Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Оксак, А. Д. Суханов, “Свободная” квантовая броуновская частица как нефоковская линейная бозонная система, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 201–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 05:35:30

© 1998 г.

А. И. Оксак*, А. Д. Суханов†

“СВОБОДНАЯ” КВАНТОВАЯ БРОУНОВСКАЯ ЧАСТИЦА КАК НЕФОКОВСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ БОЗОННАЯ СИСТЕМА

Проведено квантование уравнения Ланжевена для “свободной” броуновской частицы. Соответствующая линейная бозонная система обладает инфракрасными особенностями и поэтому является нефокковской. Физические представления полей строятся с помощью стационарных обобщенных состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовое уравнение Ланжевена находит многочисленные применения в физике. В частности, обширная литература посвящена броуновскому движению квантового осциллятора (см., например, [1–5]). В данной работе излагается последовательная схема квантования уравнения Ланжевена для “свободной” квантовой броуновской частицы. Формально подобную модель можно считать пределом квантового гармонического осциллятора с трением. Однако при этом возникают инфракрасные расходимости. Появление этих расходимостей вызывает необходимость модификации стандартного метода квантования, непосредственное применение которого приводит к квантовым полям в индефинитной метрике.

В модели “свободной” броуновской частицы уравнения Ланжевена имеют вид

$$m\partial_t q(t) = p(t), \quad \partial_t p(t) = -\gamma p(t) + \sqrt{2\gamma m} \xi(t), \quad (1)$$

где $q(t)$ и $p(t)$ — координата и импульс частицы с массой m , коэффициент вязкого трения $\gamma m > 0$, $\sqrt{2\gamma m} \xi(t)$ — флуктуирующая сила, которая в стационарном состоянии представляет собой белый шум. Для квантования следует подобрать подходящую гамилтонову реализацию уравнений. В данном случае, как и в случае гармонического осциллятора с трением, термостат можно моделировать полубесконечной струной [3, 4]. К ней жестко прикреплено точечное массивное тело, играющее роль броуновской частицы. Струна, натянутая вдоль положительной полуоси Ox , может совершать колебания

*Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, Россия

†Московский государственный университет, Москва, Россия

в направлении оси Oy . Конфигурация струны в момент времени t дается выражением

$$y = (\gamma m)^{-1/2} \varphi(t, x). \quad (2)$$

Координата частицы на оси Ox в момент времени t есть

$$q(t) = (\gamma m)^{-1/2} \varphi(t, 0). \quad (3)$$

Поскольку система в целом является квантовой динамической, то здесь уместна терминология квантовых полей и процессов. Связь с терминологией случайных (квантовых) процессов состоит в том, что динамические переменные броуновской частицы, а также действующая на нее сила со стороны термостата являются в любом состоянии данного представления случайными (возможно, некоммутирующими) величинами.

Лагранжиан системы L есть сумма лагранжиана свободной полубесконечной струны и кинетической энергии частицы

$$\frac{1}{2} m (\partial_t q)^2 = \frac{1}{2\gamma} (\partial_t \varphi)^2 \Big|_{x=0}.$$

Этот лагранжиан можно записать в виде

$$L = \frac{1}{2} \int ((\partial_t \varphi)^2 - (\partial_x \varphi)^2) \theta(x) dx + \frac{1}{2\gamma} \int (\partial_t \varphi)^2 \delta(x) dx, \quad (4)$$

где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Считая конфигурацию поля $\varphi(t, x)$ канонической координатой, находим сопряженный канонический импульс

$$j(t, x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \varphi)} = \partial_t \varphi \cdot (\theta(x) + \gamma^{-1} \delta(x)). \quad (5)$$

Гамильтониан системы принимает вид

$$\begin{aligned} H &= \int j(t, x) \partial_t \varphi(t, x) dx - L = \\ &= \frac{1}{2} \int ((\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2) \theta(x) dx + \frac{1}{2\gamma} \int (\partial_t \varphi)^2 \delta(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение движения $\partial_t j + \delta L / \delta \varphi = 0$ сводится к следующему уравнению:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi \cdot \theta(x) + (\gamma^{-1} \partial_t^2 - \partial_x) \varphi \cdot \delta(x) = 0. \quad (7)$$

Поле $\varphi(t, x)$ в этом уравнении гладким образом зависит от переменной x как от параметра, являясь при этом обычной или обобщенной функцией переменной t . В таком случае уравнение (7) сводится к волновому уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi \cdot \theta(x) = 0 \quad (8)$$

и граничному условию

$$(\partial_t^2 - \gamma \partial_x) \varphi|_{x=0} = 0. \quad (9)$$

В соответствии с определением (3) физический смысл условия (9) заключается в том, что со стороны струны на частицу действует вдоль оси Oy сила

$$\left(\frac{\gamma}{m} \right)^{1/2} \partial_x \varphi(t, x) \Big|_{x=0}.$$

Отметим, что лагранжиан (4) инвариантен относительно однопараметрической группы калибровочных преобразований первого рода

$$\varphi(t, x) \rightarrow \varphi(t, x) + g, \quad g \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

При этом $j(t, x)$ есть временная компонента “сохраняющегося” нетеровского тока

$$\partial_t j(t, x) + \partial_x k(t, x) = 0, \quad (11)$$

где $k(t, x) = -\partial_x \varphi \cdot \theta(x)$.

Соответствующий заряд

$$Q = \int j(t, x) dx = \int \partial_t \varphi \cdot (\theta(x) + \gamma^{-1} \delta(x)) dx, \quad (12)$$

как и гамильтониан, является интегралом движения.

Представляя пространственную переменную x как параметр, мы можем сформулировать канонический формализм в терминах двухвременных скобок Пуассона. Воспользуемся тем, что данная система является линейной бозонной, т.е. ее лагранжиан L (или гамильтониан H) есть квадратичный функционал от поля. В этом случае фазовое пространство системы, отождествляемое с множеством “классических” (т.е. числовых) решений уравнений движения, – симплектическое пространство [6]. Симплектическая форма σ сопоставляет каждой паре “классических” решений уравнений движения выражение

$$\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \int (j_1(t, x) \varphi_2(t, x) - j_2(t, x) \varphi_1(t, x)) dx.$$

С учетом (5) имеем

$$\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \int (\partial_t \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_1 \cdot \partial_t \varphi_2) \cdot (\theta(x) + \gamma^{-1} \delta(x)) dx. \quad (13)$$

Скобки Пуассона “классического” поля $\varphi(t, x)$ можно найти из соотношения

$$\{\sigma(\varphi, \varphi_1), \sigma(\varphi, \varphi_2)\} = \sigma(\varphi_1, \varphi_2). \quad (14)$$

В разделе 2 мы конкретизируем пространство “классических” решений уравнений движения (8), (9). Оказывается, оно изоморфно фазовому пространству так называемой левой составляющей $\varphi^L(t)$ свободного вещественного скалярного безмассового поля в двумерном пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^2$. Тем самым устанавливается

эквивалентность данной модели (как линейной бозонной системы) и модели свободной полубесконечной струны, лагранжиан которой получается из (4) в пределе $\gamma \rightarrow \infty$. Мы находим двухвременные скобки Пуассона классического поля $\varphi(t, x)$.

В разделе 3 строятся представления квантованного поля $\varphi(t, x)$. Вакуумная двухточечная функция поля $\varphi(t, x)$ обладает инфракрасными особенностями. Стандартная трактовка этой ситуации состоит в том, что $\varphi(t, x)$ рассматривается как “нефизическое” поле, реализуемое в псевдогильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. Физическими переменными объявляются калибровочно-инвариантные величины, порождаемые компонентами $j(t, x)$ и $k(t, x)$ нетеровского тока или эквивалентно — частными производными $\partial_t \varphi$ и $\partial_x \varphi$ поля. Для них существует фоковское вакуумное состояние, а также стационарные (гиббсовские) состояния в случае ненулевой температуры T . В этом смысле поле $\varphi(t, x)$ следует считать нефоковской линейной бозонной системой. Непригодность стандартной трактовки состоит, в частности, в том, что координата $q(t)$ броуновской частицы попадает в число нефизических переменных, так что лишь второму из уравнений Ланжевена (1) придается физический смысл. Физического смысла лишаются и канонические перестановочные соотношения между координатой и импульсом броуновской частицы. Альтернативная точка зрения [7], которую мы здесь принимаем, состоит в том, что поле $\varphi(t, x)$ также включается в число физических величин, если трактовать его как вырожденную фоковскую линейную бозонную систему. Физическое представление полевой алгебры строится из соображения калибровочной инвариантности с помощью вакуумного обобщенного состояния (или температурного обобщенного состояния при $T > 0$), которое индуцируется фоковским вакуумным состоянием (или гиббсовским состоянием) алгебры калибровочно-инвариантных величин.

2. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО СИСТЕМЫ

В качестве фазового пространства системы “частица+струна” выберем множество $\mathcal{X}$ вещественных (или “классических”) решений $\varphi(t, x)$ класса C^∞ уравнений движения (8), (9) в $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$ (здесь и далее $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$; посредством $\mathcal{S}_r(\overline{\mathbb{R}}_\pm)$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ мы обозначаем подпространства всех вещественных основных функций в пространствах Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_\pm)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), причем $\varphi(t, x)$ и $\partial_t \varphi(t, x)$ принадлежат пространству Шварца $\mathcal{S}_r(\overline{\mathbb{R}}_+)$ быстроубывающих основных функций по x при любом $t \in \mathbb{R}$. Фазовое пространство является симплектическим с симплектической формой (13), где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{X}$. Правая часть (13) не зависит от t , т.к.

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(\varphi_1, \varphi_2) &= \int (\partial_t^2 \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_1 \cdot \partial_t^2 \varphi_2) \cdot (\theta(x) + \gamma^{-1} \delta(x)) dx = \\ &= \int (\partial_x^2 \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_1 \cdot \partial_x^2 \varphi_2) \cdot \theta(x) dx + (\partial_x \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_1 \cdot \partial_x \varphi_2)|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Однопараметрическая динамическая группа действует на поле сдвигами по времени:

$$\varphi(t, x) \rightarrow \varphi_\tau(t, x) = \varphi(t - \tau, x), \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Эти сдвиги являются симплектическими преобразованиями: $\sigma(\varphi_{1,\tau}, \varphi_{2,\tau}) = \sigma(\varphi_1, \varphi_2)$, что следует из независимости (13) от t . Они определяют гамильтониан линейной бозонной системы

$$H = \frac{1}{2} \partial_\tau \sigma(\varphi_\tau, \varphi) \Big|_{\tau=0}.$$

В терминах переменных $t \pm x$ и частных производных $\partial^\pm$ по этим переменным волновое уравнение $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi = 0$ записывается как $\partial^+ \partial^- \varphi = 0$. Общий вид решения этого волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$ следующий:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^L(t+x) + \varphi^R(t-x)). \quad (17)$$

Здесь $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ – функции класса $\mathcal{C}^\infty$ в $\mathbb{R}$, которые называются соответственно левой и правой составляющими поля $\varphi(t, x)$. Они восстанавливаются по полю $\varphi(t, x)$ однозначно с точностью до некоторой константы c , что видно, например, из выражений

$$\varphi^{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi(t, 0) \mp \left(c + \int_0^t \partial_x \varphi(t, x) \Big|_{x=0} d\tau \right) \right), \quad (18)$$

которые вытекают из (17) после подстановки $x = 0$ в функции $\varphi(t, x)$ и $\partial_x \varphi(t, x)$. В дальнейшем произвольная константа c будет конкретизирована¹⁾: $c = c(\varphi)$.

Обозначим

$$\Phi(t) = \varphi(t, 0). \quad (19)$$

Покажем, что функции $\Phi(t)$, $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ являются первообразными от функций из $\mathcal{S}_T(\mathbb{R})$. Вначале заметим, что из равенства (6) следует, что $|\partial_t \Phi(t)| \leq (2\gamma H)^{1/2}$. Таким образом, функция $|\Phi(t)|$ ограничена многочленом первой степени по $|t|$. Следовательно, $\Phi(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Из соотношения (17) находим

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t, x) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x \varphi^L(x) - \partial_x \varphi^R(-x)), \\ \partial_x \varphi(0, x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x \varphi^L(x) + \partial_x \varphi^R(-x)). \end{aligned} \quad (20)$$

Так как по условию левые части в (20) принадлежат $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, то сужения $\partial_t \varphi^L(t)$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\partial_t \varphi^R(t)$ на $\overline{\mathbb{R}}_-$ принадлежат соответственно $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-)$. Используем далее граничное условие (9), которое с учетом (17) можно записать в любой из следующих двух форм:

$$\begin{aligned} (\gamma + \partial_t) \partial_t \Phi(t) &= \sqrt{2} \gamma \partial_t \varphi^L(t), \\ (\gamma - \partial_t) \partial_t \Phi(t) &= \sqrt{2} \gamma \partial_t \varphi^R(t). \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁾ Хотя первоначально “классическое” поле $\varphi \in \mathcal{X}$ задавалось в $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$, формула (17) осуществляет “принудительное” продолжение его до решения класса $\mathcal{C}^\infty$ волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Это означает, что полубесконечная струна дополняется “виртуальной” полубесконечной струной до бесконечной струны, но без добавления новых степеней свободы. Аналогичную трактовку можно принять и для квантового поля $\varphi(t, x)$, считая его операторной обобщенной функцией в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющей волновому уравнению.

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned}(\gamma^2 - \partial_t^2)\partial_t\Phi(t) &= \sqrt{2}\gamma(\gamma - \partial_t)\partial_t\varphi^L(t), \\(\gamma^2 - \partial_t^2)\partial_t\Phi(t) &= \sqrt{2}\gamma(\gamma + \partial_t)\partial_t\varphi^R(t).\end{aligned}\tag{22}$$

Поскольку сужения правых частей равенств (22) на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и на $\overline{\mathbb{R}}_-$, соответственно, принадлежат $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-)$ и по условию $\Phi(t)$ есть функция класса $\mathcal{C}^\infty$, то $(\gamma^2 - \partial_t^2)\partial_t\Phi(t)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. С помощью преобразования Фурье, примененного к обобщенной функции $\partial_t\Phi(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, отсюда легко вывести, что $\partial_t\Phi(t)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Из равенств (21) получаем теперь, что $\partial_t\varphi^L(t)$ и $\partial_t\varphi^R(t)$ также принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Отсюда, в частности, вытекает существование пределов $\Phi(\pm\infty)$, $\varphi^L(\pm\infty)$ и $\varphi^R(\pm\infty)$, которые можно подчинить соотношениям

$$\Phi(-\infty) = \sqrt{2}\varphi^L(-\infty) = \sqrt{2}\varphi^R(-\infty).\tag{23}$$

Первое из этих равенств устраняет произвол в выборе константы c в (18). Второе из равенств (23) следует из формулы (17). Теперь равенства (21) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}(\gamma + \partial_t)\Phi(t) &= \sqrt{2}\gamma\varphi^L(t), \\(\gamma - \partial_t)\Phi(t) &= \sqrt{2}\gamma\varphi^R(t).\end{aligned}\tag{24}$$

Учитывая, что $\partial_t\Phi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, имеем

$$\Phi(+\infty) = \sqrt{2}\varphi^L(+\infty) = \sqrt{2}\varphi^R(+\infty).\tag{25}$$

Наконец, переходя к пределу $x \rightarrow +\infty$ в (17), находим, что $\varphi^L(+\infty) + \varphi^R(-\infty) = 0$. Таким образом, в дополнение к соотношениям (23), (25) получаем

$$\Phi(-\infty) = -\Phi(+\infty), \quad \varphi^L(-\infty) = -\varphi^L(+\infty), \quad \varphi^R(-\infty) = -\varphi^R(+\infty).\tag{26}$$

Эти соотношения означают, что все функции $\Phi(t)$, $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ принадлежат пространству $\varepsilon * \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, состоящему из функций вида

$$g(t) = (\varepsilon * f)(t) \equiv \int \varepsilon(t - \tau)f(\tau) d\tau$$

при $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, где, как обычно, $\varepsilon(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\varepsilon(t) = -1$ при $t < 0$.

Определим преобразование Фурье равенством

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int \Phi(t) \exp(i\lambda t) dt.$$

Связь (24) между функциями $\Phi(t)$, $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^R(\lambda) &= \frac{\gamma + i\lambda}{\gamma - i\lambda} \tilde{\varphi}^L(\lambda), \\ \tilde{\Phi}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\varphi}^L(\lambda) + \tilde{\varphi}^R(\lambda)) = \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma - i\lambda} \tilde{\varphi}^L(\lambda).\end{aligned}\tag{27}$$

Итак, в пространстве $\varepsilon * \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ получены изоморфизмы $\Phi(t) \leftrightarrow \varphi^L(t) \leftrightarrow \varphi^R(t)$. Любая из трех функций $\Phi(t)$, $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ может быть использована для параметризации элементов фазового пространства $\mathcal{X}$ системы. В качестве такой параметризации удобно принять поле $\varphi^L(t)$. Осуществляя в формулах (13), (6) и (12) предельный переход $t \rightarrow -\infty$, с учетом (17) получим выражение для симплектической формы в терминах функций φ_1^L и φ_2^L (откуда становится очевидной невырожденность этой формы):

$$\sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} \int (\partial_t \varphi_1^L(t) \cdot \varphi_2^L(t) - \varphi_1^L(t) \cdot \partial_t \varphi_2^L(t)) dt. \quad (28)$$

Для гамильтониана и заряда имеем соответственно

$$H = \frac{1}{2} \int (\partial_t \varphi^L(t))^2 dt, \quad (29)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \int j^L(t) dt, \quad (30)$$

где $j^L(t) = \partial_t \varphi^L(t)$ – левый ток.

Отметим, что динамическая группа по-прежнему сводится к группе сдвигов по переменной t :

$$\varphi^L(t) \rightarrow \varphi_\tau^L(t) = \varphi^L(t - \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Полученные формулы устанавливают эквивалентность данной линейной бозонной системы и модели свободной полубесконечной струны, которая описывается полем

$$\varphi^0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^L(t + x) + \varphi^L(t - x)).$$

Найдем теперь скобки Пуассона “классического” поля. Согласно выражению (28), если $\varphi, \varphi_1 \in \mathcal{X}$ и

$$\varphi_1^L(t) = \frac{1}{2} (\varepsilon * f)(t)$$

при $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то

$$\int \varphi^L(t) f(t) dt = \sigma(\varphi, \varphi_1).$$

Теперь из формулы (14) при

$$\varphi_j^L = \frac{1}{2} \varepsilon * f_j, \quad f_j \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad j = 1, 2,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \int \varphi^L(t_1) f_1(t_1) dt_1, \int \varphi^L(t_2) f_2(t_2) dt_2 \right\} = \\ & = \sigma(\varphi_1, \varphi_2) = \int D^L(t_1 - t_2) f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

где

$$D^L(t_1 - t_2) = \frac{1}{2}\varepsilon(t_1 - t_2) = i \int \left(P \frac{1}{\lambda} \right) \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi}. \quad (32)$$

Следовательно, имеем

$$\{\varphi^L(t_1), \varphi^L(t_2)\} = D^L(t_1 - t_2). \quad (33)$$

С помощью соотношений (17), (27) и (33) определяем двухвременные скобки Пуассона “классического” поля φ :

$$\{\varphi(t_1, x_1), \varphi(t_2, x_2)\} = D(t_1, x_1; t_2, x_2), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} D(t_1, x_1; t_2, x_2) = & \frac{i}{2} \int \left(P \frac{1}{\lambda} \right) \left(\exp(-i\lambda(t_1 - t_2 + x_1 - x_2)) + \right. \\ & + \exp(-i\lambda(t_1 - t_2 - x_1 + x_2)) + \\ & + \frac{\gamma + i\lambda}{\gamma - i\lambda} \exp(-i\lambda(t_1 - t_2 - x_1 - x_2)) + \\ & \left. + \frac{\gamma - i\lambda}{\gamma + i\lambda} \exp(-i\lambda(t_1 - t_2 + x_1 + x_2)) \right) \frac{d\lambda}{2\pi}. \end{aligned} \quad (35)$$

3. КВАНТОВАНИЕ

Квантовое поле $\varphi(t, x)$ системы “частица+струна” подчиняется тем же уравнением движения, что и “классическое” поле. Имеет смысл считать $\varphi(t, x)$ операторной обобщенной функцией над пространством $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ основных функций, удовлетворяющей волновому уравнению $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi = 0$. По аналогии с формулой (17) имеем выражение для поля φ через левую и правую составляющие. Теперь $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ являются операторными обобщенными функциями над пространством $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ основных функций. Они связаны соотношением

$$\tilde{\varphi}^R(\lambda) = \frac{\gamma + i\lambda}{\gamma - i\lambda} \tilde{\varphi}^L(\lambda). \quad (36)$$

Скобкам Пуассона (33), (34) соответствуют канонические коммутационные соотношения (ККС)

$$[\varphi^L(t_1), \varphi^L(t_2)] = \frac{1}{i} D^L(t_1 - t_2), \quad (37)$$

$$[\varphi(t_1, x_1), \varphi(t_2, x_2)] = \frac{1}{i} D(t_1, x_1; t_2, x_2). \quad (38)$$

Поскольку из двух составляющих $\varphi^L(t)$ и $\varphi^R(t)$ только одно поле является независимым, то, очевидно, достаточно построить физические представления для левой составляющей $\varphi^L(t)$.

Мы воспользуемся конструкцией работы [7] для вакуумного представления поля $\varphi^L(t)$ (или представления при нулевой температуре), делая необходимые модификации для температурных представлений. Пусть $\mathcal{A}$ – абстрактная $*$ -алгебра ККС поля $\varphi^L(t)$, содержащая унитарные элементы $\mathcal{E}_f$ при $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{E}_{f_1}\mathcal{E}_{f_2} = \exp\left(\frac{i}{2} \int D^L(t_1 - t_2) f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2\right) \mathcal{E}_{f_1+f_2}. \quad (39)$$

Будем считать, что $\mathcal{A}$ состоит из элементов вида²⁾

$$\int_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_f d\mu(f), \quad (40)$$

где $\mathcal{M}$ – произвольное конечномерное подпространство в $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, μ – произвольная комплексная борелевская мера на $\mathcal{M}$ с компактным носителем. Квантование системы сводится к построению физического представления (“одевания”) $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве. Здесь нас интересуют вакуумное и температурные представления. При этом элементам $\mathcal{E}_f$ соответствуют унитарные операторы $E_{f,T}$, непрерывно зависящие от f в слабой операторной топологии. Эти операторы записываются в виде

$$E_{f,T} = \exp\left(i \int \varphi^L(t) f(t) dt\right), \quad (41)$$

где $\varphi^L(t)$ – квантовое поле в конкретном (вакуумном или температурном) представлении.

Калибровочное преобразование (10) для левой составляющей $\varphi^L(t)$ имеет вид

$$\varphi^L(t) \rightarrow \varphi^L(t) + g^L, \quad (42)$$

где

$$g^L = \frac{1}{\sqrt{2}} g.$$

Ему соответствует $*$ -автоморфизм $A \rightarrow A^g$ алгебры $\mathcal{A}$ такой, что

$$\mathcal{E}_f \rightarrow (\mathcal{E}_f)^g = \exp\left(ig^L \int f(t) dt\right) \cdot \mathcal{E}_f. \quad (43)$$

Элементы $\mathcal{E}_f$ при $\int f(t) dt = 0$, т.е. при $f = -\partial_t F$, $F \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, являются калибровочно-инвариантными. В конкретном представлении алгебры $\mathcal{A}$ такие элементы выражаются через левый ток

$$E_{-\partial F,T} = \exp\left(i \int j^L(t) F(t) dt\right). \quad (44)$$

²⁾Пополнение $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ в соответствующей топологии нормы есть некий вариант абстрактной C^* -алгебры ККС.

Если в (40) ограничиться только подпространствами $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_T(\mathbb{R})$, состоящими из функций f , для которых $\int f(t) dt = 0$, мы получим $*$ -подалгебру $\mathcal{B}$ калибровочно-инвариантных элементов в $\mathcal{A}$.

Если бы поле $\varphi^L(t)$ было фоковской системой, то $\tilde{\varphi}^L(\lambda) \cdot \theta(-\lambda)$ и $\tilde{\varphi}^L(\lambda) \cdot \theta(\lambda)$ были бы соответственно операторами (операторными обобщенными функциями) рождения и уничтожения и существовали бы вакуумная двухточечная функция $W_0^L(t_1 - t_2)$ и температурная двухточечная функция $W_T^L(t_1 - t_2)$ (гиббсовского состояния с температурой T), которые как обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ восстанавливались бы по перестановочной функции $D^L(t_1 - t_2)$ равенствами

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_0^L(\lambda) &= \theta(\lambda) \cdot \frac{1}{i} \widetilde{D}^L(\lambda), \\ \widetilde{W}_T^L(\lambda) &= (1 - \exp(-\beta\lambda))^{-1} \cdot \frac{1}{i} \widetilde{D}^L(\lambda) \quad \text{при} \quad T > 0,\end{aligned}\tag{45}$$

где $\beta = 1/kT$, k – постоянная Больцмана (в связи со вторым из этих равенств см., например, [2]). Двухточечные функции $W_T^L(t_1 - t_2)$ должны удовлетворять требованиям эрмитовости ($\text{Im } \widetilde{W}_T(\lambda) = 0$), положительной определенности ($\widetilde{W}_T^L(\lambda) \geq 0$) и связи с $D^L(t_1 - t_2)$ ($D^L(t_1 - t_2) = -2 \text{Im } W_T^L(t_1 - t_2)$). Функция $W_0^L(t_1 - t_2)$ выделяется дополнителным условием спектральности: носитель $\widetilde{W}_0^L(\lambda)$ содержится в $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Однако произведение

$$\theta(\lambda) \cdot \frac{1}{i} \widetilde{D}^L(\lambda) = \theta(\lambda) \cdot P \frac{1}{\lambda}$$

плохо определено (т.к. имеет инфракрасную расходимость) и требует доопределения как обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Результат такого доопределения содержит произвольный размерный параметр $\varkappa > 0$ и может быть записан в виде

$$W_0^L(t_1 - t_2) = \int \theta(\lambda) \cdot \left(P \frac{1}{\lambda} \right) \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \ln(0 + i\varkappa(t_1 - t_2)). \tag{46}$$

Нетрудно видеть, что $W_0^L(t_1 - t_2)$ удовлетворяет всем требованиям, кроме положительной определенности. Это означает, что для поля $\varphi^L(t)$ не существует фоковского представления, согласованного с действием динамической группы (31). Иначе говоря, поле $\varphi^L(t)$ является нефоковской линейной бозонной системой.

Тем не менее, если ограничиться основными функциями вида $f = -\partial_t F$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то свойство положительной определенности отчасти выполняется:

$$\int W_0^L(t_1 - t_2) \partial_{t_1} \overline{F(t_1)} \partial_{t_2} F(t_2) dt_1 dt_2 = \int \theta(\lambda) \lambda |\widetilde{F}(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{2\pi} \geq 0.$$

Таким образом, функция $W_0^L(t)$ принадлежит к классу так называемых условно положительно-определенных обобщенных функций первого порядка. Поэтому левый ток $j^L(t) = \partial_t \varphi^L(t)$, и, значит, $*$ -подалгебра $\mathcal{B}$ калибровочно-инвариантных величин алгебры $\mathcal{A}$ поля $\varphi^L(t)$ обладает фоковским представлением, согласованным с действием

динамической группы. В этом смысле мы называем поле $\varphi^L(t)$ (или поле $\varphi(t, x)$) вырожденной линейной бозонной системой³⁾. Фоковское вакуумное состояние s_0 левого тока $j^L(t)$ определяется характеристическим функционалом

$$s_0(\mathcal{E}_f) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int W_0^L(t_1 - t_2) f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2\right) \quad (47)$$

при $f = -\partial_t F$, $F \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$.

Аналогичным образом функция $\widetilde{W}_T^L(\lambda)$ плохо определена (имеет инфракрасную расходимость). Ее можно доопределить как обобщенную функцию из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ формулой⁴⁾ (при

$$P \frac{1}{\lambda^2} = -\partial_\lambda P \frac{1}{\lambda}$$

и подходящем выборе вещественного параметра a_T)

$$\begin{aligned} W_T^L(t_1 - t_2) &= \int \left(\left(\frac{1 - \exp(-\beta\lambda)}{\lambda} \right)^{-1} P \frac{1}{\lambda^2} + a_T \delta(\lambda) \right) \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \left(0 + i\pi \frac{\beta}{\pi} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{\beta} (t_1 - t_2) \right) \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Из требований на двухточечную функцию не выполнено условие положительной определенности. Вместо этого $W_T^L(t)$ принадлежит к классу условно положительно-определенных функций первого порядка (т.е. $\lambda^2 \widetilde{W}_T^L(\lambda) \geq 0$). Поэтому для левого тока $j^L(t)$ и подалгебры $\mathcal{B}$ существует гиббсовское состояние s_T с характеристической функцией, получаемой из (47) заменой $W_0^L(t_1 - t_2)$ на $W_T^L(t_1 - t_2)$. Фоковское и гиббсовские представления алгебры $\mathcal{B}$ строятся однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности) процедурой Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) [9].

Состояние s_T ($T \geq 0$) подалгебры $\mathcal{B}$ индуцирует обобщенное состояние s_T алгебры $\mathcal{A}$ с характеристическим функционалом

$$s_T(\mathcal{E}_f) = 2\pi\delta\left(\int f(t) dt\right) \cdot s_T(\mathcal{E}_f), \quad f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \quad (49)$$

Обобщенное состояние (49) имеет бесконечную норму. В отличие от состояния s_T оно определено на *-идеале $\mathcal{J}$ алгебры $\mathcal{A}$, состоящем из элементов вида (40) с мерой $d\mu(f)$, которую мы назовем гладкой по $\tilde{f}(0)$. Это значит, что величина $\tilde{f}(0)$ не равна тождественно нулю на конечномерном подпространстве $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и что при выборе линейных координат $r_1 = \tilde{f}(0)$, $r_2, \dots, r_n$ на $\mathcal{M}$ мера $d\mu(f)$ представима в виде $d\mu(f) = \nu(r_1, \dots, r_n) dr_1 \dots dr_n$, где $\nu(r_1, \dots, r_n)$ – обобщенная функция в $\mathbb{R}^n$, гладкая

³⁾ В общем случае калибровочные группы систем этого класса имеют произвольную конечную размерность.

⁴⁾ См., например, [8, формула 4.116.3].

по переменной r_1 . Обобщенное состояние s_T получается из состояния s_T интегрированием по калибровочной группе $\mathbb{R}$:

$$s_T(A) = s_T\left(\int A^g dg^L\right), \quad A \in \mathcal{J}. \quad (50)$$

Конструкция ГНС легко распространяется на обобщенные состояния s_T , позволяя получить вакуумное и температурные представления алгебры $\mathcal{A}$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}_T$ порождается обобщенными векторами $X_{f,T}$ ($f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$) со скалярным произведением

$$\langle X_{f_1,T}, X_{f_2,T} \rangle = 2\pi\delta(-\tilde{f}_1(0) + \tilde{f}_2(0)) \cdot s_T(\mathcal{E}_{-f_1+f_2}). \quad (51)$$

Сглаживание векторов $X_{f,T}$ с произвольной гладкой по $\tilde{f}(0)$ мерой $d\mu(f)$, входящей в определение идеала $\mathcal{J}$, дает плотное в $\mathcal{H}_T$ множество векторов. Вакуумное или температурное представление $\mathcal{E}_f \rightarrow E_{f,T}$ определяется обобщенными матричными элементами

$$\langle X_{f_1,T}, E_{f,T} X_{f_2,T} \rangle = 2\pi\delta(-\tilde{f}_1(0) + \tilde{f}(0) + \tilde{f}_2(0)) \cdot s_T(\mathcal{E}_{-f_1+f+f_2}), \quad (52)$$

а квантовые поля $\varphi^L(t)$ и $\varphi(t, x)$ в вакуумном или температурном представлении определяются формулами (41), (36) и (17). Эти квантовые поля являются операторными обобщенными функциями над пространствами основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, соответственно. Динамическая группа сдвигов по времени и калибровочная группа реализованы унитарными операторами $U_T(\tau)$ и $V_T(g)$ в $\mathcal{H}_T$:

$$\begin{aligned} U_T(\tau)X_{f,T} &= X_{h,T} \quad \text{при} \quad h(t) = f(t + \tau), \\ V_T(g)X_{f,T} &= \exp(ig^L \tilde{f}(0)) \cdot X_{f,T}. \end{aligned} \quad (53)$$

От полей $\varphi^L(t)$ и $\varphi(t, x)$ нетрудно перейти к динамическим переменным броуновской частицы. Координата $q(t)$ квантовой броуновской частицы в вакуумном или температурном представлении как операторная обобщенная функция над пространством $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ определяется формулой (3) или эквивалентно формулой

$$q(t) = (\gamma m)^{-1/2} \Phi(t). \quad (54)$$

Функция $\Phi(t)$ определена в (19) и (27). Первое из уравнений Ланжевена (1) служит определением импульса $p(t)$, а второе из уравнений (1) сводится к первому из уравнений (21), если в качестве поля $\xi(t)$ в определении флуктуирующей силы взять левый ток:

$$\xi(t) = \partial_t \varphi^L(t) = j^L(t). \quad (55)$$

Отметим, что в вакуумном состоянии s_0 или в гиббсовском состоянии s_T подалгебры $\mathcal{B}$ флуктуирующая сила является гауссовским квантовым полем с нулевым средним и двухточечной функцией, определяемой соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle_0 &= \int \theta(\lambda) \lambda \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi}, \\ \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle_T &= \int (1 - \exp(-\beta\lambda))^{-1} \lambda \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi} \quad \text{при} \quad T > 0. \end{aligned} \quad (56)$$

При $T \rightarrow \infty$ получается “классический” белый шум:

$$\langle (\xi(t_1)\xi(t_2))_{\text{sym}} \rangle_T \sim \frac{1}{\beta} \delta(t_1 - t_2).$$

То, что $q(t)$ и $p(t)$ являются операторными обобщенными функциями, проявляется в интерпретации квантово-механических коммутационных соотношений. С помощью формулы (52) можно убедиться, что для $\alpha \in \mathbb{R}$, $h(t) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ существует предел

$$\exp\left(i\alpha \int q(t)h(t) dt\right)$$

при стремлении $h(t)$ к $\delta(t - t_0)$, что определяет $\exp(i\alpha q(t_0))$. Для

$$\exp\left(i\alpha \int p(t)h(t) dt\right)$$

такого предела не существует (из-за ультрафиолетовых расходимостей). Это значит, что операторная обобщенная функция $q(t)$ допускает сужение $q(t)|_{t=t_0}$, определяя координату $q(t_0)$ в фиксированный момент времени. Для импульса $p(t)$ подобное сужение не определено. В этой ситуации представляет интерес коммутационное соотношение между координатой и импульсом, вытекающее из (38):

$$[q(t_1), p(t_2)] = i \int 2\gamma(\gamma^2 + \lambda^2)^{-1} \exp(-i\lambda(t_1 - t_2)) \frac{d\lambda}{2\pi} = i \exp(-\gamma|t_1 - t_2|). \quad (57)$$

Отсюда следует, что хотя импульс $p(t)$ не определен в фиксированный момент времени, после сглаживания его посредством свертки с δ -образной последовательностью функций $h_n(t)$ равновременное каноническое коммутационное соотношение между координатой и импульсом воспроизводится в пределе $h(t) \rightarrow \delta(t)$:

$$[q(t_0), p_h(t_0)] \rightarrow i, \quad (58)$$

где $p_h(t) = p(t) * h(t)$.

Особенностью рассматриваемой модели броуновского движения является то, что уравнения Ланжевена не могут быть сформулированы в рамках алгебры, порождаемой флуктуирующей силой. Необходимо расширить эту алгебру введением первообразной от флуктуирующей силы. Действительно, как калибровочно-инвариантное поле флуктуирующая сила порождает не всю полевую алгебру, а лишь ее калибровочно-инвариантную подалгебру. Поэтому по флуктуирующей силе можно восстановить лишь импульс броуновской частицы. А именно, из формул (27) следует, что

$$\tilde{p}(\lambda) = \sqrt{2\gamma m} (\gamma - i\lambda)^{-1} \tilde{\xi}(\lambda),$$

так что импульс $p(t)$ есть свертка вида

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2\gamma m} \int \theta(t - \tau) \exp(-\gamma(t - \tau)) \xi(\tau) d\tau = \\ &= \sqrt{2\gamma m} (\theta(t) \exp(-\gamma t)) * \xi(t). \end{aligned} \quad (59)$$

Из формул (27) следует также, что

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\lambda) &= \sqrt{\frac{2\gamma}{m}} (\gamma - i\lambda)^{-1} \tilde{\varphi}^L(\lambda), \\ q(t) &= \sqrt{\frac{2\gamma}{m}} \int \theta(t - \tau) \exp(-\gamma(t - \tau)) \varphi^L(\tau) d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{2\gamma}{m}} (\theta(t) \exp(-\gamma t)) * \varphi^L(t).\end{aligned}\tag{60}$$

Не являясь калибровочно-инвариантной переменной и не коммутируя с группой операторов $V_T(g)$ калибровочных преобразований, координата $q(t)$ не может быть выражена только через флуктуирующую силу. В этом состоит принципиальное отличие “свободной” квантовой броуновской частицы от квантового осциллятора с трением.

Список литературы

- [1] *J. Schwinger.* J. Math. Phys. 1961. V. 2. № 3. P. 407–432.
- [2] *G. W. Ford, M. Kac, P. Mazur.* J. Math. Phys. 1965. V. 6. № 4. P. 504–515.
- [3] *H. Dekker.* Phys. Rep. 1981. V. 80. № 1. P. 1–112.
- [4] *J. T. Lewis, H. Maassen.* Hamiltonian models of classical and quantum stochastic processes. In: Lecture Notes in Mathematics. V. 1055. Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes. Eds L. Accardi, A. Frigerio, V. Corini. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1984. P. 245–276.
- [5] *G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O’Connell.* Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. № 21. P. 2273–2276.
- [6] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [7] *А. И. Оксак.* ТМФ. 1981. Т. 48. № 3. С. 297–318.
- [8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
- [9] *Ж. Диксмье.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 3.II.1998 г.