} \right\}, \\ \text{Dom}(A_K) &= \left\{ f \in \text{Dom}((\dot{A})^*) \mid \text{существует } \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x^{1/2 - \sqrt{\gamma + 1/4}}} \right\}, \end{aligned}$$

являются G -инвариантными относительно унитарного представления (7.7). Отметим, что самосопряженные выражения A_F и A_K (см. для сравнения работы [40]–[42]) являются расширениями Фридрихса и Крейна–фон Неймана оператора $\dot{A}$, что согласуется с утверждением теоремы 6.2.

Также отметим, что в предположении (7.13) соответствующий поток имеет две различные неподвижные точки на единичной окружности. В случае $\gamma = -1/4$ расширения A_K и A_F совпадают. Следовательно, поток (4.3) имеет только одну неподвижную точку на границе $\mathbb{T}$ единичного круга $\mathbb{D}$ (ср. с предложением 6.1).

Мы завершаем данный раздел тем, что приводим пример G -инвариантного генератора с индексами дефекта $(0, 1)$. Ниже мы убедимся, что этот пример является универсальным в следующем смысле. Полугруппа односторонних сдвигов $V_s = e^{isA}$, $s \geq 0$, с генератором A является решением как ограниченных стандартных, так и обобщенных коммутационных соотношений Вейля (2.8) и (2.9).

ПРИМЕР 7.3. Пусть $\dot{A}$ – оператор дифференцирования Дирихле на положительной полуоси (в $L^2(0, \infty)$),

$$(\dot{A})f(x) = i \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{на} \quad \text{Dom}(\dot{A}) = \{f \in W_2^1(0, \infty) \mid f(0) = 0\}.$$

Хорошо известно (см., например, книгу [36]), что симметричный оператор $\dot{A}$ имеет индексы дефекта $(0, 1)$ и в то же время является максимально диссипативным оператором.

Пусть $G^{(1)} = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — группа аффинных преобразований $g_t(x) = x + t$. Очевидно, что $\dot{A}$ является $G^{(1)}$ -инвариантным относительно группы унитарных преобразований, заданных соотношением

$$(U_t^{(1)}f)(x) = e^{ixt}f(x), \quad f \in L^2(0, \infty).$$

Обозначив через $G^{(2)} = \{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ группу преобразований масштаба $g_t(x) = e^t x$, мы также заключаем, что $\dot{A}$ является $G^{(2)}$ -инвариантным относительно группы унитарных преобразований, заданных как

$$(U_t^{(2)}f)(x) = e^{t/2}f(e^t x), \quad f \in L^2(0, \infty). \quad (7.14)$$

В частности, для полугруппы односторонних правых сдвигов $V_s = e^{isA}$ с генератором, заданным дифференциальным оператором $A = \dot{A}$, получаем редуцированные коммутационные соотношения Вейля

$$U_t^{(1)}V_s = e^{ist}V_sU_t^{(1)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0,$$

а также редуцированные обобщенные коммутационные соотношения Вейля

$$U_t^{(2)}V_s = e^{ise^t}V_{e^t s}U_t^{(2)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0.$$

Кроме того, отметим, что оператор $A = \dot{A}$ является $\mathcal{G}$ -инвариантным относительно унитарного представления $\mathcal{G} \ni g \mapsto U_g$ всей аффинной группы $\mathcal{G}$, заданной соотношением

$$(U_g)f(x) = a^{1/2}e^{ibx}f(ax), \quad f \in L^2(0, \infty), \quad g \in \mathcal{G}, \quad g(x) = ax + b.$$

Список литературы

- [1] G. G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy, **XXVI**, Wiley & Sons, New York, 1972.
- [2] P. D. Lax, R. S. Phillips, *Scattering Theory*, Pure and Applied Mathematics, **26**, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [3] G. Weyl, *Z. Phys.*, **46**:1 (1928), 1–46.
- [4] J. von Neumann, *Math. Ann.*, **104**:1 (1931), 570–578.
- [5] M. Stone, *Ann. Math.*, **33**:3 (1932), 643–648.
- [6] В. А. Золотарёв, *Матем. сб.*, **183**:5 (1992), 115–144.
- [7] В. К. Дубовой, “Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, т. 14, ХГУ, Харьков, 1971, 67–83.
- [8] М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах*, ХГУ, Харьков, 1971.

- [9] А. П. Филимонов, Э. Р. Цекановский, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 94–95.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, М., 1989.
- [11] V. Efimov, *Phys. Lett. B*, **33**:8 (1970), 563–564.
- [12] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [13] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, *Докл. АН СССР*, **141**:6 (1961), 1335–1338.
- [14] К. А. Макаров, В. В. Мележик, *ТМФ*, **107**:3 (1996), 415–432.
- [15] С. Ленг, $SL_2(\mathbb{R})$, Мир, М., 1977.
- [16] G. W. Mackey, *Duke Math. J.*, **16**:2 (1949), 313–326.
- [17] М. С. Бродский, М. С. Лившиц, *Докл. АН СССР*, **68** (1949), 213–216.
- [18] Р. Е. Т. Jorgensen, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **1**:1 (1979), 266–269.
- [19] Р. Е. Т. Jorgensen, *Math. Z.*, **169**:1 (1979), 41–62.
- [20] Р. Е. Т. Jorgensen, P. S. Muhly, *J. Analyse Math.*, **37** (1980), 46–99.
- [21] Р. Е. Т. Jorgensen, *J. Math. Anal. Appl.*, **73**:1 (1980), 115–133.
- [22] Р. Е. Т. Jorgensen, *Amer. J. Math.*, **103**:2 (1981), 273–287.
- [23] Р. Е. Т. Jorgensen, R. T. Moore, *Operator Commutation Relations*, Mathematics and Its Applications, **14**, D. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [24] K. Schmüdgen, *J. Funct. Anal.*, **50**:1 (1983), 8–49.
- [25] K. Schmüdgen, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:2 (1983), 601–671.
- [26] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
- [27] Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмүльян, *ТМФ*, **32**:5(197) (1977), 69–124.
- [28] М. С. Лившиц, *Матем. сб.*, **19(61)**:2 (1946), 239–262.
- [29] Yu. Arlinskii, S. Belyi, E. Tsekanovskii, *Conservative Realizations of Herglotz–Nevanlinna Functions*, Operator Theory: Advances and Applications, **217**, Birkhäuser, Basel, 2011.
- [30] К. А. Макаров, Е. Тсекановский, *Methods Func. Anal. Topology*, **13**:2 (2007), 181–186.
- [31] М. Г. Крейн, *Матем. сб.*, **20(62)**:3 (1947), 431–495.
- [32] T. Ando, K. Nishio, *Tôhoku Math. J.*, **22**:1 (1970), 65–75.
- [33] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, М., 1965.
- [34] Дж. У. Вик, *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию*, МЦНМО, М., 2005.
- [35] L. E. J. Brouwer, *Mathematische Annalen*, **71**:3 (1912), 305–315.
- [36] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.
- [37] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. II: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [38] А. М. Переломов, Y. B. Zel'dovich, *Quantum Mechanics. Selected Topics*, World Sci., Singapore, 1998.
- [39] А. М. Переломов, В. С. Попов, *ТМФ*, **4**:1 (1970), 48–65.
- [40] W. N. Everitt, H. Kalf, *J. Comp. Appl. Math.*, **208**:1 (2007), 3–19.
- [41] F. Gesztesy, L. Pittner, *Acta Phys. Austriaca*, **51**:3–4 (1979), 259–268.
- [42] H. Kalf, *J. London Math. Soc.*, **17** (1978), 511–521.