Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Мележик, Адиабатическое представление в кулоновской задаче трех тел в пределе объединенного атома: ядерные ширины уровней энергии мезомолекулы $tt\mu$, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 76–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 06:15:26

© 2016 г.

В. С. Мележик^{*†}

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В КУЛОНОВСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ В ПРЕДЕЛЕ ОБЪЕДИНЕННОГО АТОМА: ЯДЕРНЫЕ ШИРИНЫ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ МЕЗОМОЛЕКУЛЫ $t\bar{t}\mu$

Исследуется асимптотика волновой функции системы трех кулоновских частиц в пределе объединенного атома в адиабатическом представлении задачи трех тел. Этот результат используется при расчете ядерных ширин уровней энергии мезомолекул. Обсуждаются особенности подхода применительно к возбужденным состояниям мезомолекулы $t\bar{t}\mu$ с ненулевым орбитальным моментом.

Ключевые слова: задача трех тел, задача двух кулоновских центров, адиабатическое представление, мюонный катализ, волновая функция мезомолекулы, ядерные реакции в мезомолекулах, астрофизический фактор.

DOI: 10.4213/tmf8978

Посвящается памяти Станислава Петровича Меркурьева

1. ВВЕДЕНИЕ

Станислав Петрович Меркурьев живо интересовался работами по мюонному катализу и совместно со своими сотрудниками и учениками получил ряд интересных результатов в этой области [1], [2]. В частности, актуальной проблемой в начале 80-х годов прошлого столетия была задача о вычислении волновых функций мезомолекул – связанных состояний системы трех кулоновских частиц (два ядра изотопов водорода и отрицательно заряженный мюон) – в пределе малых межъядерных расстояний. Эти асимптотики были необходимы для расчета скоростей ядерных реакций из различных состояний мезомолекул (ядерных ширин уровней энергии мезомолекул). К тому времени существовали оценки этих величин лишь для основных состояний мезомолекул, полученные в квазиклассическом приближении в работах Зельдовича и Герштейна [3], [4] и Джексона [5]. Однако для количественного описания процессов мюонного катализа в смеси дейтерия и трития требовалось решить

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: melezhik@theor.jinr.ru

[†]Университет “Дубна”, Дубна, Московская обл., Россия

задачу о ядерных ширинах уровней энергии возбужденных состояний мезомолекул, поскольку мюонный катализ идет через возбужденные состояния таких систем с ненулевым орбитальным моментом. В свою очередь, это потребовало исследования асимптотики волновых функций возбужденных состояний мезомолекул в пределе малых межъядерных расстояний. Такая задача была решена группой Пономарёва [6] в рамках адиабатического представления задачи трех тел [7], [8]. На основе этих результатов была разработана вычислительная схема для расчета ядерных ширин и сдвигов уровней энергии мезомолекул и рассчитаны скорости ядерных реакций из слабосвязанных состояний мезомолекул $dt\mu$ [9], [10] и $dd\mu$ [11], критически важные для описания резонансных процессов мюонного катализа. В работах [9], [10] было показано, что расчет ядерных ширин (скоростей ядерных реакций) и сдвигов уровней энергии мезомолекул можно свести к факторизационному соотношению, представляющему собой произведение константы ядерной реакции (астрофизического фактора) на квадрат волновой функции мезомолекулы в пределе объединенного атома. Астрофизические факторы извлекались при экстраполяции экспериментальных данных по ядерным реакциям “на лету” (ядерным реакциям в свободном пространстве) в область низких энергий, а волновые функции мезомолекулы рассчитывались в адиабатическом представлении задачи трех тел. Результаты этих расчетов впоследствии были подтверждены экспериментально [12]–[16]. В дальнейшем были также выполнены независимые расчеты асимптотик волновых функций мезомолекул в гиперсферическом [17] и вариационном [18], [19] подходах, которые независимо подтвердили результаты работ [6], [9]–[11]. Важный теоретический результат по ядерным реакциям в мезомолекулах изотопов водорода был получен в совместной работе Меркурьева и Пономарёва с соавторами [2], в которой астрофизический фактор для системы $pd\mu$ был получен при решении модифицированных уравнений Фаддеева в гиперсферическом представлении [1].

Относительно недавно в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ был выполнен эксперимент [15], в котором была измерена скорость ядерной реакции $\lambda_f^{\text{exp}} = (15.6 \pm 2.0) \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ в мезомолекуле $tt\mu$ из возбужденных состояний с орбитальным моментом $J = 1$, что прекрасно согласуется с определенным нами ранее теоретическим значением $\lambda_f^{\text{theor}} = 13 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ [20]–[22] и результатом $\lambda_f^{\text{exp}} = (15 \pm 2) \times 10^6 \text{ c}^{-1}$, полученным в независимом эксперименте Международной коллаборацией в Лаборатории PSI (Швейцария) [13]. Следует отметить, что в работах [21], [22] приведен лишь результат расчета, выполненного в диссертации автора [20], без подробного изложения использованной теоретической модели, которая существенно отличается от описанных в работах [9], [10] вычислительных схем для несимметричных мезомолекул ($dt\mu$ и $pd\mu$). Поскольку этот результат оказался неожиданно востребованным и актуальным для современных исследований [16], мне представляется интересным и уместным в статье, посвященной юбилею С.П. Меркурьева, подробно изложить вычислительную схему расчета скоростей ядерных реакций в мезомолекуле $tt\mu$ из возбужденных состояний с орбитальным моментом $J = 1$ в адиабатическом представлении задачи трех тел.

2. РАСЧЕТ ЯДЕРНЫХ ШИРИН УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ МЕЗОМОЛЕКУЛЫ $TT\mu$

В работах [9], [10] было показано, что скорость ядерной реакции $\lambda_f^{J\vartheta}$ из мезомолекулярного состояния с полным орбитальным моментом J и колебательным квантовым числом ϑ (ядерная ширина $\Gamma_f^{J\vartheta} = \hbar\lambda_f^{J\vartheta}$ уровня энергии $E_{J\vartheta}$) может быть

вычислена с хорошей точностью с помощью факторизационного соотношения

$$\lambda_f^{J\vartheta} = K_L \int d^3r |\Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R} = 0)|^2 \quad (1)$$

для мезомолекул с различными ядрами (например, $dt\mu$ или $pd\mu$), когда асимптотика волновой функции мезомолекулы в пределе малых межъядерных расстояний имеет s-волновой характер по переменной R относительного движения ядер и стремится при $R \rightarrow 0$ (и конечной величине r радиальной координаты мюона) к постоянной величине $\Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \sim R^L \rightarrow \text{const}$ при $L = 0$, где L – орбитальный момент относительного движения ядер в мезомолекуле. Здесь

$$K_0 = \lim_{v \rightarrow 0} v \sigma_0(v) C_0^{-2}(v) \quad (2)$$

– s-волновая константа ядерной реакции синтеза (астрофизический фактор), определяемая s-волновым низкоэнергетическим сечением ядерной реакции синтеза в свободном пространстве $\sigma_0(v)$ и гамовским фактором $C_0(v) = 2\pi\eta/(e^{2\pi\eta} - 1)$, где v – относительная скорость движения ядер, $\eta = \alpha c/v$, $\alpha = 1/137.036$ – постоянная тонкой структуры, c – скорость света в вакууме.

Однако вопрос о ядерных ширинах возбужденных состояний мезомолекул с одинаковыми ядрами (например, $dd\mu$ или $tt\mu$) и $J \neq 0$ требует специального рассмотрения, поскольку в этом случае L может принимать лишь значения $L = |J|, |J \pm 2|, \dots$ и $\Psi^J(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \sim R^J \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$ ($r > R$) [6], [8]. Получим здесь факторизационное соотношение, аналогичное формуле (1), для возбужденного состояния с $J = 1$ мезомолекулы $tt\mu$, в котором она образуется в процессах мюонного катализа [16].

Используя оптическую теорему, запишем в борновском приближении парциальное сечение $\sigma_p(E)$ для реакции синтеза ядер трития в свободном пространстве:

$$\sigma_p(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f_p(\theta = 0) = \frac{24M\pi}{k} \int_0^\infty \left[\frac{F_1(\eta, kR)}{kR} \right]^2 V_n(R) R^2 dR. \quad (3)$$

Здесь $f_p(\theta) = 3f_1P_1(\cos\theta)$, $P_1(\cos\theta)$ – полином Лежандра первой степени, $k = \sqrt{2ME}/\hbar$, E – энергия относительного движения, $M = M_t/2$ – приведенная масса ядер трития, $F_1(\eta, kR)|_{R \rightarrow 0} \sim kR$ – p-волновая кулоновская функция, регулярная в нуле, и $V_n(R)$ – короткодействующий потенциал, описывающий ядерное tt -взаимодействие. Воспользовавшись короткодействующим характером ядерных сил $V_n(R)$ по сравнению с характерным периодом T осцилляций волновой функции непрерывного спектра относительного движения ядер трития в низкоэнергетическом пределе ($T = 2\pi/k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 0$), находим

$$\begin{aligned} \sigma_p(E)|_{k \rightarrow 0} &= \frac{2M}{k} (12\pi k^2 C_1^2) \int_0^\infty R^4 V_n(R) dR = \\ &= \frac{2M}{k} \lim_{kR \rightarrow 0} \left| \frac{d}{dR} \psi_c^p(\eta, kR) \right|^2 \int_0^\infty R^4 V_n(R) dR = \\ &= v^{-1} \lim_{kR \rightarrow 0} \left| \frac{d}{dR} \psi_c^p(\eta, kR) \right|^2 K_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$K_1 = 2\hbar \int_0^\infty R^4 V_n(R) dR$$

– р-волновая константа ядерной реакции, а

$$\psi_c^p(\eta, kR) = \frac{1}{kR} (2L+1) i^L e^{i\delta_L^c} F_L(\eta, kR) P_L(\cos \theta)|_{kR \rightarrow 0} = 3i e^{i\delta_L^c} kR C_1(\eta) P_1(\cos \theta) \quad (5)$$

– р-волновая кулоновская волновая функция, описывающая относительное движение ядер в непрерывном спектре с орбитальным моментом $L = 1$, δ_L^c – кулоновская фаза рассеяния,

$$C_1(\eta) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi\eta(1+\eta^2)}{e^{2\pi\eta} - 1}},$$

а длинная черта над формулой означает интегрирование по углам θ и ϕ вектора $\mathbf{R}$. Вычислить *ab initio* константу ядерной реакции K_1 для шестинуклонной системы tt в настоящее время не представляется возможным. Однако ее можно извлечь из экспериментальных данных по дифференциальным сечениям $d\sigma(\theta, E)/d\Omega$ реакций синтеза ядер трития в низкоэнергетической области [23], [24], используя формулы (4) и (5):

$$K_1 = \frac{1}{9} \lim_{v \rightarrow 0} v \sigma_1(v) C_1^{-2}(\eta) (vM)^{-2}, \quad (6)$$

где

$$\sigma_1(v) = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(v, \theta = 0) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(v, \theta = \pi) - 2 \frac{d\sigma}{d\Omega}\left(v, \theta = \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Теперь применим факторизационное соотношение для вычисления скорости ядерной реакции $\lambda_f^{J\vartheta}$ из возбужденных состояний $(J\vartheta)$ в мезомолекуле $tt\mu$ с $J = 1$. При вычислении $\lambda_f^{J\vartheta}$ опять воспользуемся короткодействующим характером ядерного tt -взаимодействия по сравнению с дальнедействующими кулоновскими силами, связывающими трехчастичную систему $tt\mu$:

$$\begin{aligned} \lambda_f^{J\vartheta} &= \int_0^\infty \int \overline{|\Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R})|^2} V_n(R) R^2 d^3r dR = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \int \left| \frac{d}{dR} \Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right|^2 d^3r \int_0^\infty R^4 V_n(R) dR = \\ &= K_1 \lim_{R \rightarrow 0} \int \left| \frac{d}{dR} \Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right|^2 d^3r = K_1 \rho_{J\vartheta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления константы

$$\rho_{J\vartheta} = \lim_{R \rightarrow 0} \int \left| \frac{d}{dR} \Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right|^2 d^3r$$

необходимо знать асимптотику волновой функции $\Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ связанного состояния трех кулоновских частиц $tt\mu$ в пределе малых межъядерных состояний. Эта задача

была исследована в адиабатическом представлении задачи трех тел в работе [6]. Следуя [6], получим формулу для искомой константы $\rho_{J\vartheta}$ в мезомолекуле $tt\mu$ для возбужденных состояний с $J = 1$.

3. АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ МЕЗОМОЛЕКУЛЫ $TT\mu$ В ПРЕДЕЛЕ МАЛЫХ МЕЖЪЯДЕРНЫХ РАССТОЯНИЙ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

В адиабатическом представлении задачи трех тел [7], [8] в пределе $R \rightarrow 0$ ($r > R$) объединенного атома волновая функция трех кулоновских частиц $tt\mu$ в возбужденном вращательном состоянии $J = 1$ принимает вид [6]

$$\Psi_{m_J}^J(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = R^{-1} \sum_{N,l} \mathcal{R}_{Nl}(r) \sum_{m=0}^J \Psi_{mm_J}^{lJ}(\vartheta, \varphi, \theta, \phi) \chi_{Nlm}^J(R). \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{R}_{Nl}(r)$ – радиальная кулоновская функция водородоподобного атома с зарядом ядра $z = z_t + z_\mu = +2e$, функции $\chi_{Nlm}^J(R)$ описывают относительное движение ядер трития в мезомолекуле $tt\mu$, причем в суммировании по квантовым числам N, l, m присутствуют лишь четные l начиная с $l = 0$ вследствие симметрии волновой функции мезомолекулы, l – квантовые числа оператора углового момента мюона, которые при фиксированном J определяются правилом векторного сложения $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{l}$. Угловая часть $\Psi_{mm_J}^{lJ}(\vartheta, \varphi, \theta, \phi)$ определена соотношением

$$\begin{aligned} \langle \vartheta \varphi \theta \phi | lmJm_J \rangle &\equiv \Psi_{mm_J}^{lJ}(\vartheta, \varphi, \theta, \phi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{0m})}} \{ Y_{lm}(\vartheta, \varphi) D_{mm_J}^J(\phi, \theta, 0) + Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) D_{-mm_J}^J(\phi, \theta, 0) \}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ – сферические гармоники, $D_{mm_J}^J(\phi, \theta, 0)$ – нормированные D -функции Вигнера, а m_J – собственные значения оператора проекции J_Z полного момента импульса мезомолекулы $\mathbf{J}$ на ось OZ лабораторной системы координат, в которой направление вектора $\mathbf{R}$, соединяющего ядра трития, задается углами θ и ϕ . Углы ϑ и φ задают угловые координаты радиус-вектора мюона $\mathbf{r}$ во вращающейся системе координат, жестко связанной с межъядерной осью R , а квантовое число m является собственным значением оператора проекции l_z момента импульса мюона $\mathbf{l}$ на ось Oz , совпадающую с межъядерной осью R вращающейся системы координат.

Здесь следует отметить важное обстоятельство, которое состоит в том, что асимптотика (8) получена формальным предельным переходом $R \rightarrow 0$ ($r > R$) для волновой функции мезомолекулы $\Psi_{m_1}^1(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, записанной в адиабатическом представлении задачи трех тел:

$$\begin{aligned} \Psi_{m_1}^1(\mathbf{r}, \mathbf{R}) &= \frac{1}{R} \sum_{j,m} \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{0m})}} \{ \psi_{jm}(\mathbf{r}; R) D_{mm_1}^1(\phi, \theta, 0) + \\ &\quad + \psi_{j-m}(\mathbf{r}; R) D_{-mm_1}^1(\phi, \theta, 0) \} \chi_{jm}^1(R), \end{aligned} \quad (10)$$

в котором базисные функции $\psi_{jm}(\mathbf{r}; R)$ (решения квантово-механической задачи двух центров [25]) заданы во вращающейся системе координат, связанной с межъядерной осью R . Однако в пределе объединенного атома $R \rightarrow 0$ ($r > R$) межъядерная ось (ось Oz вращающейся системы координат) исчезает, и возникает вопрос согласования асимптотики (8) волновой функции задачи трех тел в адиабатическом представлении с физическими граничными условиями в этом пределе. Правильные физические условия в пределе объединенного атома можно задать в лабораторной системе координат, в которой угловые переменные радиус-вектора мюона $\mathbf{r}$ обозначим как $\tilde{\vartheta}$ и $\tilde{\varphi}$. Тогда угловая часть волновой функции мезомолекулы в лабораторной системе координат принимает вид

$$\tilde{\Psi}_{m_1}^{(lL)1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \theta, \phi) = \sum_{m_l=-l}^l C_{lm_l L m_L}^{1m_1} Y_{lm_l}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) Y_{L m_L}(\theta, \phi), \quad (11)$$

где $C_{lm_l L m_L}^{1m_1}$ – коэффициенты Клебша–Гордона. Функция $\tilde{\Psi}_{m_1}^{(lL)1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \theta, \phi)$ связана с функцией $\Psi_{mm_1}^{l1}(\vartheta, \varphi, \theta, \phi)$, заданной во вращающейся системе координат, ортогональным преобразованием Чэнга–Фано [26]

$$\Psi_{mm_1}^{l1}(\vartheta, \varphi, \theta, \phi) = \sum_{L=|1-l|}^{1+l} \tilde{\Psi}_{m_1}^{(lL)1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \theta, \phi) G_{mL}^{l1}, \quad (12)$$

где

$$G_{mL}^{l1} = (-1)^{l+m} \frac{1 + (-1)^{l+L}}{\sqrt{2(1 + \delta_{m0})}} C_{lm1-m}^{L0}.$$

Из соотношения (12) следует важное свойство преобразования G_{mL}^{l1} : оно диагонализует кориолисово взаимодействие

$$\langle lm1m_1 | (1 - 1)^2 | l m' 1 m_1 \rangle = \sum_{L=|1-l|}^{1+l} G_{mL}^{l1} L(L+1) G_{m'L}^{l1}, \quad (13)$$

поскольку последнее возникает как следствие перехода из лабораторной системы координат во вращающуюся систему координат при описании системы трех тел.

Подставляя (12) в соотношение (8), находим асимптотику волновой функции мезомолекулы $t\mu$ в пределе объединенного атома в лабораторной системе координат:

$$\Psi_{m_1}^1(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = R^{-1} \sum_{N,l} \mathcal{R}_{Nl}(r) \sum_{L=|1-l|}^{1+L} \tilde{\Psi}_{m_1}^{(lL)1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}, \theta, \phi) \sum_{m=0}^1 G_{mL}^{l1} \chi_{Nlm}^1(R). \quad (14)$$

Далее задача сводится к нахождению асимптотики коэффициентов $\chi_{Nlm}^1(R)$ в адиабатическом разложении (8) в пределе $R \rightarrow 0$.

3.1. Асимптотика $\chi_{Nlm}(R)$ при $R \rightarrow 0$. Коэффициенты $\chi_{Nlm}^1(R)$ находятся при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в единицах $e = \hbar = m_a = 1$, $m_a^{-1} = m_\mu^{-1} + M_t^{-1}$, m_μ – масса мюона)

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dR^2} + 2ME_{Jv} \right) - U_{ii}^J(R) \right\} \chi_i^J(R) = \sum_{j \neq i} U_{ij}(R) \chi_j^J(R), \quad (15)$$

$$U_{ii}^J(R) = \frac{J(J+1) - 2m^2}{R^2} + \frac{2M}{R} + U_{ii}(R)$$

с граничными условиями

$$\chi_i(0) = \chi_i(R_m \rightarrow \infty) = 0$$

и условием нормировки

$$\sum_i \int_0^{R_m} \chi_i^2(R) dR = 1.$$

Здесь $M = M_t/2$ – приведенная масса ядер трития, $U_{ij}(R)$ – эффективные потенциалы задачи трех тел (матричные элементы гамильтониана задачи трех тел), вычисленные в работах [27], [28] в адиабатическом представлении задачи трех тел, $\sum_{j \neq i}$ означает суммирование по дискретному (Nlm) и непрерывному (klm) спектрам задачи двух кулоновских центров [25].

В работе [6] асимптотика решений $\chi_i(R)$ системы уравнений (15) при $R \rightarrow 0$ была найдена с помощью преобразования Чэнга–Фано [26], которое связывает между собой угловые части волновой функции системы трех тел в лабораторной и вращающейся системах координат. Следуя идее этой работы, кратко изложим здесь методику нахождения главного члена асимптотики функций $\chi_j^J(R \rightarrow 0)$ для мезомолекулы $tt\mu$ с орбитальным моментом $J = 1$.

В работе [6] было показано, что, сохраняя главный член асимптотики эффективных потенциалов [29], систему (15) при $R \rightarrow 0$ можно свести к виду

$$\sum_{m'} \left\{ \delta_{mm'} \frac{d^2}{dR^2} - \frac{1}{R^2} \langle imJm_J | (\mathbf{J} - \mathbf{1})^2 | im'Jm_J \rangle \right\} \chi_{im'}^J(R) = 0, \quad (16)$$

где $0 \leq (m, m') \leq \min(l, J)$, а матрица $R^{-2} \langle imJm_J | (\mathbf{J} - \mathbf{1})^2 | im'Jm_J \rangle$ кориолисова взаимодействия диагонализуетсся с помощью ортогонального преобразования Чэнга–Фано:

$$\langle imJm_J | (\mathbf{J} - \mathbf{1})^2 | im'Jm_J \rangle = \sum_{L=|J-l|}^{J+l} G_{mL}^{lJ} L(L+1) G_{m'L}^{lJ}. \quad (17)$$

Учитывая это обстоятельство, ищем решение системы уравнений (16) в виде

$$\chi_{im}^J(R) = \sum_{\alpha} G_{m\alpha}^{lJ} R^{\alpha+1} B_{Nl}^{\alpha J}, \quad (18)$$

где $B_{Nl}^{\alpha J}$ – искомые неопределенные коэффициенты. Подставив (18) в систему уравнений (16) и учитывая (17), а также свойство ортогональности преобразования G_{mL}^{lJ} , получаем

$$G_{m\alpha}^{lJ} \{\alpha(\alpha + 1) - L(L + 1)\} = 0, \quad (19)$$

откуда находим $\alpha = L$ для регулярного решения при $R \rightarrow 0$ и $\alpha = -(L + 1)$ для нерегулярного решения. Поскольку нас интересует лишь регулярное при $R \rightarrow 0$ решение, асимптотику функций $\chi_{Nlm}^J(R)$ представим в виде

$$\chi_{Nlm}^J = \sum_{L=|J-l|}^{J+l} G_{mL}^{lJ} R^{L+1} B_{Nl}^{LJ}.$$

Отсюда находим главный член асимптотики при $R \rightarrow 0$ для функций $\chi_{Nlm}^J(R)$:

$$\chi_{Nlm}^J(R) = G_{m|J-l|}^{lJ} R^{|J-l|+1} B_{Nl}^{|J-l|J}, \quad (20)$$

где константу $B_{Nl}^{|J-l|J}$ можно определить по формуле

$$B_{Nl}^{|J-l|J} = \frac{1}{G_{m|J-l|}^{lJ}} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\chi_{Nlm}^J(R)}{R^{|J-l|+1}}, \quad (21)$$

используя численное решение системы дифференциальных уравнений (15). Здесь следует подчеркнуть то обстоятельство, что для получения правильной зависимости $\chi_{Nlm}^J(R)$ от R при $R \rightarrow 0$ необходимо удерживать в разложении (8) по адиабатическому базису все базисные функции с $m \leq \min(l, J)$.

3.2. Вычисление интеграла $\rho_{J\vartheta}$ в уравнении (7) для мезомолекулы $tt\mu$. Подставив найденную асимптотику (20) для функции $\chi_{Nlm}^J(R)$ в формулу (14) и воспользовавшись свойством ортогональности преобразования G_{m0}^{lJ} , найдем асимптотику волновой функции мезомолекулы $tt\mu$ в состоянии $J = 1$ при $R \rightarrow 0$ ($r > R$):

$$\Psi_{m_1}^1(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = R_{10}(r) Y_{00}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\phi}) Y_{1m_1}(\theta, \phi) B_{10}^{11} R. \quad (22)$$

Используя полученное выражение, вычислим интеграл $\rho_{J=1, \vartheta}$, необходимый для нахождения скоростей ядерных реакций (7):

$$\rho_{J\vartheta} = \lim_{R \rightarrow 0} \int \left| \frac{d}{dR} \Psi^{J\vartheta}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right|^2 d^3r = \frac{1}{4\pi} [B_{10}^{11}]^2, \quad (23)$$

где $B_{10}^{11} = \lim_{R \rightarrow 0} \chi_{100}^{1\vartheta}(R)/R^2$ (при получении B_{10}^{11} было учтено, что в формуле (21) $G_{11}^{01} = 1$). Для мезомолекулы $tt\mu$ имеем $\rho_{10} = 5.23 \times 10^{-17} \text{ фм}^{-5}$ и $\rho_{11} = 4.83 \times 10^{-17} \text{ фм}^{-5}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найденная асимптотика (22) волновой функции трехтельной кулоновской системы $tt\mu$ была успешно использована для расчета скоростей ядерных реакций $\lambda_f^{J\vartheta}$ из возбужденных состояний этой мезомолекулы с орбитальным моментом $J = 1$. Используя выражение (23) для интеграла $\rho_{J\vartheta}$ в формуле (7), находим

$$\lambda_f^{J\vartheta} = \frac{4}{3} K_1 \rho_{J\vartheta}. \quad (24)$$

Здесь множитель $4/3$ учитывает то обстоятельство, что в мезомолекуле ядерная реакция идет из определенного спинового состояния I ядер трития ($I = S_t + S_t = 1$ для $J = 1$), а константа K_1 ядерной реакции в р-волне между ядрами трития “на лету” извлекалась из экспериментальных данных по сечениям tt -реакции, полученным с неполяризованными ядрами трития.

Формула (24) оказалась очень востребованной в связи с работами по мюонно-му катализу, где разработанная экспериментальная методика позволила измерить напрямую скорость ядерной реакции в мезомолекуле $tt\mu$ из возбужденных состояний с орбитальным моментом $J = 1$: $\lambda_f^{\text{exp}} = (15 \pm 2) \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ [13] и $\lambda_f^{\text{exp}} = (15.6 \pm 2.0) \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ [15], [16]. Эти значения оказались очень близкими к нашим расчетам $\lambda_f^{\text{theor}} = 13 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ [20]–[22], выполненным в адиабатическом представлении задачи трех тел по изложенной выше схеме. Удивительно, но более поздние вариационные расчеты волновых функций $tt\mu$, выполненные группой Монхорста [18], и расчеты с использованием разложения по гауссовому базису, выполненные группой Камимуры [30], дают значения интегралов $\rho_{J=1,\vartheta}$, в несколько раз превышающие вычисленное нами значение [20], [22] и, как следствие, приводящие к существенному превышению рассчитанной скорости ядерной реакции λ_f^{theor} , экспериментального значения λ_f^{exp} и нашего расчета величины λ_f^{theor} , выполненного в адиабатическом представлении задачи трех тел.

Во всех этих расчетах использовалась одна и та же константа ядерной реакции (6), извлекаемая путем экстраполяции дифференциальных сечений tt -реакции “на лету” к нулевой энергии относительного движения ядер. Для этой реакции прямой расчет ядерной константы K_1 , в отличие от малочастичной трехнуклонной системы pd [2], в настоящее время невозможен, а надежная экспериментальная информация по угловому распределению продуктов реакции в низкоэнергетической области отсутствует. Действительно, константа $K_1 = 4.3 \times 10^{23} \text{ фм}^5 \text{ с}^{-1}$ была вычислена на основе экспериментальных данных по дифференциальному сечению tt -реакции при $E = 0.65 \text{ МэВ}$, приведенных в работе [24]. Найденное значение согласуется с оценкой, полученной в работе [25] для коэффициента анизотропии в tt -реакции при существенно более низкой энергии ($E = 0.04 \text{ МэВ}$), где, однако, экспериментальные ошибки составляют $\sim 50\%$.

С момента выполнения работ [24], [25] ситуация по экспериментальному изучению tt -реакции “на лету” не улучшилась [31], однако достигнут существенный прогресс в измерении скоростей ядерных реакций в мезомолекулах $\lambda_f^{J\vartheta}$, в частности в мезомолекуле $tt\mu$ [16]. Это позволяет рассчитывать константы ядерных реакций K_1 по формулам типа (24), (23), используя измеренные значения $\lambda_f^{J\vartheta}$ и асимптотику

волновых функций мезомолекул в пределе объединенного атома вместо малоэффективной при низких энергиях процедуры извлечения K_1 из экспериментальных данных по ядерным реакциям синтеза “на лету”. В этой связи найденная в рамках адиабатического представления асимптотика волновых функций мезомолекул в пределе объединенного атома может быть использована в качестве “контрольной точки” при уточнении интегралов $\rho_{J\vartheta}$ в рамках альтернативных подходов, например вариационного [19] или адиабатического гиперсферического подходов [17]. Нахождение констант ядерных реакций синтеза является актуальной задачей для построения различных моделей в ядерной астрофизике [31].

Список литературы

- [1] V. V. Gusev, I. V. Puzynin, V. V. Kostrykin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev, L. I. Ponomarev, *Few-Body Systems*, **9**:2–3 (1990), 137–153.
- [2] L. N. Bogdanova, Yu. A. Kuperin, A. A. Kvitsinsky, V. E. Markushin, S. P. Merkuriev, L. I. Ponomarev, *Muon Catalyzed Fusion*, **3** (1989), 377–387.
- [3] Я. Б. Зельдович, *Докл. АН СССР*, **95** (1954), 493–495.
- [4] Я. Б. Зельдович, С. С. Герштейн, *УФН*, **71**:8 (1960), 581–630.
- [5] J. D. Jackson, *Phys. Rev.*, **106**:2 (1957), 330–339.
- [6] С. И. Виноцкий, В. С. Мележик, Л. И. Пономарёв, *ЯФ*, **36**:2(8) (1982), 465–473.
- [7] С. И. Виноцкий, Л. И. Пономарёв, *ЯФ*, **20**:3 (1974), 576–588.
- [8] С. И. Виноцкий, Л. И. Пономарёв, *ЭЧАЯ*, **13**:6 (1982), 1336–1418.
- [9] Л. Н. Богданова, В. Е. Маркушин, В. С. Мележик, Л. И. Пономарёв, *ЯФ*, **34**:6(11) (1981), 1191–1206.
- [10] Л. Н. Богданова, В. Е. Маркушин, В. С. Мележик, *ЖЭТФ*, **81**:3 (1981), 829–841.
- [11] L. N. Bogdanova, V. E. Markushin, V. S. Melezhik, L. I. Ponomarev, *Phys. Lett. B*, **115**:3 (1982), 171–173; *Phys. Lett. B*, **167**:4 (1986), 485–486.
- [12] D. V. Balin, E. M. Maev, V. I. Medvedev, G. G. Semenchuk, Yu. V. Smirenin, A. A. Vorobyov, An. A. Vorobyov, Yu. K. Zalite, *Phys. Lett. B*, **141**:3–4 (1984), 173–176.
- [13] W. H. Breunlich, M. Cargnelli, P. Kammel et al., *Muon Catalyzed Fusion*, **1**:1–3 (1987), 121–129.
- [14] T. Matsuzaki, K. Nagamine, K. Ishida et al., *Hyperfine Interactions*, **118**:1–4 (1999), 229–234.
- [15] L. N. Bogdanova, V. R. Bom, A. M. Demin et al., *ЖЭТФ*, **135**:2 (2009), 242–252.
- [16] Л. Н. Богданова, Д. Л. Дёмин, В. В. Фильченков, *ЯФ*, **78**:1–2 (2015), 12–22.
- [17] D. I. Abramov, L. N. Bogdanova, V. V. Gusev, L. I. Ponomarev, *Hyperfine Interactions*, **101**:1 (1996), 301–306.
- [18] S. A. Alexander, P. Froelich, H. J. Monkhorst, *Phys. Rev. A*, **41**:5 (1990), 2854–2857; Erratum, **43**:5 (1991), 2585.
- [19] L. N. Bogdanova, V. I. Korobov, L. I. Ponomarev, *Hyperfine Interactions*, **118**:1 (1999), 183–186.
- [20] В. С. Мележик, *Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук*, Препринт Р-81-463, ОИЯИ, Дубна, 1981.
- [21] L. N. Bogdanova, V. E. Markushin, V. S. Melezhik, “Abstract”, *International Symposium on Muon Catalyzed Fusion (μCF -87)*, Nuclear Physics Institute, Leningrad, 1987, 147.
- [22] L. N. Bogdanova, *Muon Catalyzed Fusion*, **3** (1988), 359–376.
- [23] H. M. Agnew, W. T. Leland, H. V. Argo, R. W. Crews, A. H. Hemmendinger, W. E. Scott, R. F. Taschek, *Phys. Rev.*, **84**:4 (1951), 862–863.
- [24] В. И. Серов, С. Н. Абрамович, Л. А. Моркин, *Атомная энергия*, **42** (1977), 59–61.

- [25] И. В. Комаров, Л. И. Пономарёв, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, М., 1976.
- [26] E. S. Cheng, U. Fano, *Phys. Rev. A*, **6**:1 (1972), 173–185.
- [27] L. I. Ponomarev, T. P. Puzynina, N. F. Truskova, *J. Phys. B*, **11**:22 (1978), 3861–3874.
- [28] L. I. Ponomarev, T. P. Puzynina, L. N. Somov, *J. Phys. B*, **10**:7 (1977), 1335–1343.
- [29] M. P. Faifman, L. I. Ponomarev, S. I. Vinitsky, *J. Phys. B*, **9**:13 (1976), 2255–2268.
- [30] E. Hiyama, M. Kamimura, Y. Hamahata, Y. Kino, *RIKEN Rev.*, **20** (1999), 34.
- [31] С. Н. Абрамович, С. М. Таова, *Изв. РАН. Сер. Физ.*, **76**:4 (2012), 446–452.