Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Монахов, Супералгебраическое представление матриц Дирака, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 87–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:21:33

© 2016 г.

В. В. Монахов*

СУПЕРАЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ ДИРАКА

Рассматривается клиффордово расширение алгебры Грассмана, в котором операторы построены из произведений грассмановых переменных и производных по ним. Показано, что в этой алгебре существует подалгебра, изоморфная матричной, и что в ней дополнительно имеются операторы обобщенной матричной алгебры, перемешивающие состояния с разным числом грассмановых переменных. Показано, что данные операторы являются расширением понятия спин-тензоров на случай суперпространства. Построено представление матриц Дирака в виде операторов обобщенной матричной алгебры.

Ключевые слова: алгебра Грассмана, алгебра Клиффорда, квантовая теория поля, обобщенная матричная алгебра, матрицы Дирака, спиноры, суперпространство, суперсимметрия.

DOI: 10.4213/tmf8979

Спиноры играют важную роль в физике, особенно в квантовой теории поля. Современная формулировка теории спиноров обычно излагается на основе математического аппарата алгебр Клиффорда [1]–[5]. Спинорные группы рассматриваются как подгруппы группы Лишница, которая в свою очередь есть подгруппа группы Клиффорда [5]. Спиноры являются линейными представлениями спинорных групп (вращений и отражений клиффордовых векторов). В связи с изоморфизмом между алгебрами Клиффорда и матричными алгебрами [1]–[5] часто используется матричное представление операторов вращения и отражения. При этом матрицы Дирака соответствуют образующим алгебры Клиффорда – клиффордовым векторам.

Необходимо отметить, что в обычном формализме большинство операций проводится со спинорными координатами, а не с самими спинорами как алгебраическими величинами, и часто именно набор спинорных координат называют спинорами, а алгеброй спиноров – правилами работы с этими координатами [6], [7]. Но в настоящей работе спинорные координаты рассматриваются как коэффициенты разложения по базисным спинорам.

В работах [1], [2] спинорам ставятся в соответствие элементы алгебры Клиффорда, которая считается первичной, и показывается, что алгебра Клиффорда матриц

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: v.v.monahov@spbu.ru

Дирака является вторичной и эквивалентна алгебре операторов линейных преобразований первичной алгебры Клиффорда. В то же время в квантовой теории поля спиноры естественно рассматривать как нечетные элементы алгебры, поэтому отождествление единицы первичной алгебры Клиффорда со спинором порождает непреодолимые сложности. В связи с этим будем сопоставлять спинорам грассмановы переменные.

В матричном представлении спинорам отвечают столбцы, на которые умножаются матрицы, соответствующие клиффордовым числам (элементам алгебры Клиффорда). Обозначим базисные спиноры как

$$\theta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \theta^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда любой спинор может быть представлен в виде

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \xi_\alpha \theta^\alpha.$$

Здесь и далее по повторяющимся буквенным индексам подразумевается суммирование.

Введем обычным образом [8] производные $\partial/\partial\theta^\alpha$ по антикоммутирующим переменным θ^α . Они удовлетворяют антикоммутационному соотношению

$$\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} + \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \theta^\alpha = \delta^\alpha_\beta,$$

где δ^α_β – символ Кронекера.

Следует отметить, что величины θ^α и $\partial/\partial\theta^\beta$ можно рассматривать как чисто алгебраические безотносительно к существованию n -мерного пространства и вращений в нем, порождающих спиноры как представление группы вращений.

Алгебра с образующими θ^α и $\partial/\partial\theta^\beta$ хорошо известна – это операторная алгебра Клиффорда [9]. Ее можно назвать алгеброй операторов рождения и уничтожения грассмановых переменных, но для краткости будем ее называть клиффордовым расширением алгебры Грассмана.

С помощью замены переменных

$$\hat{\tau}_+^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\theta^\alpha + \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \right), \quad \hat{\tau}_-^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\theta^\alpha - \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \right) \quad (1)$$

получаются линейно независимые антикоммутирующие друг с другом традиционные образующие алгебры Клиффорда с квадратом, равным 1 или -1 . Шляпки над элементами алгебры будем ставить для того, чтобы подчеркнуть, что это операторы умножения на элементы, стоящие справа. Поскольку производные всегда являются такими операторами, ставить над ними шляпки не будем. Для величин θ^α , как

правило, понятен контекст, когда они рассматриваются как операторы (если умножаются на какую-либо величину, стоящую справа), поэтому над ними также обычно не будем ставить шляпки.

Замена переменных (1) не очень удобна, так как затрудняет исследование преобразований величин θ^α , являющихся образующими первичной алгебры – алгебры грасмановых переменных. Например, образующие (1) перемешивают 1 и θ^α . Грасмановы переменные θ^α естественно рассматривать как переменные, соответствующие фермионам в квантовой теории поля. Поэтому далее будем работать только с величинами θ^α и $\partial/\partial\theta^\beta$. Обозначим как M матрицу $M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_1^2 \\ m_2^1 & m_2^2 \end{pmatrix}$. Матрице M произвольных преобразований спинора ξ с помощью операторов $\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}$, переводящих элемент θ^β в θ^α , можно сопоставить элемент

$$\widetilde{M} = m_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}. \quad (2)$$

Однако при произведении элементов вида (2) появляются вторые производные. Действительно, пусть имеются “матрицы” $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$:

$$\widetilde{A} = a_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}, \quad \widetilde{B} = b_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}.$$

Тогда с учетом (2) мы имеем

$$\widetilde{A}\widetilde{B} = a_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} b_\gamma{}^\delta \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial\theta^\delta}. \quad (3)$$

В данном равенстве результат отличается от того, что должно быть при перемножении матриц, на слагаемое, в которое входят вторые производные. То есть оператор $\widetilde{A}\widetilde{B}$ приводит не только к преобразованиям элементов θ^α , но и к нетривиальным преобразованиям элементов $\theta^\alpha\theta^\beta$. Проблема может быть решена путем использования проектора на векторное пространство ${}^1\Lambda$, натянутое на образующие θ^α .

Рассмотрим сначала случай столбца из двух элементов. В этом случае вектор состояния общего вида имеет форму

$$\Psi = \psi_0 + \psi_\alpha \theta^\alpha + \psi_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta, \quad (4)$$

где можно считать, что $\psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}$. Легко проверить, что оператор

$$\widehat{P}_2 = \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^2} \frac{\partial}{\partial\theta^1}$$

является проектором на векторное пространство ${}^2\Lambda$, натянутое на грасманов элемент $\theta^1\theta^2$. Если обозначить пространство скаляров как ${}^0\Lambda$, то $\widehat{1} - \widehat{P}_2$ есть проектор на ${}^0\Lambda \oplus {}^1\Lambda$. Оператор

$$\widehat{E} = \theta^1 \frac{\partial}{\partial\theta^1} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

аннулирует скаляры и оставляет неизменными θ_1 и θ_2 , т.е. является проектором пространства ${}^0\Lambda \oplus {}^1\Lambda$ на ${}^1\Lambda$. Тогда оператор

$$\widehat{P}_1 = \widehat{E}(\widehat{1} - \widehat{P}_2) = \theta^1 \frac{\partial}{\partial\theta^1} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^2} - 2\theta^1\theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^2} \frac{\partial}{\partial\theta^1}$$

будет проецировать Ψ на ${}^1\Lambda$.

Помимо проекторов $\hat{P}_2$ и $\hat{P}_1$, также полезно ввести проектор $\hat{P}_0$ на подпространство скаляров в векторах состояния. Поскольку из соотношения (4) следует, что $\hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{1}$, получаем

$$\hat{P}_0 = \hat{1} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 = \hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta^1}.$$

Введем теперь элемент, модифицирующий равенство (2) так, чтобы при действии этого элемента на Ψ преобразовывались только элементы из ${}^1\Lambda$, а элементы из ${}^0\Lambda$ и ${}^2\Lambda$ аннулировались. Обозначим символом $\hat{}$ справа операцию умножения справа на проектор $\hat{P}_1$ и при этом уберем значок тильды над элементом, чтобы не загромождать запись:

$$M^{\hat{}} = \widetilde{M} \hat{P}_1 = m_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \hat{P}_1. \quad (5)$$

Положим $\text{Sp}(\widetilde{M}) = m_{\alpha}^{\alpha}$. Очевидно, что так определенный след элемента $\widetilde{M}$ из (2) совпадает со значением следа матрицы M , и далее мы их не будем различать. Тогда

$$\begin{aligned} M^{\hat{}} &= m_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} - 2\theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) = \\ &= m_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} + \text{Sp}(M) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Для произведения элементов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ вида (2), соответствующих матрицам, после умножения справа на $\hat{P}_1$, получаем

$$\tilde{A} \tilde{B} \hat{P}_1 = a_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \left(b_{\gamma}^{\delta} \theta^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta^{\delta}} + \text{Sp}(B) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right),$$

а после раскрытия скобок и учета действия производной имеем

$$\tilde{A} \tilde{B} \hat{P}_1 = a_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\delta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\delta}} + \text{Sp}(AB) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2}. \quad (6)$$

Таким образом, произведению произвольного числа матриц, начиная с одной, можно однозначно сопоставить представление результирующей матрицы как элемента вида

$$M^{\hat{}} = m_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} + \text{Sp}(M) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2}. \quad (7)$$

Легко показать, что $\widetilde{M} \hat{P}_1 = \hat{P}_1 \widetilde{M}$. Поскольку $(\hat{P}_1)^2 = \hat{P}_1$, из равенства (6) следует, что

$$A^{\hat{}} B^{\hat{}} = (AB)^{\hat{}}. \quad (8)$$

Введем по определению транспонированный к столбцу ξ элемент ξ^T как оператор-строку с числами ξ_1 и ξ_2 ,

$$\xi^T = \xi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} = (\xi_1 \quad \xi_2),$$

и по определению положим $(\xi^T)^T = \xi$. При транспонировании произведения ab любых элементов алгебры a и b положим по определению

$$(ab)^T = b^T a^T. \quad (9)$$

Очевидна согласованность данного правила для произведения любого количества элементов.

Для транспонированной матрицы M^T соответствие описывается аналогичной (7) формулой:

$$(M^T)^\wedge = (m^T)_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + \text{Sp}(M^T) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2}. \quad (10)$$

Если применить операцию транспонирования (9) к элементу $M^\wedge$ из (7), получим

$$\begin{aligned} (M^\wedge)^T &= m_\alpha^\beta \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \text{Sp}(M) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} = \\ &= m_\beta^\alpha \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + \text{Sp}(M) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} = \\ &= (m^T)_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + \text{Sp}(M^T) \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

поскольку $m_\beta^\alpha = (m^T)_\alpha^\beta$ и $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(M^T)$. Следовательно, операция транспонирования элемента (7), соответствующего матрице, дает то же выражение, что и равенство (10), сопоставляющее транспонированной матрице элемент клиффордова расширения алгебры Грассмана.

Таким образом, можно считать, что каждой матрице может быть сопоставлен элемент (5) алгебры, который в случае двух грассмановых образующих в явном виде записывается в виде (7). С учетом соотношения (8) это соответствие сохраняется при перемножении двух матриц и, следовательно, при произведении произвольного числа матриц. В силу аддитивности следов матриц формула (7) будет выполняться и при сложении элементов, т. е. алгебра элементов, заданных по формуле (7), и алгебра матриц изоморфны для всех матричных операций, включающих сложение, умножение и транспонирование матриц.

Теперь рассмотрим действие матрицы (7) на вектор состояния. По построению $\hat{P}_1 \Psi = \psi_\alpha \theta^\alpha$, откуда

$$A^\wedge \Psi = a_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \psi_\gamma \theta^\gamma = a_\alpha^\beta \psi_\beta.$$

Это обычные формулы матричной алгебры умножения матрицы на столбец. В силу (8) получается полное соответствие формулам действия произведения матриц на столбец:

$$A^\wedge B^\wedge \Psi = a_\alpha^\beta b_\beta^\delta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \psi_\gamma \theta^\gamma = a_\alpha^\beta b_\beta^\delta \psi_\delta.$$

В итоге мы имеем эквивалентность соответствия матрицы (7) и обычной матрицы при перемножении матриц размера 2×2 , а также при умножении матрицы на столбец. Эквивалентность при сложении как матриц размера 2×2 , так и столбцов очевидна.

Теперь рассмотрим умножение производной по антикоммутирующей переменной на элемент, соответствующий матрице. При использовании формулы (2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\widetilde{M} = m_\gamma{}^\beta \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - m_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}. \quad (11)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения соответствует обычной матричной алгебре при умножении строки на матрицу, а второе не позволяет использовать (2) в качестве формулы соответствия матриц и элементов клиффордова расширения алгебры Грассмана. Зато при умножении $\partial/\partial\theta^\gamma$ на $\widehat{M}$ получается полное соответствие. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\widehat{M} = \left(m_\gamma{}^\beta \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - m_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \right) \widehat{P}_1 = m_\gamma{}^\beta \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \widehat{P}_1.$$

Введя обозначение

$$\frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \widehat{P}_1, \quad (12)$$

получаем

$$\frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\alpha} \widehat{M} = m_\gamma{}^\beta \frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\beta}.$$

Другими словами, величина $\partial^\wedge/\partial\theta^\alpha$ при умножении на элемент, соответствующий матрице, преобразуется правильным образом (без появления дополнительных членов) в элемент клиффордова расширения алгебры Грассмана, соответствующий результату матричного произведения – строку. Поэтому строке $\xi^\top = (\xi_1 \ \xi_2)$ в этой алгебре соответствует элемент

$$\xi^\top = \xi_\alpha \frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\alpha}. \quad (13)$$

При умножении элемента $\xi_\alpha \frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\alpha}$, соответствующего строке в матричной алгебре, на вектор состояния Ψ из (4) благодаря наличию в (13) проектора $\widehat{P}_1$ скалярная часть ψ_0 и слагаемое $\psi_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta = (\psi_{12} - \psi_{21}) \theta^1 \theta^2$ аннулируются. Если бы использовались просто производные $\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ по антикоммутирующим переменным, возникли бы дополнительные слагаемые, так как

$$\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \theta^1 \theta^2 = \xi_1 \theta^2 - \xi_2 \theta^1 \neq 0.$$

Из (12) получаем в явном виде

$$\frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^1} = \frac{\partial}{\partial\theta^1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^2} \frac{\partial}{\partial\theta^1}, \quad \frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta^2} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial\theta^1} \frac{\partial}{\partial\theta^2}.$$

Из (12) также следует, что произведение любого матричного оператора, в том числе модифицированной производной (оператора-строки), на модифицированную производную (оператор-строку) на любом векторе состояния дает ноль:

$$A^\wedge \frac{\partial^\wedge}{\partial\theta^\beta} \Psi = \widetilde{A} \widehat{P}_1 \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \widehat{P}_1 \Psi = \widetilde{A} \widehat{P}_1 \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \psi_\gamma \theta^\gamma = \widetilde{A} \widehat{P}_1 \psi_\beta = 0.$$

Таким образом, расширение матричной алгебры, позволяющее умножать любую матрицу на строку слева, тривиально – результат умножения дает ноль. Кроме

того, из (12), очевидно, следует, что $\frac{\partial}{\partial \theta^{(\alpha)}} \theta^{(\alpha)}$ – свертка строки со столбцом, дающая в результате проектор на подпространство скаляров. Для того чтобы подчеркнуть, что здесь нет суммирования по α , индексы помечены угловыми скобками.

Рассмотрим теперь комплексное и эрмитово сопряжение. При комплексном сопряжении величины θ^α и $\partial/\partial \theta^\alpha$ не меняются, а комплексно сопрягаются только числовые коэффициенты [8]. Поэтому операция комплексного сопряжения затрагивает только коэффициенты в матрицах, столбцах и строках. В этом случае все формулы матричной алгебры остаются в силе, но дополнительно можно ввести эрмитово сопряжение матриц, столбцов θ^α и строк $\partial/\partial \theta^\alpha$. Эрмитово сопряжение является композицией транспонирования и комплексного сопряжения, причем, очевидно, порядок применения транспонирования и комплексного сопряжения не имеет значения.

В итоге мы получили алгебру, эквивалентную матричной для всех операций, которые допустимы в матричной алгебре. Будем называть ее матричной алгеброй клиффордова расширения алгебры Грассмана. Но эта алгебра несколько шире матричной алгебры: помимо обычных матричных операций, в ней существуют дополнительные операции, отсутствующие в матричной алгебре. Например, возможно умножение элемента типа “столбец” на другой элемент типа “столбец” или умножение элемента типа “строка” на другой элемент типа “строка”. Для того чтобы ввести обобщение понятия столбца, для которого операции в рассматриваемой алгебре являются согласованными, транспонируем операторы $\partial/\partial \theta^\alpha$ и обозначим их как $\hat{\theta}^\alpha$:

$$\hat{\theta}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \hat{P}_1 \right)^\top = (\hat{P}_1)^\top \hat{\theta}^\alpha = \hat{P}_1 \hat{\theta}^\alpha = \theta^\alpha \hat{P}_0. \quad (14)$$

В явном виде

$$\hat{\theta}^1 = \theta^1 - \theta^1 \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2}, \quad \hat{\theta}^2 = \theta^2 - \theta^2 \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1}.$$

Эти операторы и обобщают понятия столбца, так как транспонирование данных операторов и их линейных комбинаций дает все возможные операторы-строки и, наоборот, транспонирование всех возможных операторов-строк дает линейные комбинации операторов $\hat{\theta}^\alpha$.

Из соотношения (14) следует, что $\hat{\theta}^\alpha \Psi = \psi_0 \theta^\alpha = \theta^\alpha \hat{P}_0 \Psi$. Поэтому $\hat{\theta}^\alpha \hat{\theta}^\beta = 0$ для любых α и β . Таким образом, расширенные операции по сравнению с обычной матричной алгеброй тривиальны: как умножение строки на строку, так и умножение столбца на столбец дает в результате ноль.

При увеличении числа грассмановых образующих до $n > 2$ рассмотрение аналогично случаю двух образующих, хотя и требует некоторых дополнительных действий. Столбцу сопоставляем сумму

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_\alpha \theta^\alpha. \quad (15)$$

Покажем, что и в этом случае для соответствия матричных элементов и обобщенной матрицы выполняется формула (5). Вектор состояния общего вида записывается как

$$\Psi = \psi_0 + \psi_{\alpha_1} \theta^{\alpha_1} + \psi_{\alpha_1 \alpha_2} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} + \dots + \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \dots \theta^{\alpha_n}, \quad (16)$$

где величины $\psi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ антисимметричны по всем индексам. Обозначим как Ψ_k ту часть Ψ , в которую входят мономы ранга не выше k :

$$\Psi_k = \psi_0 + \psi_{\alpha_1}\theta^{\alpha_1} + \psi_{\alpha_1\alpha_2}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2} + \dots + \psi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_k}.$$

Очевидно, что оператор

$$\hat{P}_n = \theta^1\theta^2\dots\theta^n \frac{\partial}{\partial\theta^n} \dots \frac{\partial}{\partial\theta^2} \frac{\partial}{\partial\theta^1} \quad (17)$$

является проектором на векторное пространство ${}^n\Lambda$, натянутое на грассманов элемент $\theta^1\theta^2\dots\theta^n$. Также очевидно, что $(\hat{1} - \hat{P}_n)\Psi = \Psi_{n-1}$, поскольку из вектора состояния убирается моном наивысшего ранга.

Оператор

$$\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_{n-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}}, \quad (18)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$, при действии на Ψ_{n-1} дает ноль для всех мономов ранга ниже $n-1$. Для произвольного монома $\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\dots\theta^{\beta_k}$ ранга k , где $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, имеем

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_k}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}} \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\dots\theta^{\beta_k} = \\ = \theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_k} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_k}^{\beta_k} = \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\dots\theta^{\beta_k}. \end{aligned}$$

Поэтому оператор (18) при действии на Ψ_{n-1} оставляет в Ψ_{n-1} только мономы ранга $n-1$ и при этом не меняет численные коэффициенты перед ними. Поэтому оператор

$$\hat{P}_{n-1} = \theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_{n-1}}} \dots \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}} (\hat{1} - \hat{P}_n),$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$, является проектором на векторное пространство ${}^{n-1}\Lambda$, натянутое на базис из грассмановых мономов $\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-1}}$.

Аналогично $(\hat{1} - \hat{P}_{n-1})(\hat{1} - \hat{P}_n)\Psi = \Psi_{n-2}$, и при этом оператор

$$\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_{n-2}}} \dots \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}}$$

при действии на Ψ_{n-2} оставляет в Ψ_{n-2} только мономы ранга $n-2$ и не меняет численные коэффициенты перед ними. Следовательно, оператор

$$\hat{P}_{n-2} = \theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_{n-2}}} \dots \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}} (\hat{1} - \hat{P}_{n-1})(\hat{1} - \hat{P}_n), \quad (19)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-2}$, является проектором на векторное пространство ${}^{n-2}\Lambda$, натянутое на базис из грассмановых мономов $\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_{n-2}}$.

Продолжая далее построение проекторов, в итоге получаем проектор на пространство ${}^1\Lambda$ мономов ранга 1,

$$\hat{P}_1 = \theta^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha_1}} (\hat{1} - \hat{P}_2) \dots (\hat{1} - \hat{P}_{n-1})(\hat{1} - \hat{P}_n), \quad (20)$$

и проектор на пространство скаляров ${}^0\Lambda$:

$$\hat{P}_0 = (\hat{1} - \hat{P}_1)(\hat{1} - \hat{P}_2) \dots (\hat{1} - \hat{P}_{n-1})(\hat{1} - \hat{P}_n). \quad (21)$$

Поскольку произведение проекторов $\hat{P}_k \hat{P}_m$ при $k \neq m$ всегда дает ноль, формулы (19)–(21) для проекторов можно переписать в виде

$$\hat{P}_{n-2} = \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \dots \theta^{\alpha_{n-2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_{n-2}}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_1}} (\hat{1} - \hat{P}_{n-1} - \hat{P}_n), \quad (22)$$

.....,

$$\hat{P}_1 = \theta^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_1}} (\hat{1} - \hat{P}_2 - \dots - \hat{P}_{n-1} - \hat{P}_n), \quad (23)$$

$$\hat{P}_0 = \hat{1} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \dots - \hat{P}_{n-1} - \hat{P}_n. \quad (24)$$

Далее все рассуждения с использованием оператора $\hat{P}_1$ проводятся аналогично случаю двух грассмановых элементов. Формула (5) остается неизменной, но индексы меняются не от 1 до 2, а от 1 до n . Произведение заданных в соответствии с (5) обобщенных матриц

$$A^\wedge = a_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1, \quad B^\wedge = b_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1$$

равно

$$A^\wedge B^\wedge = a_\alpha^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 b_\gamma^\delta \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 = a_\alpha^\beta b_\gamma^\delta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1. \quad (25)$$

Для упрощения этого выражения в нем требуется переставить местами множители. По определению проекторов $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 \Psi = \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \psi_\alpha \theta^\alpha = \psi_\beta = \hat{P}_0 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \Psi. \quad (26)$$

Эквивалентными будем считать операторы, дающие на всех векторах состояния одинаковый результат, т. е. одинаковый результат на любом векторе состояния общего вида. Поэтому из (26) следует, что с точностью до эквивалентности

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 = \hat{P}_0 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 &= \hat{P}_0 \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 = \hat{P}_0 \left(\delta_\beta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} - \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \right) \hat{P}_1 = \\ &= \hat{P}_0 \delta_\beta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 = \delta_\beta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1. \end{aligned}$$

Поэтому соотношение (25) преобразуется в

$$A^\wedge B^\wedge = a_\alpha^\beta b_\gamma^\delta \theta^\alpha \delta_\beta^\gamma \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 = a_\alpha^\beta b_\beta^\delta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1,$$

т. е. мы имеем

$$A^\wedge B^\wedge = a_\alpha^\beta b_\beta^\delta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\delta} \hat{P}_1 = (AB)^\wedge. \quad (28)$$

Эта формула умножения обобщенных матриц полностью совпадает с (8), но теперь уже для случая произвольной размерности пространства грассмановых переменных.

Таким образом, в случае произвольного числа грассмановых образующих обобщенная матрица $(AB)^\wedge$, соответствующая матрице AB , также равна произведению $A^\wedge B^\wedge$ обобщенных матриц $A^\wedge$ и $B^\wedge$, соответствующих матрицам A и B .

Рассмотрим теперь транспонирование элементов. Введем по определению (совершенно аналогично случаю двух грассмановых образующих) транспонированный к $\xi = \xi_\alpha \theta^\alpha$ элемент как

$$\xi^T = \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}. \quad (29)$$

Также зададим по определению транспонирование этого элемента как

$$(\xi^T)^T = \xi. \quad (30)$$

При транспонировании произведения ab любых элементов a и b алгебры положим по определению

$$(ab)^T = b^T a^T. \quad (31)$$

Очевидна согласованность данного правила для произведения любого количества элементов.

Для того чтобы избежать появления вторых производных по грассмановым переменным, зададим оператор-строку как $\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \hat{P}_1$. В матричной алгебре ему будет соответствовать строка с числами ξ_α . Поскольку $(\hat{1})^T = \hat{1}$, из формул (29)–(31) и (17)–(24) следует, что

$$(\hat{P}_n)^T = \hat{P}_n, \quad (\hat{P}_{n-1})^T = \hat{P}_{n-1}, \quad (\hat{P}_1)^T = \hat{P}_1, \quad (\hat{P}_0)^T = \hat{P}_0.$$

Кроме того, легко проверить, что с точностью до эквивалентности $\hat{P}_1 \theta^\alpha = \theta^\alpha \hat{P}_0$. Отсюда, транспонируя (5), получаем выражение для транспонированной матрицы M^T :

$$\begin{aligned} (\widehat{M})^T &= \left(m_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1 \right)^T = m_\alpha{}^\beta (\hat{P}_1)^T \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = (m^T)_\beta{}^\alpha \hat{P}_1 \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = \\ &= (m^T)_\beta{}^\alpha \theta^\beta \hat{P}_0 \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} = (m^T)_\beta{}^\alpha \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \hat{P}_1. \end{aligned}$$

Другими словами, операция транспонирования элемента (5), соответствующего матрице, дает то же выражение, что и соответствие, сопоставляющее транспонированной матрице элемент алгебры клиффордова расширения алгебры Грассмана. Таким образом, можно считать, что каждой матрице может быть сопоставлен элемент (5) алгебры, причем это соответствие сохраняется при умножении матриц на число, транспонировании матриц и их произведений, а также перемножении и сложении матриц. В результате алгебра элементов, заданных по формуле (5), и алгебра матриц изоморфны для всех матричных операций, включающих сложение, умножение и транспонирование матриц. Будем обозначать данную алгебру как $\text{Mat}(\Lambda_n)$ и называть ее супералгебраическим представлением матричной алгебры.

В клиффордовом расширении алгебры Грассмана, кроме подалгебры $\text{Mat}(\Lambda_n)$, для которой определены обычные матричные операции, а также тривиальное умножение строк на строки и столбцов на столбцы, имеются дополнительные операторы, перемешивающие состояния с разным числом грассмановых переменных. Фактически эту алгебру можно рассматривать как расширение матричной алгебры: ее обобщенные матрицы

$$M({}^1\Lambda, {}^1\Lambda) = m_\alpha{}^\beta \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \hat{P}_1,$$

соответствующие обычным матрицам, переводят элементы подпространства ${}^1\Lambda$ в элементы подпространства ${}^1\Lambda$, а обобщенные матрицы

$$M({}^k\Lambda, {}^l\Lambda) = m_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \ldots \theta^{\alpha_l} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_k}} \ldots \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_1}} \hat{P}_k \quad (32)$$

переводят элементы подпространства ${}^k\Lambda$ в элементы подпространства ${}^l\Lambda$. Например, обобщенные матрицы $m_{\gamma\alpha}^{\beta} \theta^{\gamma} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \hat{P}_1$ переводят элементы подпространства ${}^1\Lambda$ в элементы подпространства ${}^2\Lambda$, обобщенные матрицы $m_{\delta\gamma}^{\alpha\beta} \theta^{\delta} \theta^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \hat{P}_2$ переводят элементы подпространства ${}^2\Lambda$ в элементы подпространства ${}^2\Lambda$ и т. д. Благодаря наличию проекторов очевидным свойством таких операторов является то, что $M_1({}^{k_1}\Lambda, {}^{k_2}\Lambda) M_2({}^{k_3}\Lambda, {}^{k_4}\Lambda) = 0$ при $k_1 \neq k_4$. В частности, квадраты всех таких операторов $M({}^k\Lambda, {}^l\Lambda)$ равны нулю при $k \neq l$.

Легко заметить, что оператор-столбец является обобщенной матрицей $m_{\alpha} \theta^{\alpha} \hat{P}_0$, переводящей ${}^0\Lambda$ в ${}^1\Lambda$, а оператор-строка – обобщенной матрицей $m^{\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \hat{P}_1$, переводящей ${}^1\Lambda$ в ${}^0\Lambda$.

Рассмотрим теперь операторы вида

$$\theta^{\beta_1} \theta^{\beta_2} \ldots \theta^{\beta_l} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_k}} \ldots \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha_1}} \hat{P}_m,$$

линейной комбинацией которых исчерпывается множество операторов клиффордова расширения алгебры Грассмана. Если $m = k$, мы получаем элементы обобщенных матриц. Если $m < k$, число производных превышает порядок мономов, и оператор дает ноль на любом векторе состояния. Поэтому при $m < k$ рассматриваемые слагаемые равны нулю с точностью до эквивалентности. Если $m > k$, то сначала производные переводят элементы из подпространства ${}^m\Lambda$ в элементы подпространства ${}^{m-k}\Lambda$, а затем множитель $\theta^{\beta_1} \theta^{\beta_2} \ldots \theta^{\beta_l}$ переводит их в элементы подпространства ${}^{m-k+l}\Lambda$. В итоге элементы подпространства ${}^m\Lambda$ линейно отображаются в элементы подпространства ${}^{m-k+l}\Lambda$. Но все такие преобразования можно выразить в виде

$$M({}^m\Lambda, {}^{m-k+l}\Lambda) = m_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-k+l}}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \ldots \theta^{\alpha_{m-k+l}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_m}} \ldots \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta_1}} \hat{P}_m.$$

Таким образом, любой оператор клиффордова расширения алгебры Грассмана может быть разложен по операторам обобщенных матриц. В связи с этим будем называть данную алгебру алгеброй обобщенных матриц или, что то же самое, обобщенной матричной алгеброй.

Построим в явном виде супералгебраическое представление матриц Дирака. Если матрица Γ^m в некотором представлении (Дирака, Вейля и т. п.) имеет матричные элементы $(\gamma^m)_{\alpha}^{\beta}$ (индекс α соответствует строке, индекс β – столбцу), ей можно сопоставить обобщенную матрицу

$$\Gamma^m = (\gamma^m)_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\beta}} \hat{P}_1, \quad (33)$$

где оператор $\hat{P}_1$ задан в (23). С физической точки зрения наиболее важен случай четырех грассмановых переменных, приводящий в рамках сделанного построения

к четырем базисным клиффордовым векторам (матрицам Дирака) и, соответственно, четырехмерному пространству-времени. В этом случае при построении оператора $\hat{P}_1$ полезно использовать операторы

$$\hat{E}_1 = \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1}, \quad \hat{E}_2 = \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2}, \quad \hat{E}_3 = \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3}, \quad \hat{E}_4 = \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4}. \quad (34)$$

Явный вид оператора $\hat{P}_1$ таков:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 = & \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3 + \hat{E}_4 - \\ & - 2(\hat{E}_1 \hat{E}_2 + \hat{E}_1 \hat{E}_3 + \hat{E}_1 \hat{E}_4 + \hat{E}_2 \hat{E}_3 + \hat{E}_2 \hat{E}_4 + \hat{E}_3 \hat{E}_4) + \\ & + 3(\hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 + \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_4 + \hat{E}_1 \hat{E}_3 \hat{E}_4 + \hat{E}_2 \hat{E}_3 \hat{E}_4) - 4\hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 \hat{E}_4. \end{aligned} \quad (35)$$

В явном виде матрицы Дирака (в том числе матрица $\Gamma^5 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$) в представлении Дирака выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma^0 = & \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) + \\ & + \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right), \\ \Gamma^1 = & \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^4} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) + \\ & + \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^3} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right), \\ \Gamma^2 = & -i \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^4} + \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) + \\ & + i \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^3} + \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right), \\ \Gamma^3 = & \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^3} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) + \\ & + \left(\theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^2} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right), \\ \Gamma^5 = & \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^3} + \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) + \\ & + \left(\theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Обозначим матрицы Дирака в представлении Вейля как Γ_V^m , сохранив обозначение Γ^m для матриц Дирака в представлении Дирака. Тогда

$$\Gamma_V^0 = \Gamma^5, \quad \Gamma_V^1 = \Gamma^1, \quad \Gamma_V^2 = \Gamma^2, \quad \Gamma_V^3 = \Gamma^3, \quad \Gamma_V^5 = -\Gamma^0. \quad (37)$$

Супералгебраическое представление матриц Дирака Γ_M^m в представлении Майораны имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Gamma_M^0 &= i \left(\theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) + \\
 &\quad + i \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^3} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right), \\
 \Gamma_M^1 &= i \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) + \\
 &\quad + i \left(\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right), \\
 \Gamma_M^2 &= i \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^4} + \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) - \\
 &\quad - i \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^3} + \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right), \\
 \Gamma_M^3 &= -i \left(\theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) - \\
 &\quad - i \left(\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^4} + \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right), \\
 \Gamma_M^5 &= i \left(\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\hat{1} - \theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^4} \right) + \\
 &\quad + i \left(\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^4} - \theta^4 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \left(\hat{1} - \theta^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} \right) \left(\hat{1} - \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right).
 \end{aligned} \tag{38}$$

В формулах (36) и (38) выделены множители вида $\hat{1} - E_\alpha$, которые обладают рядом полезных свойств. Так, $\hat{1} - E_\alpha$ коммутирует со всеми элементами алгебры, кроме θ^α и $\partial/\partial\theta^\alpha$. Помимо этого,

$$(\hat{1} - E_\alpha)^2 = \hat{1} - E_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial\theta^{\langle\alpha\rangle}}(\hat{1} - E_{\langle\alpha\rangle}) = 0, \quad (\hat{1} - E_{\langle\alpha\rangle})\theta^{\langle\alpha\rangle} = 0.$$

Угловые скобки у индекса, как и ранее, означают, что по индексу нет суммирования. Данные соотношения позволяют заметно упростить вычисления, в которые входят произведения матриц Дирака.

Формулы (33)–(38) дают решение задачи явного построения супералгебраического представления матриц Дирака Γ^m для четырехмерного пространства-времени.

Из полученных результатов следует, что супералгебраическое представление матриц Дирака для пространства-времени произвольной размерности можно построить из грассмановых переменных и производных по ним. Это позволяет рассматривать матрицы Дирака в данном представлении не в качестве независимых элементов по отношению к нечетным переменным суперсимметричных теорий, как это обычно делается [9]–[12], а в качестве элементов обобщенной матричной алгебры, имеющих ту же природу, что и нечетные переменные суперпространств.

Список литературы

- [1] П. К. Рашевский, **10:2(64)** (1955), 3–110.
- [2] Ю. А. Яппа, *Введение в теорию спиноров и ее приложения в физике*, Изд-во С.-Петербург. ун-та, СПб., 2004.
- [3] S. Okubo, *J. Math. Phys.*, **32:7** (1991), 1657–1668.
- [4] H. L. Carrion, M. Rojas, F. Torran, *JHEP*, **04** (2003), 040, 28 pp.
- [5] Д. С. Широков, *Лекции по алгебрам Клиффорда и спинорам*, Лекционные курсы НОЦ, МИАН, М., 2012.
- [6] Э. Картан, *Теория спиноров*, Платон, Волгоград, 1997.
- [7] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время*, т. 1: *Два-спинорное исчисление и релятивистские поля*, Мир, М., 1987.
- [8] Ф. А. Березин, *Введение в суперанализ*, МЦНМО, М., 2013.
- [9] Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве, *УФН*, **146:4** (1985), 553–590.
- [10] В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу, *УФН*, **117:4** (1975), 637–683.
- [11] Ю. Весс, Дж. Беггер, *Суперсимметрия и супергравитация*, Мир, М., 1986.
- [12] П. Уэст, *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Мир, М., 1989.