Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андрианов, А. В. Соколов, Расширенная суперсимметрия и скрытые симметрии в одномерной матричной квантовой механике, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 5–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:47:49

© 2016 г.

А. А. Андрианов*, А. В. Соколов*

РАСШИРЕННАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ И СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ В ОДНОМЕРНОЙ МАТРИЧНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Исследованы свойства нелинейных алгебр суперсимметрии, реализующиеся в одномерной квантовой механике матричных систем. Суперзаряды этих алгебр являются дифференциальными операторами конечного порядка по производным. В особых случаях существуют несколько независимых суперзарядов, которые осуществляют (расширенную) суперсимметрию одного и того же супергамильтониана. Расширенная суперсимметрия порождает скрытые симметрии супергамильтониана. Такие симметрии найдены в моделях с (2×2) -матричными потенциалами.

Ключевые слова: матричный гамильтониан, расширенная алгебра суперсимметрии, скрытая симметрия.

DOI: 10.4213/tmf8977

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод суперсимметрии в квантовой механике служит для построения изоспектральных или почти изоспектральных квантовых гамильтонианов с различными потенциалами (см. обзоры [1]–[4]). Наиболее развитая схема построения изоспектральных систем основана на нелинейной (полиномиальной) алгебре суперсимметрии (см. обзор [4]). Она была детально разработана в последнее десятилетие для скалярных потенциалов [5]–[15].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00136_а, № 16-01-00375_а). Авторы признательны Санкт-Петербургскому государственному университету за исследовательский грант № 11.38.660.2013 и за гранты № 11.41.847.2015 (А. В. Соколов) и № 11.41.775.2015 (А. А. Андрианов) для участия в конференции РННQR'15.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: a.andrianov@spbu.ru, andrey.sokolov@spbu.ru

Вместе с тем заслуживает серьезного внимания спектральный дизайн для матричных потенциалов, так как целый ряд задач многоканального и многочастичного рассеяния, а также задач о взаимодействии частиц со спином содержат матричные потенциалы, управляющие квантовой динамикой. В этой области сделал вклад и Станислав Петрович Меркурьев: он использовал методы суперсимметричной механики для получения многочастичных потенциалов без нефизических уровней энергии [16].

Суперсимметричная механика избранных матричных систем имеет довольно солидную историю [17]–[45]. Однако систематические шаги в развитие спектрального дизайна для матричных потенциалов были сделаны лишь в последние три года [41], [46], [47]. В частности, найдены простые формулы, позволяющие построить любой $(n \times n)$ -матричный сплетающий оператор произвольного порядка и соответствующий новый гамильтониан в терминах формальных собственных и присоединенных вектор-функций исходного гамильтониана. Обнаружено, что для любого матричного сплетающего оператора наименьшего порядка существует матричный оператор, сплетающий те же гамильтонианы в противоположном направлении, с помощью которого можно построить полиномиальную алгебру суперсимметрии. Найдены критерии приводимости и слабой, и сильной минимизируемости суперсимметричных алгебр, а также показано, что существуют абсолютно неприводимые матричные сплетающие операторы. Исследованы условия существования матрицы симметрии для матричного гамильтониана и с их помощью разработан удобный метод построения матричных гамильтонианов с заданной матрицей симметрии.

Настоящая работа посвящена более детальному определению нелинейных алгебр суперсимметрии для матричных потенциалов в одномерной квантовой механике, которое содержится в теореме 1. Суперзаряды этих алгебр являются дифференциальными операторами конечного порядка по производным. В некоторых случаях существуют несколько независимых суперзарядов, которые осуществляют (расширенную) суперсимметрию одного и того же супергамильтониана. Расширенная суперсимметрия порождает скрытые симметрии супергамильтониана [8], [48]. Такие симметрии найдены в различных моделях с (2×2) -матричными потенциалами (см. также примеры в [26]). В этих моделях построены примеры скрытых симметрий, которые порождают линейные и нелинейные алгебры суперсимметрии в квантовой механике матричных систем, и проведен анализ алгоритмов их поиска.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Сплетающий оператор. Рассмотрим два определенных на всей оси матричных гамильтониана шредингеровского вида

$$H_+ = -I_n \partial^2 + V_+(x), \quad H_- = -I_n \partial^2 + V_-(x), \quad \partial \equiv \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица n -го порядка, $n \in \mathbb{N}$, и $V_+(x)$ и $V_-(x)$ – $(n \times n)$ -матричные потенциалы, все элементы которых представляют собой достаточно гладкие функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Будем предполагать, что эти гамильтонианы сплетаются $(n \times n)$ -матричным линейным дифференциальным оператором N -го порядка Q_N^- (сплетающим оператором), $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, так,

что

$$Q_N^- H_+ = H_- Q_N^-, \quad Q_N^- = \sum_{j=0}^N X_j^-(x) \partial^j, \quad (2)$$

и все элементы $(n \times n)$ -матричных коэффициентов $X_j^-(x)$, $j = 0, 1, \dots, N$, этого оператора также являются достаточно гладкими и принимают, вообще говоря, комплексные значения.

Из (2) следует [41], что старший коэффициент $X_N^-(x)$ представляет собой постоянную матрицу и

$$V_-(x) = X_N^- V_+(x) (X_N^-)^{-1} + 2X_{N-1}'(x) (X_N^-)^{-1}, \quad \text{если} \quad \det X_N^- \neq 0. \quad (3)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что $\det X_N^- \neq 0$.

2.2. Структура ядра сплетающего оператора. Поскольку ядро оператора Q_N^- в силу (2) является инвариантным относительно H_+ ,

$$H_+ \ker Q_N^- \subset \ker Q_N^-,$$

постольку для любого базиса $\Phi_1^-(x), \dots, \Phi_d^-(x)$, $d = \dim \ker Q_N^- = nN$, в этом ядре существует постоянная квадратная $(d \times d)$ -матрица $\mathbf{T}^+ \equiv \|T_{ij}^+\|$, для которой справедливы следующие равенства:

$$H_+ \Phi_i^- = \sum_{j=1}^d T_{ij}^+ \Phi_j^-, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (4)$$

При этом вронсиан всех элементов любого базиса в ядре Q_N^- не имеет корней.

Матрицей $\mathbf{T}$ сплетающего оператора будем называть матрицу, которая строится для этого оператора таким же образом, каким матрица $\mathbf{T}^+$ была построена для оператора Q_N^- . При этом базис в ядре сплетающего оператора, как правило, не будет указываться в тех случаях, когда рассматриваются только спектральные характеристики матрицы $\mathbf{T}$, или, что то же самое, спектральные характеристики сужения соответствующего гамильтониана на ядро рассматриваемого сплетающего оператора (ср. с (4)).

Базис в ядре сплетающего оператора, который обеспечивает нормальный (жорданов) вид матрице $\mathbf{T}$ этого оператора, будем называть *каноническим базисом*. Элементы канонического базиса называются *преобразующими вектор-функциями*.

В тех случаях, когда нормальная форма матрицы $\mathbf{T}$ сплетающего оператора содержит клетку большего порядка (клетки больших порядков), чем первый, соответствующий канонический базис включает в себя кроме формальной собственной вектор-функции (формальных собственных вектор-функций) соответствующего гамильтониана также и его формальную присоединенную вектор-функцию (формальные присоединенные вектор-функции), которая определяется (которые определяются) следующим образом [49].

Вектор-функция $\Phi_{m,i}(x)$ называется *формальной присоединенной вектор-функцией i -го порядка* ($n \times n$)-матричного гамильтониана $H = -I_n \partial^2 + V(x)$ для спектрального числа λ_m , если

$$(H - \lambda_m I_n)^{i+1} \Phi_{m,i} \equiv 0, \quad (H - \lambda_m I_n)^i \Phi_{m,i} \neq 0.$$

При этом слово “формальный” подчеркивает, что вектор-функция $\Phi_{m,i}(x)$ не обязательно принадлежит $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ (не обязательно нормируема). Формальную присоединенную вектор-функцию нулевого порядка $\Phi_{m,0}(x)$ в этом случае естественно назвать *формальной собственной вектор-функцией* гамильтониана H .

Конечный или бесконечный набор вектор-функций $\Phi_{m,i}(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, называется *цепочкой* формальных присоединенных вектор-функций ($n \times n$)-матричного гамильтониана $H = -I_n \partial^2 + V(x)$ для спектрального числа λ_m , если

$$H \Phi_{m,0} = \lambda_m \Phi_{m,0}, \quad \Phi_{m,0}(x) \neq 0, \quad (H - \lambda_m I_n) \Phi_{m,i} = \Phi_{m,i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $\Phi_{m,i}(x)$ при этом является формальной присоединенной вектор-функцией i -го порядка гамильтониана H для спектрального числа λ_m , $i = 0, 1, 2, \dots$.

2.3. Слабая и сильная минимизируемость сплетающего оператора. Если оператор Q_N^- умножить на многочлен от гамильтониана:

$$Q_N^- \left[\sum_{l=0}^L A_l H_+^l \right] \quad \left(\left[\sum_{l=0}^L A_l H_-^l \right] Q_N^- \right),$$

где коэффициенты A_l , $l = 0, 1, \dots, L$, являются либо комплексными числами, либо постоянными матрицами симметрии для гамильтониана H_+ (H_-), то возникшее произведение, очевидно, снова будет сплетающим оператором для той же самой пары гамильтонианов:

$$\begin{aligned} \left\{ Q_N^- \left[\sum_{l=0}^L A_l H_+^l \right] \right\} H_+ &= Q_N^- H_+ \left[\sum_{l=0}^L A_l H_+^l \right] = H_- \left\{ Q_N^- \left[\sum_{l=0}^L A_l H_+^l \right] \right\} \\ \left(\left[\sum_{l=0}^L A_l H_-^l \right] Q_N^- \right) H_+ &= \left[\sum_{l=0}^L A_l H_-^l \right] H_- Q_N^- = H_- \left\{ \left[\sum_{l=0}^L A_l H_-^l \right] Q_N^- \right\}. \end{aligned}$$

Такие полиномиальные сомножители во многих случаях могут содержаться в рассматриваемых сплетающих операторах и неоправданно усложнять соответствующие алгебры. Для рассмотрения возможности отщепления от заданного сплетающего оператора излишнего полиномиального сомножителя удобно ввести понятия *слабой* и *сильной минимизируемости* [41], [47], совпадающие в скалярном случае $n = 1$ и переходящие в этом случае в соответствующее понятие, введенное в [8], [12]. В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением только слабой минимизируемости сплетающего оператора.

Будем называть сплетающий оператор Q_N^- *слабо минимизируемым*, если он может быть представлен в виде следующих произведений:

$$Q_N^- = P_M^- \left[\sum_{l=0}^L a_l H_+^l \right] \equiv \left[\sum_{l=0}^L a_l H_-^l \right] P_M^-, \quad (5)$$

$$a_l \in \mathbb{C}, \quad l = 0, 1, \dots, L, \quad a_L \neq 0, \quad 1 \leq L \leq N/2,$$

где P_M^- – $(n \times n)$ -матричный линейный дифференциальный оператор M -го порядка, $M = N - 2L$, который сплетает гамильтонианы H_+ и H_- так, что $P_M^- H_+ = H_- P_M^-$. В противном случае оператор Q_N^- будем называть *слабо неминимизируемым*.

3. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА СУПЕРСИММЕТРИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПЛЕТАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

Существование полиномиальной алгебры суперсимметрии для любого матричного сплетающего оператора с невырожденным матричным коэффициентом при операторе дифференцирования в старшей степени является следствием ряда требований, которые мы сформулируем в условиях приводимой ниже теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) $(n \times n)$ -матричные гамильтонианы H_+ и H_- вида (1) сплетаются $(n \times n)$ -матричным линейным дифференциальным оператором N -го порядка Q_N^- вида (2) с постоянным невырожденным матричным коэффициентом X_N^- при ∂^N в соответствии с (2);

2) T^+ – матрица T сплетающего оператора Q_N^- ;

3) $\lambda_l, l = 1, 2, \dots, L$, – полный набор различных собственных чисел матрицы T^+ ;

4) g_l^- – геометрическая кратность собственного числа λ_l матрицы T^+ , $l = 1, 2, \dots, L$;

5) $k_{l,j}^-, j = 1, 2, \dots, g_l^-,$ – порядки жордановых клеток в нормальной форме матрицы T^+ , которые соответствуют собственному числу $\lambda_l, l = 1, 2, \dots, L$, причем последовательность $k_{l,j}^-, j = 1, 2, \dots, g_l^-$, при любом $l = 1, 2, \dots, L$ является невозрастающей;

6) $\varkappa_l = \max_{1 \leq j \leq g_l^-} k_{l,j}^-, l = 1, 2, \dots, L$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) существует единственный слабо неминимизируемый $(n \times n)$ -матричный линейный дифференциальный оператор $Q_{N'}^+$, который сплетает H_+ и H_- так, что

$$H_+ Q_{N'}^+ = Q_{N'}^+ H_-, \quad (6)$$

и такой, что произведение $Q_{N'}^+ Q_N^-$ представляет собой многочлен с числовыми коэффициентами от гамильтониана H_+ и единичным коэффициентом при H_+ в старшей степени;

2) существует единственный слабо неминимизируемый $(n \times n)$ -матричный линейный дифференциальный оператор $\hat{Q}_{N'}^+$, который сплетает H_+ и H_- так, что

$$H_+ \hat{Q}_{N'}^+ = \hat{Q}_{N'}^+ H_-, \quad (7)$$

и такой, что произведение $Q_N^- \hat{Q}_{N'}^+$ представляет собой многочлен с числовыми коэффициентами от гамильтониана H_- и единичным коэффициентом при H_- в старшей степени;

3) $Q_{N'}^+ = \hat{Q}_{N'}^+$;

4) порядок N' оператора $Q_{N'}^+ = \hat{Q}_{N'}^+$ можно найти по формуле

$$N' = -N + 2 \sum_{l=1}^L \varkappa_l;$$

5) справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q_{N'}^+ Q_N^- &= \mathcal{P}_{(N+N')/2}(H_+), & Q_N^- Q_{N'}^+ &= \mathcal{P}_{(N+N')/2}(H_-), \\ \mathcal{P}_{(N+N')/2}(\lambda) &\equiv \prod_{l=1}^L (\lambda - \lambda_l)^{\varkappa_l}. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство теоремы 1 занимает несколько страниц журнального текста и будет опубликовано в другой статье. Здесь мы ограничимся ее применением к конкретным (2×2) -матричным гамильтонианам.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $(n \times n)$ -матричного сплетающего оператора Q_N^- с невырожденным матричным коэффициентом при ∂^N , используя супергамильтониан

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}$$

и суперзаряды

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & Q_N^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_N^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^2 = \bar{\mathbf{Q}}^2 = 0,$$

можно построить следующую полиномиальную алгебру суперсимметрии:

$$\{\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}\} = \mathcal{P}_{(N+N')/2}(\mathbf{H}), \quad [\mathbf{H}, \mathbf{Q}] = [\mathbf{H}, \bar{\mathbf{Q}}] = 0.$$

4. ПОИСК (2×2) -МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ

Рассмотрим модель, в которой два симметричных (2×2) -матричных гамильтониана H_+ и H_- сплетаются операторами первого и нулевого порядков:

$$\begin{aligned} Q_1^- H_+ &= H_- Q_1^-, & Q_1^- &= X_1^- \partial + X_0^-, & H_{\pm}^t &= H_{\pm}, \\ P_0^- H_+ &= H_- P_0^-, & P_0^- &= Y_0^-, & \det Y_0^- &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая во внимание симметричность гамильтонианов H_+ и H_- , нетрудно увидеть, что операторы $(Q_1^-)^t$ и $(P_0^-)^t$ сплетают эти гамильтонианы в противоположном направлении:

$$(Q_1^-)^t H_- = H_+ (Q_1^-)^t, \quad (P_0^-)^t H_- = H_+ (P_0^-)^t.$$

Из операторов Q_1^- , P_0^- , $(Q_1^-)^t$ и $(P_0^-)^t$ для H_+ и H_- , очевидно, можно составить операторы симметрии, антисимметричные и симметричные относительно транспонирования:

$$\begin{aligned} R_{a,s}^+ &= (Q_1^-)^t P_0^- \mp (P_0^-)^t Q_1^-, & (R_{a,s}^+)^t &= \mp R_{a,s}^+, & [R_a, H_+] &= [R_s, H_+] = 0, \\ R_{a,s}^- &= Q_1^- (P_0^-)^t \mp P_0^- (Q_1^-)^t, & (R_{a,s}^-)^t &= \mp R_{a,s}^-, & [R_a, H_+] &= [R_s, H_+] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ограничимся исследованием только операторов R_a^+ и R_s^+ , поскольку операторы R_a^- и R_s^- могут быть исследованы таким же образом. Кроме того, отметим, что в силу (9) потенциалы гамильтонианов H_+ и H_- являются подобными:

$$H_- = Y_0^- H_+ (Y_0^-)^{-1} \iff V_-(x) = Y_0^- V_+(x) (Y_0^-)^{-1}.$$

Последнее равенство совместно с равенством

$$Q_1^- = \frac{1}{2}((Y_0^-)^t)^{-1}(R_s^+ - R_a^+), \quad (11)$$

следующим из (9) и (10), оно позволяет выразить гамильтониан H_- и сплетающий оператор Q_1^- через H_+ , R_a^+ , R_s^+ и $P_0^- = Y_0^-$ либо, если предположить, что изначально известны только $H_+ = H_+^t$, R_a^+ и R_s^- , найти (2×2) -матричный гамильтониан H_- , сплетаемый с H_+ оператором $P_0^- = Y_0^-$ и оператором (11) так, что имеют место соотношения (9). При этом нетрудно проверить, что для того, чтобы гамильтониан H_- был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы $Y_0^- \equiv \|y_{ij}^-\|$ удовлетворяли соотношению

$$\begin{aligned} (y_{11}^- y_{12}^- + y_{21}^- y_{22}^-)(v_{11}^+(x) - v_{22}^+(x)) + ((y_{12}^2 + y_{22}^2) - (y_{11}^2 + y_{21}^2))v_{12}^+(x) &\equiv 0, \\ V_+(x) &\equiv \|v_{ij}^+(x)\|, \end{aligned}$$

которое будет справедливо, если, например, выбрать матрицу Y_0^- ортогональной.

4.1. Антисимметричный оператор симметрии с диагонализующим старшим коэффициентом. У антисимметричного оператора симметрии R_a^+ коэффициент при ∂ представляет собой симметричную матрицу. Предположим, что существует ортогональная матрица A , приводящая этот коэффициент к диагональному виду. Антисимметричный матричный коэффициент R_a^+ при ∂^0 при указанном преобразовании, очевидно, останется антисимметричным, а симметричный гамильтониан H_+ перейдет в некоторый новый симметричный гамильтониан. Таким образом, операторы R_a^+ и H_+ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_a^+ &= A \left[\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \partial + r_0(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ H_+ &= A \left[-\partial^2 I_2 + \begin{pmatrix} v_1(x) + v_2(x) & v_3(x) \\ v_3(x) & v_1(x) - v_2(x) \end{pmatrix} \right] A^t, \end{aligned}$$

где $\mu_1, \mu_2, r_0(x), v_1(x), v_2(x)$ и $v_3(x)$ – некоторые постоянные и функции, удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \mu_2)v_3(x) + 2r'_0(x) &= 0, \\ \mu_1(v'_1(x) + v'_2(x)) + 2r_0(x)v_3(x) &= 0, \\ \mu_2(v'_1(x) - v'_2(x)) - 2r_0(x)v_3(x) &= 0, \\ \mu_1v'_3(x) - 2r_0(x)v_2(x) + r''_0(x) &= 0, \\ \mu_2v'_3(x) - 2r_0(x)v_2(x) - r''_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

равносильной условию перестановочности R_a^+ и H_+ . Дальнейшее исследование проведем по отдельности для нескольких случаев.

4.1.1. *Случай $\mu_1\mu_2 \neq 0, \mu_1^2 \neq \mu_2^2$.* Покажем, что в этом случае $v_1(x), v_2(x)$ и $v_3(x)$ можно выразить через $r_0(x)$, и найдем уравнение, которому удовлетворяет $r_0(x)$. Умножив второе уравнение системы (12) на μ_2 , первое – на μ_1 , сложив результаты, подставив в полученное уравнение выражение для $(\mu_1 - \mu_2)v_3(x)$ из первого уравнения и проинтегрировав, приходим к соотношению

$$\mu_1\mu_2v_1(x) + r_0^2(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = \frac{C_1 - r_0^2(x)}{\mu_1\mu_2},$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Вычитая из второго уравнения системы (12), умноженного на μ_2 , третье уравнение, умноженное на μ_1 , умножив результат на $\mu_1 - \mu_2$, подставив в полученное уравнение выражение для $(\mu_1 - \mu_2)v_3(x)$ из первого уравнения и проинтегрировав, получаем соотношение

$$\mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2)v_2(x) - (\mu_1 + \mu_2)r_0^2(x) = (\mu_1 + \mu_2)C_2, \quad (13)$$

где C_2 – постоянная интегрирования. Вычитая из четвертого уравнения системы (12), умноженного на μ_2 , пятое уравнение, умноженное на μ_1 , получаем

$$2(\mu_1 - \mu_2)r_0(x)v_2(x) + (\mu_1 + \mu_2)r''_0(x) = 0. \quad (14)$$

Из (13) и (14) находим, что $v_2(x)$ можно выразить через $r_0(x)$ двумя способами:

$$v_2(x) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{C_2 + r_0^2(x)}{\mu_1\mu_2} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \frac{r''_0(x)}{r_0(x)},$$

и, таким образом, $r_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2}\mu_1\mu_2r''_0(x) = r_0^3(x) + C_2r_0(x),$$

проинтегрировав которое, получаем

$$(r'_0)^2 = -\frac{1}{\mu_1\mu_2} [r_0^4(x) + 2C_2r_0^2(x) + C_3], \quad (15)$$

где C_3 – постоянная интегрирования. Наконец, из первого уравнения системы (12) следует, что

$$v_3(x) = -\frac{2r'_0(x)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Вид общего решения уравнения (15), а тем самым и вид функций $v_1(x)$, $v_2(x)$ и $v_3(x)$ определяются соотношением коэффициентов C_2 и C_3 . Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $C_2 = C_3 = 0$, $r_0(x) \neq \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (15) имеет вид

$$r_0(x) = i\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{x - x_0}, \quad \text{Im } x_0 \neq 0,$$

где x_0 – постоянная интегрирования, условие $\text{Im } x_0 \neq 0$ обеспечивает отсутствие вещественных полюсов, и ветви корней $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$ могут выбираться произвольно. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2} A \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} \end{pmatrix} \partial + \frac{i}{x - x_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t,$$

$$H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \frac{2}{(x - x_0)^2} \begin{pmatrix} -\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} & i\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \\ i\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] A^t, \quad \lambda_0 = \frac{C_1}{\mu_1\mu_2}.$$

Используя ортогональную матрицу B , оператор H_+ можно привести к более простому виду:

$$R_a^+ = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2} AB \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}} \end{pmatrix} \partial + \frac{i}{x - x_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] B^t A^t,$$

$$H_+ = AB \left[-I_2 \partial^2 + \frac{2}{(x - x_0)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] B^t A^t, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} & \frac{-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} & \frac{i\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \end{pmatrix},$$

где ветвь корня $\sqrt{\mu_1 - \mu_2}$ можно выбрать произвольно. Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{x - x_0} AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{x - x_0} A \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{x - x_0}{2} AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \end{pmatrix} \equiv \frac{x - x_0}{2} A \begin{pmatrix} -i\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\mu_1 - \mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_1 - \mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \end{pmatrix},$$

первая из которых для H_+ является собственной, а вторая – формальной присоединенной:

$$H_+ \Phi_1 = \lambda_0 \Phi_1, \quad (H_+ - \lambda_0 I_2) \Phi_2 = \Phi_1.$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $C_3 = C_2^2 \neq 0$, $r_0(x) \neq \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (15) имеет вид

$$r_0(x) = i\sqrt{C_2} \operatorname{th} \alpha(x - x_0), \quad \alpha = \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2}},$$

где x_0 – постоянная интегрирования, выбираемая так, чтобы у функции $r_0(x)$ не было вещественных полюсов, и ветви корней $\sqrt{C_2}$, $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$ могут выбираться произвольно. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$\begin{aligned} R_a^+ &= \sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2} A \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} \end{pmatrix} \partial + i\alpha \operatorname{th}[\alpha(x - x_0)] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ H_+ &= A \left[-I_2 \partial^2 - \frac{2\alpha^2}{\operatorname{ch}^2[\alpha(x - x_0)]} \begin{pmatrix} -\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} & i\frac{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \\ i\frac{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] A^t, \\ \lambda_0 &= \frac{C_1 + C_2}{\mu_1 \mu_2}. \end{aligned}$$

Используя ту же ортогональную матрицу B , что и выше, оператор H_+ можно привести к более простому виду:

$$\begin{aligned} R_a^+ &= \sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2} AB \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & \frac{\mu_1 + \mu_2}{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2}} \end{pmatrix} \partial + i\alpha \operatorname{th}[\alpha(x - x_0)] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] B^t A^t, \\ H_+ &= AB \left[-I_2 \partial^2 - \frac{2\alpha^2}{\operatorname{ch}^2[\alpha(x - x_0)]} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] B^t A^t. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}[\alpha(x - x_0)]} AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\operatorname{ch}[\alpha(x - x_0)]} A \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \\ \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1 - \mu_2}} \end{pmatrix}, \\ \Phi_2(x) &= -\frac{\operatorname{ch}[\alpha(x - x_0)]}{2\alpha^2} AB \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\frac{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \end{pmatrix} \equiv -\frac{\operatorname{ch}[\alpha(x - x_0)]}{2\alpha^2} A \begin{pmatrix} -i\frac{\sqrt{\mu_2} \sqrt{\mu_1 - \mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \\ \frac{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_1 - \mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

первая из которых для H_+ является собственной (если $\text{Re } \alpha \neq 0$), а вторая – формальной присоединенной:

$$H_+ \Phi_1 = (\lambda_0 - \alpha^2) \Phi_1, \quad [H_+ - (\lambda_0 - \alpha^2) I_2] \Phi_2 = \Phi_1.$$

Частный случай $C_2 \neq 0$, $C_3 = 0$, $r_0(x) \neq \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (15) имеет вид

$$r_0(x) = \frac{\sqrt{-2C_2}}{\text{ch}[\beta(x - x_0)]}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-2C_2}}{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}},$$

где x_0 – постоянная интегрирования, выбираемая так, чтобы у функции $r_0(x)$ не было вещественных полюсов, и ветви корней $\sqrt{-2C_2}$, $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$ могут выбираться произвольно. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$\begin{aligned} R_a^+ &= \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2} A \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} \end{pmatrix} \partial + \frac{\beta}{\text{ch}[\beta(x - x_0)]} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ H_+ &= A \left[-I_2 \partial^2 + 2\beta^2 \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_2}/\sqrt{\mu_1}}{\text{ch}^2[\beta(x - x_0)]} & \frac{\text{sh}[\beta(x - x_0)]}{\text{ch}^2[\beta(x - x_0)]} \\ \frac{\text{sh}[\beta(x - x_0)]}{\text{ch}^2[\beta(x - x_0)]} & \frac{-\sqrt{\mu_1}/\sqrt{\mu_2}}{\text{ch}^2[\beta(x - x_0)]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{C_1}{\mu_1\mu_2} \mp \frac{\beta^2(\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)} \equiv \frac{1}{\mu_1\mu_2} \left[C_1 \pm C_2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = A \begin{pmatrix} \text{th}[\beta(x - x_0)] \\ -\sqrt{\mu_1}/\sqrt{\mu_2} \\ \text{ch}[\beta(x - x_0)] \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(x) = A \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_2}/\sqrt{\mu_1} \\ \text{ch}[\beta(x - x_0)] \\ \text{th}[\beta(x - x_0)] \end{pmatrix},$$

являющиеся волновыми вектор-функциями H_+ , соответствующими двум нижним границам непрерывного спектра λ_1 и λ_2 :

$$H_+ \Phi_1 = \lambda_1 \Phi_1, \quad H_+ \Phi_2 = \lambda_2 \Phi_2.$$

Частный случай $C_3 \neq C_2^2$, $C_3 \neq 0$, $r_0(x) \neq \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (15) можно записать в виде

$$\int_{r_0(x_0)}^{r_0(x)} \frac{dr_0(x)}{\sqrt{r_0^4(x) + 2C_2 r_0^2(x) + C_3}} = \pm \frac{i}{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}} (x - x_0),$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $r_0(x_0)$ – произвольные постоянные, выбираемые так, чтобы функция $r_0(x)$ не имела вещественных полюсов, и значения всех корней могут выбираться

произвольно. Можно показать, что при выполнении условий

$$\mu_1 \mu_2 > 0, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_3 < C_2^2$$

функция $r_0(x)$ будет периодической. Тем самым, будут периодическими с тем же периодом коэффициент оператора R_a^+ при ∂^0 и потенциал $V_+(x)$ гамильтониана H_+ .

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) = \text{const} \neq 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) = \sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2} k_0, \quad v_1(x) = \lambda_0, \quad v_2(x) \equiv v_3(x) \equiv 0,$$

где $k_0 \neq 0$ и λ_0 – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2} A \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} \end{pmatrix} \partial + k_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \lambda_0 I_2 \right] A^t.$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} \end{pmatrix} e^{ik_0 x}, \quad \Phi_2(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ i \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} \end{pmatrix} e^{-ik_0 x},$$

являющиеся формальными собственными вектор-функциями H_+ :

$$H_+ \Phi_1 = (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_1, \quad H_+ \Phi_2 = (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_2.$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \equiv 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) \equiv 0, \quad v_1(x) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad v_2(x) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \quad v_3(x) \equiv 0,$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \sqrt{\mu_1} \sqrt{\mu_2} A \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} \end{pmatrix} \partial \right] A^t, \quad H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] A^t.$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(x) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

являющиеся волновыми вектор-функциями H_+ , соответствующими двум нижним границам непрерывного спектра λ_1 и λ_2 :

$$H_+\Phi_1 = \lambda_1\Phi_1, \quad H_+\Phi_2 = \lambda_2\Phi_2.$$

4.1.2. Случай $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \neq 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} r_0(x) &= \mu_1 k_0, & v_1(x) &= \lambda_0, \\ v_2(x) &= iC_1 e^{2ikx} - iC_2 e^{-2ikx}, & v_3(x) &= C_1 e^{2ikx} + C_2 e^{-2ikx}, \end{aligned}$$

где $k_0 \neq 0$, λ_0 , C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$\begin{aligned} R_a^+ &= \mu_1 \left[I_2 \partial + \begin{pmatrix} 0 & k_0 \\ -k_0 & 0 \end{pmatrix} \right], \\ H_+ &= -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} iC_1 e^{2ik_0 x} - iC_2 e^{-2ik_0 x} & C_1 e^{2ik_0 x} + C_2 e^{-2ik_0 x} \\ C_1 e^{2ik_0 x} + C_2 e^{-2ik_0 x} & -iC_1 e^{2ik_0 x} + iC_2 e^{-2ik_0 x} \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ik_0 x}, \quad \Phi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-ik_0 x},$$

из которых можно составить формальные собственные и присоединенные вектор-функции H_+ :

$$\begin{aligned} H_+ [\sqrt{C_1} \Phi_1 \mp i \sqrt{C_2} \Phi_2] &= (\lambda_0 + k_0^2 \pm 2\sqrt{C_1} \sqrt{C_2}) [\sqrt{C_1} \Phi_1 \mp i \sqrt{C_2} \Phi_2], & C_1 C_2 &\neq 0, \\ H_+ \Phi_1 &= (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_1, & [H_+ - (\lambda_0 + k_0^2) I_2] \begin{pmatrix} 1 \\ 2iC_1 \end{pmatrix} \Phi_2 &= \Phi_1, & C_1 &\neq 0, \quad C_2 = 0, \\ H_+ \Phi_2 &= (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_2, & [H_+ - (\lambda_0 + k_0^2) I_2] \begin{pmatrix} -1 \\ 2iC_2 \end{pmatrix} \Phi_1 &= \Phi_2, & C_1 = 0, \quad C_2 &\neq 0, \\ H_+ \Phi_1 &= (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_1, & H_+ \Phi_2 &= (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_2, & C_1 = C_2 &= 0, \end{aligned}$$

где ветви корней $\sqrt{C_1}$ и $\sqrt{C_2}$ можно выбирать произвольно. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что из R_a^+ и H_+ можно составить симметричный оператор симметрии для H_+ первого порядка:

$$\frac{1}{\mu_1^2} (R_a^+)^2 + H_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2k_0 \\ -2k_0 & 0 \end{pmatrix} \partial + V_+(x) - k_0^2 I_2,$$

причем

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\mu_1^2} (R_a^+)^2 + H_+ + (k_0^2 - \lambda_0) I_2 \right]^2 &= 4[k_0^2 H_+ + (C_1 C_2 - k_0^2 \lambda_0) I_2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_1^4} (R_a^+)^4 + \frac{2}{\mu_1^2} (R_a^+)^2 [H_+ - (\lambda_0 - k_0^2) I_2] &+ [H_+ - (\lambda_0 + k_0^2) I_2]^2 = 4C_1 C_2 I_2. \end{aligned}$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \equiv 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) \equiv 0, \quad v_1(x) = \lambda_0, \quad v_2(x) = C_1, \quad v_3(x) = C_2,$$

где λ_0 , C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \mu_1 I_2 \partial, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2.$$

Базис в ядре оператора симметрии R_a^+ , очевидно, можно составить из постоянных вектор-функций Φ_1 и Φ_2 , представляющих собой собственные векторы или собственный и присоединенный векторы постоянной матрицы V_+ . Кроме того, из R_a^+ и H_+ можно составить симметричный оператор симметрии для H_+ нулевого порядка:

$$\frac{1}{\mu_1^2} (R_a^+)^2 + H_+ = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2,$$

причем

$$\left[\frac{1}{\mu_1^2} (R_a^+)^2 + H_+ - \lambda_0 I_2 \right]^2 = (C_1^2 + C_2^2) I_2.$$

4.1.3. Случай $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \neq 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) = \mu_1 f(x), \quad v_1(x) = \lambda_0 + f^2(x), \quad v_2(x) \equiv 0, \quad v_3(x) = -f'(x),$$

где λ_0 – произвольная постоянная, $f(x)$ – произвольная функция. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \mu_1 A \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial + f(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \\ H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} f^2(x) & -f'(x) \\ -f'(x) & f^2(x) \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] A^t.$$

Нетрудно проверить, что базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp \left[\int_0^x f(t) dt \right], \quad \Phi_2(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[- \int_0^x f(t) dt \right],$$

которые представляют собой формальные собственные вектор-функции H_+ :

$$H_+ \Phi_1 = \lambda_0 \Phi_1, \quad H_+ \Phi_2 = \lambda_0 \Phi_2.$$

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что из R_a^+ и H_+ можно составить симметричный оператор симметрии для H_+ нулевого порядка:

$$\frac{1}{\mu_1^2}(R_a^+)^2 + H_+ = \lambda_0 I_2.$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \equiv 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) \equiv 0, \quad v_1(x) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad v_2(x) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \quad v_3(x) \equiv 0,$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \mu_1 A \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial \right] A^t, \quad H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] A^t.$$

Базис в ядре оператора симметрии R_a^+ , очевидно, составляют вектор-функции

$$\Phi_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

являющиеся волновыми вектор-функциями H_+ для нижних границ непрерывного спектра λ_1 и λ_2 :

$$H_+ \Phi_1 = \lambda_1 \Phi_1, \quad H_+ \Phi_2 = \lambda_2 \Phi_2.$$

Кроме того, из R_a^+ и H_+ можно составить симметричный оператор симметрии для H_+ нулевого порядка:

$$\frac{1}{\mu_1^2}(R_a^+)^2 + H_+ = A \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} A^t,$$

причем

$$\left[\frac{1}{\mu_1^2}(R_a^+)^2 + H_+ - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} l_2 \right]^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} l_2.$$

4.1.4. Случай $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $r_0(x) \neq 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) = \mu_1 k_0, \quad v_1(x) = \lambda_0, \quad v_2(x) \equiv v_3(x) \equiv 0,$$

где $\lambda_0, \mu_1 \neq 0$ и $k_0 \neq 0$ – произвольные постоянные. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \mu_1 A \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial + k_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] A^t, \quad H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \lambda_0 I_2 \right] A^t.$$

Ядро R_a^+ содержит только нулевую вектор-функцию.

Частный случай $r_0(x) \equiv 0$. В этом случае общее решение системы (12) имеет вид

$$v_1(x) = \lambda_0 + \frac{1}{2}f(x), \quad v_2(x) = -\frac{1}{2}f(x), \quad v_3(x) \equiv 0,$$

где λ_0 и $f(x)$ – произвольная постоянная и произвольная функция. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = \mu_1 A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \partial A^t, \quad H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2 \right] A^t,$$

где $\mu_1 \neq 0$ – произвольная постоянная. Ядро R_a^+ состоит из вектор-функций вида

$$\Phi(x) = A \begin{pmatrix} C \\ \varphi(x) \end{pmatrix},$$

где C и $\varphi(x)$ – произвольная постоянная и произвольная функция. При этом $\Phi(x)$, представляющие собой формальные собственные функции H_+ , имеют вид

$$\Phi(x) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_+ \Phi = \lambda_0 \Phi$$

либо

$$\Phi(x) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad H_+ \Phi = \lambda \Phi, \quad (16)$$

где $\varphi(x)$ – формальная собственная функция скалярного гамильтониана

$$-\partial^2 + f(x) + \lambda_0 \quad (17)$$

для того же самого спектрального числа λ . Для того чтобы вектор-функция (16) была нормируемой, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была нормируемой собственной функцией гамильтониана (17).

4.1.5. Случай $\mu_1 = \mu_2 = 0$. В этом случае общее ненулевое решение системы (12) имеет вид

$$r_0(x) = r_0, \quad v_1(x) = f(x), \quad v_2(x) \equiv v_3(x) \equiv 0,$$

где $r_0 \neq 0$ и $f(x)$ – произвольная постоянная и произвольная функция. Соответственно оператор симметрии R_a^+ и гамильтониан H_+ принимают вид

$$R_a^+ = r_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + f(x) I_2,$$

и для квадрата оператора симметрии справедливо равенство

$$(R_a^+)^2 = -r_0^2 I_2.$$

4.2. Антисимметричный оператор симметрии с недиагонализуемым старшим коэффициентом. Нетрудно проверить, что антисимметричный оператор симметрии R_a^+ с недиагонализуемым коэффициентом при ∂ для симметричного гамильтониана H_+ и сам этот гамильтониан можно представить в следующем общем виде:

$$R_a^+ = \begin{pmatrix} \mu \pm \nu i & \nu \\ \nu & \mu \mp \nu i \end{pmatrix} \partial + r_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} v_1 + v_2 & v_3 \\ v_3 & v_1 - v_2 \end{pmatrix},$$

где $\mu, \nu \neq 0$, $r_0 = r_0(x)$, $v_1 = v_1(x)$, $v_2 = v_2(x)$ и $v_3 = v_3(x)$ – некоторые постоянные и функции. Дальнейшее исследование проведем по отдельности для нескольких случаев и положим для простоты и без ограничения общности $\nu = 1$.

4.2.1. *Случай $r_0(x) \neq \text{const}$.* В этом случае общее решение уравнения $R_a^+ H_+ = H_+ R_a^+$ имеет вид

$$R_a^+ = \begin{pmatrix} \mu \pm i & 1 \\ 1 & \mu \mp i \end{pmatrix} \partial \mp i\mu\alpha \text{th}[\alpha(x - x_0)] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_+ = -I_2 \partial^2 + \frac{\alpha^2}{2\mu} \left[\gamma^2 \text{ch}^2[\alpha(x - x_0)] + \frac{\mu^2 + 1}{\text{ch}^2[\alpha(x - x_0)]} \right] \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\text{ch}^2[\alpha(x - x_0)]} \begin{pmatrix} 1 \pm i\mu & 0 \\ 0 & 1 \mp i\mu \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2,$$

где $x_0, \alpha \neq 0$, γ, λ_0 и $\mu \neq 0$ – произвольные постоянные, выбираемые так, чтобы функция $\text{ch}[\alpha(x - x_0)]$ не имела вещественных нулей. Базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = \text{ch}[\alpha(x - x_0)] \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{\text{ch}[\alpha(x - x_0)]} \begin{pmatrix} 1 \pm i\mu \\ \mp i - \mu \end{pmatrix},$$

из которых можно составить формальные собственные и присоединенные вектор-функции H_+ :

$$H_+[\gamma\Phi_1 \pm \Phi_2] = (\lambda_0 - \alpha^2 \mp \alpha^2\gamma)[\gamma\Phi_1 \pm \Phi_2], \quad \gamma \neq 0,$$

$$H_+\Phi_2 = (\lambda_0 - \alpha^2)\Phi_2, \quad [H_+ - (\lambda_0 - \alpha^2)I_2] \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2}\Phi_1 \end{pmatrix} = \Phi_2, \quad \gamma = 0.$$

При этом $\Phi_2(x)$ в случае $\gamma = 0$, $\text{Re } \alpha \neq 0$, очевидно, является нормируемой собственной вектор-функцией H_+ . Кроме того, нетрудно проверить, что выполняется равенство

$$[(R_a^+)^2 + \mu^2(H_+ - \lambda_0 I_2) - \mu^2 \alpha^2 I_2]^2 = -\mu^4 \alpha^2 [4(H_+ - \lambda_0 I_2) - \alpha^2 \gamma^2 I_2].$$

4.2.2. *Случай $r_0(x) = \text{const}$, $\mu \neq 0$.* В этом случае общее решение уравнения $R_a^+ H_+ = H_+ R_a^+$ имеет вид

$$R_a^+ = \begin{pmatrix} \mu \pm i & 1 \\ 1 & \mu \mp i \end{pmatrix} \partial + \mu k_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + \gamma e^{\pm 2ik_0 x} \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2,$$

где $\gamma, \lambda_0, \mu \neq 0$ и k_0 – произвольные постоянные. Базис в ядре оператора симметрии R_a^+ образуют вектор-функции

$$\Phi_1(x) = e^{\pm i k_0 x} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(x) = e^{\mp i k_0 x} \begin{pmatrix} 1 \pm i \mu \\ \mp i - \mu \end{pmatrix},$$

из которых можно составить формальные собственные и присоединенные вектор-функции H_+ :

$$H_+ \Phi_1 = (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_1, \quad H_+ \Phi_2 = (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_2, \quad \gamma = 0,$$

$$H_+ \Phi_1 = (\lambda_0 + k_0^2) \Phi_1, \quad [H_+ - (\lambda_0 + k_0^2) I_2] \left(-\frac{1}{2\gamma\mu} \Phi_2 \right) = \Phi_1, \quad \gamma \neq 0.$$

При этом нетрудно проверить, что

$$[(R_a^+)^2 + \mu^2 (H_+ - \lambda_0 I_2) + \mu^2 k_0^2 I_2]^2 = 4\mu^4 k_0^2 (H_+ - \lambda_0 I_2).$$

4.2.3. Случай $r_0(x) = \text{const}$, $\mu = 0$. В этом случае общее решение уравнения $R_a^+ H_+ = H_+ R_a^+$ имеет вид

$$R_a^+ = \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} \partial + r_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + f' \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} + (\lambda_0 \pm 2ir_0 f) I_2,$$

где λ_0, r_0 и $f = f(x)$ – произвольные постоянные и произвольная функция. Ядро R_a^+ при условии $r_0 \neq 0$ содержит только нулевую вектор-функцию, а при условии $r_0 = 0$ состоит из вектор-функций вида

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ C \mp i\varphi(x) \end{pmatrix},$$

где C и $\varphi(x)$ – произвольная постоянная и произвольная функция. При этом $\Phi(x)$, представляющие собой формальные собственные функции H_+ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= e^{ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, & H_+ \Phi &= (\lambda_0 + k^2) \Phi, \\ \Phi(x) &= C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[ax + b + C \int_0^x f(t) dt \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, & H_+ \Phi &= \lambda_0 \Phi, \end{aligned}$$

где a, b, C и k – произвольные постоянные. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$(R_a^+)^2 = -r_0^2 I_2.$$

4.3. Симметричный оператор симметрии. Симметричный оператор симметрии R_s^+ для симметричного гамильтониана H_+ и сам этот гамильтониан можно представить в следующем общем виде:

$$R_s^+ = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial + \begin{pmatrix} r_1(x) + r_2(x) & r_3(x) \\ r_3(x) & r_1(x) - r_2(x) \end{pmatrix},$$

$$H_+ = -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} v_1(x) + v_2(x) & v_3(x) \\ v_3(x) & v_1(x) - v_2(x) \end{pmatrix},$$

где μ , $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ и $v_3(x)$ – некоторые постоянная и функции. Дальнейшее исследование проведем по отдельности для нескольких случаев.

4.3.1. *Случай $\mu \neq 0$.* В этом случае общее решение уравнения $R_s^+ H_+ = H_+ R_s^+$ имеет вид

$$R_s^+ = \mu \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial + \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_2(x) & -f_1(x) \end{pmatrix} + C I_2 \right],$$

$$H_+ = -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_1'(x) & -f_1'(x) \\ -f_1'(x) & f_1^2(x) + f_2^2(x) - f_2'(x) \end{pmatrix} + \lambda_0 I_2,$$

где λ_0 и C – произвольные постоянные, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – произвольные функции. При этом операторы R_s^+ и H_+ связаны соотношением

$$\left[\frac{1}{\mu} R_s^+ - C I_2 \right]^2 = H_+ - \lambda_0 I_2.$$

4.3.2. *Случай $\mu = 0$, оператор R_s^+ диагонализуем.* В этом случае решение уравнения $R_s^+ H_+ = H_+ R_s^+$ имеет либо вид

$$R_s^+ = C I_2, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} f_1(x) & f_3(x) \\ f_3(x) & f_2(x) \end{pmatrix},$$

где C , $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ – произвольная постоянная и произвольные функции, либо вид

$$R_s^+ = A \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} A^t, \quad H_+ = A \left[-I_2 \partial^2 + \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & f_2(x) \end{pmatrix} \right] A^t,$$

где A – произвольная ортогональная матрица, $C_1, C_2 \neq C_1$ – произвольные постоянные, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – произвольные функции.

4.3.3. *Случай $\mu = 0$, оператор R_s^+ недиагонализуем.* В этом случае общее решение уравнения $R_s^+ H_+ = H_+ R_s^+$ имеет вид

$$R_s^+ = C_1 \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix} + C_2 I_2, \quad H_+ = -I_2 \partial^2 + v_1(x) I_2 + v_3(x) \begin{pmatrix} \pm i & 1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix},$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные, $v_1(x)$ и $v_3(x)$ – произвольные функции. Нетрудно увидеть, что ядро R_s^+ в случае $C_2 = 0$ состоит из вектор-функций вида

$$\Phi(x) = \varphi(x)(1, \mp i)^t,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция. При этом для того чтобы $\Phi(x)$ была формальной или нормируемой собственной вектор-функцией H_+ , очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была соответственно формальной или нормируемой собственной функцией скалярного гамильтониана $-\partial^2 + v_1(x)$ для того же спектрального числа. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$[R_s^+ - C_2 I_2]^2 = 0.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим несколько задач для дальнейших исследований.

1. Свойства матричного оператора скрытой симметрии по аналогии с работами [8], [50]–[52].
2. Определить (не)зависимость матричных сплетающих операторов по аналогии с [8] и найти критерий зависимости, а также ответы на вопросы о наибольшем числе независимых сплетающих операторов и о базисе таких операторов.
3. Разработать методы спектрального дизайна для матричных гамильтонианов с помощью сплетающих операторов произвольного порядка и, в частности, найти критерий, которому должны удовлетворять преобразующие вектор-функции для того, чтобы получаемый с их помощью гамильтониан имел желаемые изменения в спектре по сравнению с исходным гамильтонианом. Для этого нужно обобщить на матричный случай теорему об индексах и лемму 4, приведенные в работах [12], [13].
4. Найти критерии (не)приводимости матричных сплетающих операторов и провести классификацию неприводимых и абсолютно неприводимых [41] сплетающих операторов подобно тому, как это было сделано в работах [7], [10], [11], [14], [15], [53]–[59].

Список литературы

- [1] A. Lahiri, P. K. Roy, B. Bagchi, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:8 (1990), 1383–1456.
- [2] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.*, **251**:5–6 (1995), 267–385.
- [3] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin, 1996.
- [4] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, *J. Phys. A*, **45**:50 (2012), 503001, 62 pp., arXiv:1207.6799.
- [5] А. А. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, *ТМФ*, **61**:2 (1984), 183–198.
- [6] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, *Phys. Lett. A*, **174**:4 (1993), 273–279, arXiv:hep-th/9303005.
- [7] A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder, M. V. Ioffe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:18 (1995), 2683–2702, arXiv:hep-th/9404061.
- [8] A. A. Andrianov, A. V. Sokolov, *Nucl. Phys. B*, **660**:1–2 (2003), 25–50, arXiv:hep-th/0301062.
- [9] M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **327**:5–6 (2004), 425–432, arXiv:hep-th/0404078.

- [10] A. A. Andrianov, F. Cannata, *Math. Gen.*, **37**:43 (2004), 10297–10321, arXiv: hep-th/0407077.
- [11] A. A. Андрианов, A. B. Соколов, *Зап. науч. сем. ПОМИ*, **335** (2006), 22–49, arXiv: 0710.5738.
- [12] A. A. Andrianov, F. Cannata, A. V. Sokolov, *Nucl. Phys. B*, **773**:3 (2007), 107–136, arXiv: math-ph/0610024.
- [13] A. V. Sokolov, *Nucl. Phys. B*, **773**:3 (2007), 137–171, arXiv: math-ph/0610022.
- [14] A. B. Соколов, *Зап. науч. сем. ПОМИ*, **347** (2007), 214–237, arXiv: 0903.2835.
- [15] A. B. Соколов, *Зап. науч. сем. ПОМИ*, **374** (2010), 213–249.
- [16] Ю. А. Куперин, Д. М. Латыпов, С. П. Меркурьев, *ЯФ*, **55**:8 (1992), 2057–2060.
- [17] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, *Phys. Lett. B*, **205**:4 (1988), 507–510.
- [18] R. D. Amado, F. Cannata, J.-P. Dedonder, *Phys. Rev. A*, **38**:7 (1988), 3797–3800.
- [19] R. D. Amado, F. Cannata, J.-P. Dedonder, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:17 (1990), 3401–3415.
- [20] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, *Phys. Lett. B*, **255**:4 (1991), 543–549.
- [21] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov, L. Vinet, *Phys. Lett. B*, **272**:3–4 (1991), 297–304.
- [22] F. Cannata, M. V. Ioffe, *Phys. Lett. B*, **278**:4 (1992), 399–402.
- [23] F. Cannata, M. V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:3 (1993), L89–L92.
- [24] T. Fukui, *Phys. Lett. A*, **178**:1–2 (1993), 1–6.
- [25] L. V. Hau, J. A. Golovchenko, M. M. Burns, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:7 (1995), 1426–1429.
- [26] A. A. Andrianov, F. Cannata, D. N. Nishnianidze, M. V. Ioffe, *J. Phys. A*, **30**:14 (1997), 5037–5050, arXiv: quant-ph/9707004.
- [27] J.-M. Sparenberg, D. Baye, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:20 (1997), 3802–3805.
- [28] R. de Lima Rodrigues, P. B. da Silva Filho, A. N. Vaidya, *Phys. Rev. D*, **58**:12 (1998), 125023, 6 pp.
- [29] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:23 (1998), 5315–5326.
- [30] T. K. Das, B. Chakrabarti, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:12 (1999), 2387–2394.
- [31] V. M. Tkachuk, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **263**:4–6 (1999), 245–249, arXiv: quant-ph/9905102.
- [32] A. L. Sakhnovich, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:28 (2003), 7789–7802.
- [33] M. V. Ioffe, A. I. Neelov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:10 (2003), 2493–2506, arXiv: hep-th/0302004.
- [34] B. F. Samsonov, A. A. Pecheritsin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:1 (2004), 239–250, arXiv: quant-ph/0307145.
- [35] F. Cannata, M. V. Ioffe, A. I. Neelov, D. N. Nishnianidze, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:43 (2004), 10339–10348, arXiv: hep-th/0405108.
- [36] M. V. Ioffe, Ş. Kuru, J. Negro, L. M. Nieto, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:22 (2006), 6987–7001, arXiv: hep-th/0603005.
- [37] E. Ferraro, A. Messina, A. G. Nikitin, *Phys. Rev. A*, **81**:4 (2010), 042108, 8 pp., arXiv: 0909.5543.
- [38] A. A. Pecheritsin, A. M. Pupasov, B. F. Samsonov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:20 (2011), 205305, 15 pp., arXiv: 1102.5255.
- [39] A. G. Nikitin, Yu. Karadzhov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:30 (2011), 305204, 21 pp.; **44**:44, 445202, 24 pp., arXiv: 1107.2525.
- [40] T. Tanaka, *Modern Phys. Lett. A*, **27**:9 (2012), 1250051, 10 pp., arXiv: 1108.0480.
- [41] A. V. Sokolov, *Phys. Lett. A*, **377**:9 (2013), 655–662, arXiv: 1307.4449.
- [42] A. M. Pupasov-Maksimov, *Multichannel generalization of eigen-phase preserving supersymmetric transformations*, arXiv: 1301.4199.
- [43] F. Correa, V. Jakubský, *Phys. Rev. D*, **90**:12 (2014), 125003, 10 pp., arXiv: 1406.2997.

- [44] T. Tanaka, *Construction of quasi-solvable quantum mechanical matrix models: Lie superalgebra v.s. $\mathcal{N}$ -fold Supersymmetry*, arXiv:1409.5578.
- [45] D. Baye, J.-M. Sparenberg, A. M. Pupasov-Maksimov, B. F. Samsonov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:24 (2014), 243001, 75 pp., arXiv:1401.0439.
- [46] A. V. Sokolov, *J. Phys. A*, **48**:8 (2015), 085202, 39 pp., arXiv:1406.0191.
- [47] A. A. Andrianov, A. V. Sokolov, *Phys. Lett. A*, **379**:4 (2015), 279–283, arXiv:1409.6695.
- [48] А. А. Андрианов, М. В. Иоффе, Д. Н. Нишнанидзе, *ТМФ*, **104**:3 (1995), 463–478.
- [49] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [50] A. A. Andrianov, A. V. Sokolov, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, **50**:2 (2004), 539–546.
- [51] F. Correa, V. Jakubský, M. S. Plyushchay, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:48 (2008), 485303, 35 pp., arXiv:0806.1614.
- [52] A. A. Andrianov, A. V. Sokolov, *SIGMA*, **5** (2009), 064, 26 pp., arXiv:0906.0549.
- [53] B. F. Samsonov, *Phys. Lett. A*, **263**:4–6 (1999), 274–280, arXiv:quant-ph/9904009.
- [54] A. Khare, U. Sukhatme, *J. Math. Phys.*, **40**:11 (1999), 5473–5494, arXiv:quant-ph/9906044.
- [55] D. J. Fernández C, J. Negro, L. M. Nieto, *Phys. Lett. A*, **275**:5–6 (2000), 338–349.
- [56] D. J. Fernández C, B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz, B. F. Samsonov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:19 (2002), 4279–4291, arXiv:quant-ph/0303051.
- [57] D. J. Fernández C, R. Muñoz, A. Ramos, *Phys. Lett. A*, **308**:1 (2003), 11–16, arXiv:quant-ph/0212026.
- [58] D. J. Fernández C, E. Salinas-Hernández, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:10 (2003), 2537–2543, arXiv:quant-ph/0303123.
- [59] B. F. Samsonov, *Phys. Lett. A*, **358**:2 (2006), 105–114, arXiv:quant-ph/0602101.