Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Функция Коши–Йоста и иерархия интегрируемых уравнений, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 272–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 07:18:33

© 2015 г. М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*, А. К. Погребков†

ФУНКЦИЯ КОШИ–ЙОСТА И ИЕРАРХИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Описаны свойства функции Коши–Йоста (известной также как функция Коши–Бейкера–Ахиезера) уравнения Кадомцева–Петвиашвили-II. Для этой функции с помощью $\bar{\partial}$ -метода показано, что все уравнения иерархии Кадомцева–Петвиашвили-II выписываются в компактной и явной форме, включая уравнения для самой функции Коши–Йоста, временные эволюции решений Йоста и эволюции потенциала уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: функция Коши–Йоста, уравнение КП-II, обратная задача.

DOI: 10.4213/tmf8982

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что билинейное тождество Хироты порождает иерархии интегрируемых уравнений (см., например, книгу [1], где рассмотрена иерархия уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП)). С другой стороны, имеется проблема доказательства этого тождества, которое основано на предположении, что данные рассеяния обращаются в нуль вне некоторой конечной области на комплексной плоскости. Это условие, будучи верным для некоторых классов решений, например солитонных, непригодно при рассмотрении решений, быстро убывающих на пространственной бесконечности (см. ниже). В настоящей работе мы доказываем, что одно из соотношений, полученных в статье [2], свободно от этого дефекта и может использоваться в обоих случаях: оно верно для класса быстроубывающих потенциалов, но, при некоторых дополнительных условиях, оно также приводит к билинейному тождеству Хироты. Учитывая, что в работе [2] (см. также [3], где рассмотрены некоторые другие интегрируемые иерархии) это соотношение выводится из

Разделы 3, 4 и 5 статьи написаны А. К. Погребковым, разделы 1, 2 и 6 написаны М. Бойти и Ф. Пемпинелли. Исследование А. К. Погребкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

*EINSTEIN Consortium, Lecce, Italy

†Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: pogreb.mi.ras.ru

тождества Хироты, мы получаем замкнутую формулировку иерархии интегрируемых уравнений в терминах функции Коши–Йоста $F(x, \lambda, \mu)$. Эта функция, будучи первообразной произведения решения Йоста и дуального решения Йоста, является основным объектом наших построений. Она хорошо известна и возникает естественным образом в теории (бинарного) преобразования Беклунда [4]. В работе [5] эта функция изучалась с алгебро-геометрической точки зрения и была названа ядром Коши–Бейкера–Ахиезера (функцией Коши–Бейкера–Ахиезера [2]). В настоящей работе, поскольку наш подход основан на $\bar{\partial}$ -проблеме для убывающих решений, мы предпочитаем использовать термин *функция Коши–Йоста*.

Статья организована следующим образом. В разделе 2, следуя стандартной формулировке обратной задачи для уравнения теплопроводности с убывающим потенциалом [6], [7], мы даем необходимые детали этого подхода и определяем функции Коши–Йоста посредством решений Йоста. Мы также рассматриваем проблему доказательств билинейного тождества Хироты, характерную для случая убывающих потенциалов. В разделе 3 перечислены некоторые свойства функций Коши–Йоста, включая $\bar{\partial}$ -проблему для нее. В разделе 4 мы включаем произвольное число “времен” и рассматриваем действие оператора, порождающего эволюции по этим временам, на функцию Коши–Йоста. Это позволяет представить в компактной форме (4.13) все эволюции, соответствующие иерархии КП. Полученное нами соотношение (4.13) совпадает с уравнением (41) из работы [2] с точностью до того, что там оно выводилось из билинейного тождества Хироты. В разделе 5 мы показываем, что это соотношение порождает не только иерархию эволюций, но и эволюции решений Йоста, а также соответствующие вторые операторы пар Лакса. Заключительные замечания даны в разделе 6.

2. РЕШЕНИЯ ЙОСТА, $\bar{\partial}$ -ПРОБЛЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ФУНКЦИЯ КОШИ–ЙОСТА

Начнем с некоторых стандартных свойств решений Йоста для уравнения теплопроводности; подробности можно найти, например, в работах [6]–[8]. Рассмотрим оператор Лакса и дуальный к нему:

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = -\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 + 2w_{x_1}(x), \quad \mathcal{L}^d(x, \partial_x) = \partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 + 2w_{x_1}(x), \quad (2.1)$$

где $x = (x_1, x_2)$ и для простоты дальнейших соотношений введена функция $w(x)$, связанная со стандартным потенциалом и τ -функцией как

$$u(x) = -2w_{x_1}(x), \quad w(x) = \partial_{x_1} \ln \tau(x). \quad (2.2)$$

Пусть $u(x)$ быстро убывает на пространственной бесконечности, т. е. быстрее, чем $(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$. Тогда решения Йоста $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ уравнения теплопроводности и его дуального уравнения,

$$\mathcal{L}(x, \partial_x)\varphi(x, \lambda) = 0, \quad \mathcal{L}^d(x, \partial_x)\psi(x, \lambda) = 0, \quad (2.3)$$

фиксированы тем условием, что функции $\chi(x, \lambda)$ и $\xi(x, \lambda)$, заданные равенствами

$$\varphi(x, \lambda) = e^{\ell(\lambda)x} \chi(x, \lambda), \quad \psi(x, \lambda) = e^{-\ell(\lambda)x} \xi(x, \lambda), \quad (2.4)$$

ограничены на комплексной плоскости спектрального параметра λ для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и, кроме того,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \chi(x, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi(x, \lambda) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \xi(x, \lambda) = 1. \quad (2.5)$$

В (2.4) мы ввели обозначение

$$\ell(\lambda)x = \lambda x_1 + \lambda^2 x_2. \quad (2.6)$$

Функции $\chi(x, \lambda)$ и $\xi(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\mathcal{L}(x, \partial_x) + 2\lambda \partial_{x_1})\chi(x, \lambda) = 0, \quad (\mathcal{L}^d(x, \partial_x) - 2\lambda \partial_{x_1})\xi(x, \lambda) = 0 \quad (2.7)$$

и определяются интегральными уравнениями

$$\chi(x, \lambda) = 1 - 2 \int dx' \chi(x', \lambda) w_{x'_1}(x') G_0(x - x', \lambda), \quad (2.8)$$

$$\xi(x, \lambda) = 1 - 2 \int dx' \xi(x', \lambda) w_{x'_1}(x') G_0(x' - x, \lambda), \quad (2.9)$$

где $G_0(x, \lambda)$ – функция Грина,

$$(\mathcal{L}_0(x, \partial_x) + 2\lambda \partial_{x_1})G_0(x, \lambda) = \delta(x_1)\delta(x_2), \quad (2.10)$$

$$G_0(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha [\theta((\lambda_{\text{Im}})^2 - \alpha^2) - \theta(x_2)] e^{(\alpha - \lambda_{\text{Im}})(ix_1 - (\alpha + \lambda_{\text{Im}} - 2i\lambda_{\text{Re}})x_2)}; \quad (2.11)$$

здесь $\mathcal{L}_0(x, \partial_x)$ – оператор (2.1) с $w \equiv 0$. Соотношения (2.8) и (2.9) дают асимптотические разложения решений Йоста:

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_{x_1}^{-1} \mathcal{L}(x, \partial_x)}{-2\lambda} \right)^n 1 \equiv 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_{x_1}^{-1} \mathcal{L}(x, \partial_x)}{-2\lambda} \right)^n w(x), \quad (2.12)$$

$$\xi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_{x_1}^{-1} \mathcal{L}^d(x, \partial_x)}{2\lambda} \right)^n 1 \equiv 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial_{x_1}^{-1} \mathcal{L}^d(x, \partial_x)}{2\lambda} \right)^n w(x). \quad (2.13)$$

Здесь $\partial_{x_1}^{-1}$ означает оператор, обратный к ∂_{x_1} . Изучение асимптотик функции (2.11) показывает, что этот оператор действует следующим образом:

$$(\partial_{x_1}^{-1} f)(x) = \frac{\text{sgn } \lambda_{\text{Im}}}{2\pi i} \int d^2 x' \frac{f(x')}{x_2 - x'_2 - i(x_1 - x'_1)\lambda_{\text{Im}}}, \quad (2.14)$$

порождая при эволюции по времени так называемые связи Манакова (ср. с работой [9], где таким образом изучается уравнение КП-I). Здесь мы опускаем эти подробности.

В работе [8] доказано, что решения Йоста выражаются через полную функцию Грина:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \int dx' e^{\ell(\lambda)x'} \mathcal{L}_0^d(x', \partial_{x'}) \mathcal{G}(x, x', \lambda) \equiv \\ &\equiv e^{\ell(\lambda)x} - 2 \int dx' e^{\ell(\lambda)x'} w_{x'_1}(x') \mathcal{G}(x, x', \lambda), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\psi(x', \lambda) &= \int dx e^{-\ell(\lambda)x} \mathcal{L}_0(x, \partial_x) \mathcal{G}(x, x', \lambda) \equiv \\ &\equiv e^{-\ell(\lambda)x'} - 2 \int dx e^{-\ell(\lambda)x} w_{x_1}(x) \mathcal{G}(x, x', \lambda),\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\chi(x, \lambda) &= \int dx' (\mathcal{L}_0^d(x', \partial_{x'}) - 2\lambda \partial_{x_1'}) G(x, x', \lambda) \equiv \\ &\equiv 1 - 2 \int dx' w_{x_1'}(x') G(x, x', \lambda),\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\xi(x', \lambda) &= \int dx (\mathcal{L}_0(x, \partial_x) + 2\lambda \partial_{x_1}) G(x, x', \lambda) \equiv \\ &\equiv 1 - 2 \int dx w_{x_1}(x) G(x, x', \lambda),\end{aligned}\quad (2.18)$$

где

$$G(x, x', \lambda) = e^{\ell(\lambda)(x'-x)} \mathcal{G}(x, x', \lambda) \quad (2.19)$$

и функции Грина удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) \mathcal{G}(x, x', \lambda) = \mathcal{L}^d(x', \partial_{x'}) \mathcal{G}(x, x', \lambda) = \delta(x - x') \equiv \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), \quad (2.20)$$

$$(\mathcal{L}(x, \partial_x) + 2\lambda \partial_{x_1}) G(x, x', \lambda) = (\mathcal{L}^d(x', \partial_{x'}) - 2\lambda \partial_{x_1'}) G(x, x', \lambda) = \delta(x - x'). \quad (2.21)$$

Вторые равенства в системе уравнений (2.15)–(2.18) следуют из соотношений (2.1), (2.20) и (2.21). Выражения (2.17) и (2.18) следуют из (2.15), (2.16) и (2.19). Отметим, что формулы (2.17) и (2.18) придают точный смысл разложениям (2.12) и (2.13). В свою очередь функции Грина выражаются через решения Йоста:

$$\mathcal{G}(x, x', \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha [\theta((\lambda_{\text{Im}})^2 - \alpha^2) - \theta(x_2 - x'_2)] \varphi(x, \lambda_{\text{Re}} + i\alpha) \psi(x', \lambda_{\text{Re}} + i\alpha), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}G(x, x', \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int d\alpha [\theta((\lambda_{\text{Im}})^2 - \alpha^2) - \theta(x_2 - x'_2)] \times \\ &\times e^{(\alpha - \lambda_{\text{Im}})(i(x_1 - x'_1) - (\alpha + \lambda_{\text{Im}} - 2i\lambda_{\text{Re}})(x_2 - x'_2))} \chi(x, \lambda_{\text{Re}} + i\alpha) \xi(x', \lambda_{\text{Re}} + i\alpha).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Специфическое свойство функции Грина следует из наблюдения [8], что ее функциональная производная по потенциалу выражается через нее саму:

$$\frac{\delta \mathcal{G}(x, y, \lambda)}{\delta u(z)} = \mathcal{G}(x, z, \lambda) \mathcal{G}(z, y, \lambda), \quad (2.24)$$

тогда как в функциональные производные решений Йоста входит функция Грина,

$$\frac{\delta \varphi(x, \lambda)}{\delta u(y)} = \mathcal{G}(x, y, \lambda) \varphi(y, \lambda), \quad \frac{\delta \psi(x, \lambda)}{\delta u(y)} = \psi(y, \lambda) \mathcal{G}(y, x, \lambda), \quad (2.25)$$

что следует из применения формулы (2.24) к первым равенствам в (2.15) и (2.16).

В силу вещественности потенциала $w_{x_1}(x)$ мы имеем свойства сопряжения

$$\overline{\varphi(x, \lambda)} = \varphi(x, \bar{\lambda}), \quad \overline{\psi(x, \lambda)} = \psi(x, \bar{\lambda}), \quad (2.26)$$

а также условия нормировки и полноты

$$\int dx_1 \psi(x, \lambda + ip) \varphi(x, \lambda) = 2\pi \delta(p), \quad p \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

$$\int d\lambda_{\text{Im}} [\psi(x', \lambda) \varphi(x, \lambda)]_{x'_2=x_2} = 2\pi \delta(x_1 - x'_1) \quad (2.28)$$

для решений Йоста. В работе [8] также доказано, что полная функция Грина подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, x', \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{i \operatorname{sgn} \lambda_{\text{Im}}}{2\pi} \varphi(x, \bar{\lambda}) \psi(x', \bar{\lambda}), \quad (2.29)$$

что в силу (2.15) и (2.16) дает стандартные уравнения обратной задачи

$$\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = \varphi(x, \bar{\lambda}) r(\lambda), \quad \frac{\partial \psi(x, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = -\psi(x, \bar{\lambda}) r(\bar{\lambda}) \quad (2.30)$$

или

$$\frac{\partial \chi(x, \mu)}{\partial \bar{\mu}} = \chi(x, \bar{\mu}) r(\mu) e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x}, \quad \frac{\partial \xi(x, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = -r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} \xi(x, \bar{\lambda}), \quad (2.31)$$

где $r(\lambda)$ – данные рассеяния,

$$r(\lambda) = \frac{\operatorname{sgn} \lambda_{\text{Im}}}{\pi i} \int d^2 x e^{-\ell(\bar{\lambda})x} w_{x_1}(x) \varphi(x, \lambda) \equiv \frac{\operatorname{sgn} \lambda_{\text{Im}}}{\pi i} \int d^2 x e^{2i \operatorname{Im} \ell(\lambda)x} w_{x_1}(x) \chi(x, \lambda), \quad (2.32)$$

$$r(\lambda) = \frac{\operatorname{sgn} \lambda_{\text{Im}}}{\pi i} \int d^2 x e^{\ell(\lambda)x} w_{x_1}(x) \psi(x, \bar{\lambda}) \equiv \frac{\operatorname{sgn} \lambda_{\text{Im}}}{\pi i} \int d^2 x e^{2i \operatorname{Im} \ell(\lambda)x} w_{x_1}(x) \xi(x, \bar{\lambda}), \quad (2.33)$$

удовлетворяющие свойству сопряжения $\overline{r(\bar{\lambda})} = r(\lambda)$. Здесь мы предполагаем, что первое и второе уравнения (2.31) однозначно разрешимы при условиях

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \chi(x, \lambda) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi(x, \lambda) = 1 \quad (2.34)$$

соответственно. В этих терминах билинейное тождество Хироты (см., например, книгу [1]) имеет вид

$$\oint_C d\lambda \varphi(x, \lambda) \psi(x', \lambda) = 0, \quad (2.35)$$

где C – произвольный (гладкий) контур вблизи бесконечности на комплексной плоскости параметра λ . Стандартный вывод этого равенства основан на предположении о зависимости $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x', \lambda)$ от бесконечного набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots)$. В частности, в (2.4) вместо (2.6) подставляется формальный ряд

$$\ell(\lambda)x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k x_k. \quad (2.36)$$

В [1] показано, что (в предположении о справедливости асимптотических разложений (2.12) и (2.13) под знаком интеграла) с помощью формальных алгебраических

операций можно доказать, что потенциал $u(x) \equiv u(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ удовлетворяет уравнениям иерархии КП-П по всем x_k .

Не вдаваясь в подробности определения функций от бесконечного набора переменных, покажем, что при выводе тождества Хироты (2.35) в случае убывающего потенциала $u(x)$ мы сталкиваемся со специфической проблемой. Действительно, из (2.30) и формулы Грина имеем

$$\begin{aligned} \oint_C d\lambda \varphi(x, \lambda) \psi(x', \lambda) &= \int_D d\bar{\lambda} \wedge d\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \varphi(x, \lambda) \psi(x', \lambda) = \\ &= \left(\int_D - \int_{\bar{D}} \right) d\lambda \wedge d\bar{\lambda} r(\lambda) \varphi(x, \bar{\lambda}) \psi(x', \lambda), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где D – внутренность контура C на комплексной λ -плоскости и $\bar{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{\lambda} \in D\}$. Таким образом, правая часть формулы (2.37) равна нулю, только если область D (а следовательно, и контур C) симметрична относительно действительной оси. Мы можем получить ноль для произвольного контура на бесконечности, только если наложим дополнительное условие, что $r(\lambda)$ имеет конечный носитель, принадлежащий множеству $D \cap \bar{D}$ (см., например, работу [2]).

С другой стороны, производящая функция интегралов движения в случае убывающего потенциала, как известно (см., например [8]), равна

$$\rho(\lambda) = \int d^2x w_{x_1}(x) \chi(x, \lambda) \equiv \int d^2x w_{x_1}(x) \xi(x, \bar{\lambda}), \quad (2.38)$$

так что на вещественной оси в силу соотношений (2.32) и (2.33) имеем

$$\lim_{\lambda_{\text{Im}} \rightarrow \pm 0} r(\lambda) = \frac{\pm 1}{\pi i} \rho(\lambda_{\text{Re}}). \quad (2.39)$$

Таким образом, предположение о конечности носителя функции $r(\lambda)$ означает, что все интегралы движения (коэффициенты разложения по $1/\lambda$ функции $\rho(\lambda)$) равны нулю. Другими словами, это приводит к тривиальным решениям уравнения КП-П. Подчеркнем, что условие убывания потенциала здесь существенно. К примеру, в случае солитонного потенциала решения Йоста удовлетворяют условию (2.35), поскольку данные рассеяния для солитонных потенциалов являются конечными суммами дельта-функций, т.е. имеют конечный носитель. В то же время аргументация, подобная приведенной выше, для солитонных решений неприменима в силу того, что интегралы движения (2.38) в этом случае расходятся [10].

В настоящей работе мы показываем, что рассмотрение, основанное на функции Коши–Йоста, которая задана с помощью решений Йоста по формуле

$$F(x, \lambda, \mu) = \int_{(\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}})\infty}^{x_1} dy_1 [\psi(y, \lambda) \varphi(y, \mu)]_{y_2=x_2}, \quad (2.40)$$

где $(\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}})\infty$ означает знак бесконечного предела, дает явное описание полной иерархии КП-П, включая сами уравнения и временные эволюции решений Йоста. Свойства этой функции подробно рассматриваются в следующем разделе.

3. ФУНКЦИЯ КОШИ–ЙОСТА В СЛУЧАЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Интеграл в (2.40) сходится для всех $\lambda \neq \mu$, что следует из асимптотического поведения (2.4)–(2.6) решений Йоста, и определяет гладкую функцию своих аргументов для этих значений $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. При $\mu = \lambda$ функция Коши–Йоста имеет полюс [5], поскольку из (2.40) вытекает, что

$$\lim_{\lambda_{\text{Re}} \rightarrow \mu_{\text{Re}} \pm 0} F(x, \lambda, \mu) = \int_{\pm\infty}^{x_1} dy_1 [\psi(y, \mu_{\text{Re}} + i\lambda_{\text{Im}}) \varphi(y, \mu)]_{y_2=x_2}, \quad (3.1)$$

а условие ортогональности (2.27) решений Йоста дает

$$\left(\lim_{\lambda_{\text{Re}} \rightarrow \mu_{\text{Re}} + 0} - \lim_{\lambda_{\text{Re}} \rightarrow \mu_{\text{Re}} - 0} \right) F(x, \lambda, \mu) = -2\pi\delta(\lambda_{\text{Im}} - \mu_{\text{Im}}). \quad (3.2)$$

Таким образом, $\text{res}_{\mu=\lambda} F(x, \lambda, \mu) = 1$.

Чтобы контролировать асимптотическое поведение этой функции, введем по аналогии с (2.4) функцию Коши–Йоста без экспоненциальных множителей:

$$f(x, \lambda, \mu) = e^{(\ell(\lambda) - \ell(\mu))x} F(x, \lambda, \mu). \quad (3.3)$$

Тогда в силу (2.4) равенство (2.40) приводит к выражению

$$f(x, \lambda, \mu) = \int_{\text{Re}(\lambda - \mu)\infty}^{x_1} dy_1 e^{(\lambda - \mu)(x_1 - y_1)} [\xi(y, \lambda) \chi(y, \mu)]_{y_2=x_2}, \quad (3.4)$$

которое при асимптотическом условии (2.5) на решения Йоста дает

$$f(x, \lambda, \mu) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Введем также функцию $g(x, \lambda, \mu)$ с помощью равенства

$$f(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\mu - \lambda} + g(x, \lambda, \mu). \quad (3.6)$$

В силу (3.4) она равна

$$g(x, \lambda, \mu) = \int_{\text{Re}(\lambda - \mu)\infty}^{x_1} dy_1 e^{(\lambda - \mu)(x_1 - y_1)} [\xi(y, \lambda) \chi(y, \mu) - 1]_{y_2=x_2}, \quad (3.7)$$

а из (2.4) следует ограниченность этой функции при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, таких что $\lambda \neq \bar{\mu}$. Эта функция убывает при $x \rightarrow \infty$ или при стремлении как λ , так и μ к бесконечности. Снова в силу (2.4) и (2.5) для асимптотического поведения $f(x, \lambda, \mu)$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda f(x, \lambda, \mu) = -1 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda g(x, \lambda, \mu) = -\chi(x, \mu), \quad (3.8)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu f(x, \lambda, \mu) = 1 + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu g(x, \lambda, \mu) = \xi(x, \lambda), \quad (3.9)$$

а из главных членов асимптотических разложений (2.12), (2.13) получаем

$$\lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \lambda \mu g(x, \lambda, \mu) = w(x) \quad (3.10)$$

или, в силу (2.2),

$$u(x) = -\frac{1}{2} \lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \lambda \mu f_{x_1}(x, \lambda, \mu). \quad (3.11)$$

Учитывая сингулярное поведение функции $F(x, \lambda, \mu)$ при $\lambda = \mu$, а также соотношения (2.40) и (2.30), мы имеем для $\bar{\partial}$ -производных функции Коши–Йоста по спектральным параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\lambda}} &= -\pi \delta(\lambda - \mu) - r(\bar{\lambda}) F(x, \bar{\lambda}, \mu), \\ \frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\mu}} &= \pi \delta(\lambda - \mu) + F(x, \lambda, \bar{\mu}) r(\mu); \end{aligned} \quad (3.12)$$

здесь и далее мы определяем дельта-функцию комплексной переменной λ как $\delta(\lambda) = \delta(\lambda_{\text{Re}}) \delta(\lambda_{\text{Im}})$, поэтому

$$\partial_{\bar{\lambda}} \frac{1}{\lambda} = \pi \delta(\lambda), \quad \int d\bar{z} \wedge dz \delta(z) = 2i. \quad (3.13)$$

В терминах функции $f(x, \lambda, \mu)$, уравнения (3.12) принимают вид

$$\frac{\partial f(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\lambda}} = -\pi \delta(\lambda - \mu) - r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} f(x, \bar{\lambda}, \mu), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\mu}} = \pi \delta(\lambda - \mu) + f(x, \lambda, \bar{\mu}) r(\mu) e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x}. \quad (3.15)$$

С учетом асимптотического поведения функции $f(x, \lambda, \mu)$ эти уравнения могут быть сведены к любому из следующих интегральных уравнений:

$$f(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(\bar{z})}{z - \lambda} e^{(\ell(z) - \ell(\bar{z}))x} f(x, \bar{z}, \mu), \quad (3.16)$$

$$f(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(z)}{z - \mu} e^{(\ell(\bar{z}) - \ell(z))x} f(x, \lambda, \bar{z}), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} f(x, \lambda, \mu) &= \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(z)}{(\lambda - \bar{z})(\mu - z)} e^{(\ell(\bar{z}) - \ell(z))x} - \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(\bar{z})}{\lambda - z} \int \frac{d\bar{z}' \wedge dz' r(z')}{\mu - z'} e^{(\ell(z) - \ell(\bar{z}) + \ell(\bar{z}') - \ell(z'))x} f(x, \bar{z}, \bar{z}'). \end{aligned} \quad (3.18)$$

В частности, функции $f(x, \lambda, \mu)$ и $F(x, \lambda, \mu)$, соответствующие нулевым данным рассеяния, равны

$$f_0(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad F_0(x, \lambda, \mu) = \frac{e^{(\ell(\mu) - \ell(\lambda))x}}{\mu - \lambda}, \quad (3.19)$$

где второе равенство следует из формулы (3.3).

В силу условия ортогональности (2.27) мы с учетом (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \lim_{\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}} \rightarrow \pm 0} F(x, \lambda, \mu) &= 0, \\ \lim_{x_1 \rightarrow \mp\infty} \lim_{\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}} \rightarrow \pm 0} F(x, \lambda, \mu) &= \mp 2\pi\delta(\lambda_{\text{Im}} - \mu_{\text{Im}}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тогда из соотношений (3.12) следует, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow \mp\infty} \lim_{\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}} \rightarrow \pm 0} \frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\lambda}} = \pm 2\pi r(\bar{\lambda})\delta(\lambda_{\text{Im}} + \mu_{\text{Im}}), \quad (3.21)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \mp\infty} \lim_{\lambda_{\text{Re}} - \mu_{\text{Re}} \rightarrow \pm 0} \frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\mu}} = \mp 2\pi r(\bar{\lambda})\delta(\lambda_{\text{Im}} + \mu_{\text{Im}}). \quad (3.22)$$

Таким образом, функция $F(x, \lambda, \mu)$, будучи заданной, определяет как первообразную $w(x)$ потенциала $u(x)$ с помощью предельного перехода в (3.10), так и данные рассеяния с помощью предыдущих равенств.

Следует заметить, что всё построение можно обратить в том смысле, что можно начать с функции Коши–Йоста, которая определяется как убывающее по λ (или по μ) решение уравнения (3.14) (или (3.15) соответственно), в предположении, что при таком предельном условии уравнение (3.14) (или (3.15)) однозначно разрешимо при некоторых ограничениях на гладкость и малость нормы данных рассеяния $r(\lambda)$. Чтобы доказать, что решение уравнения (3.14) подчиняется также уравнению (3.15), рассмотрим ∂_{λ} -производную разности левой и правой частей уравнения (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left(\frac{\partial f(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\mu}} - \pi\delta(\lambda - \mu) - f(x, \lambda, \bar{\mu})r(\mu)e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x} \right) = \\ = -r(\bar{\lambda})e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} \left(\frac{\partial f(x, \bar{\lambda}, \mu)}{\partial \bar{\mu}} - \pi\delta(\bar{\lambda} - \mu) - f(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})r(\mu)e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x} \right), \end{aligned}$$

где использована формула (3.14). Видно, что выражение в скобках удовлетворяет однородному уравнению (3.14) и убывает при $\lambda \rightarrow \infty$ из-за наложенного на $f(x, \lambda, \mu)$ условия. Ввиду предположения об однозначной разрешимости уравнения (3.14) однородное уравнение имеет только нулевое решение. Это доказывает, что уравнение (3.15) следует из (3.14). Обратное утверждение можно доказать тем же способом.

Пусть теперь функция $g(x, \lambda, \mu)$ определяется выражением (3.6). В силу (3.14) она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g(x, \lambda, \mu)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{r(\bar{\lambda})e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x}}{\mu - \bar{\lambda}} - r(\bar{\lambda})e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x}g(x, \bar{\lambda}, \mu) \quad (3.23)$$

или интегральному уравнению

$$g(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \left(-\int \frac{d\bar{\nu} \wedge d\nu}{(\nu - \bar{\lambda})(\bar{\nu} - \mu)} r(\bar{\nu}) e^{(\ell(\nu) - \ell(\bar{\nu}))x} + \int \frac{d\bar{\nu} \wedge d\nu}{\nu - \bar{\lambda}} r(\bar{\nu}) e^{(\ell(\nu) - \ell(\bar{\nu}))x} g(x, \bar{\nu}, \mu) \right) \quad (3.24)$$

в силу (3.16). Здесь неоднородный член является гладкой ограниченной функцией от $x \in \mathbb{R}^2$ при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ за исключением случая $\lambda = \bar{\mu}$, когда он может иметь

логарифмическую особенность. Далее мы предполагаем, что это единственная особенность функции $g(x, \lambda, \mu)$.

Наконец, если функция $f(x, \lambda, \mu)$ дана, можно определить решения Йоста и потенциал уравнения теплопроводности с помощью формул (3.8), (3.9), (3.11) или (3.10). Отметим также, что вследствие уравнения (3.24) функция $g(x, \lambda, \mu)$ убывает при $\lambda \rightarrow \infty$ или $\mu \rightarrow \infty$, допускает асимптотическое разложение по обоим указанным комплексным переменным, причем коэффициенты разложений не зависят от порядка этих операций. Более того, пусть у нас есть два набора спектральных данных $r(\lambda)$ и $r'(\lambda)$ и соответствующие функции $F(x, \lambda, \mu)$ и $F'(x, \lambda, \mu)$, заданные уравнениями (3.14) или (3.15). Тогда, в силу, например, первого из уравнений (3.12), получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} [F'(x, \lambda, \mu) - F(x, \lambda, \mu)] = [r(\bar{\lambda}) - r'(\bar{\lambda})] F'(x, \bar{\lambda}, \mu) - r(\bar{\lambda}) [F'(x, \bar{\lambda}, \mu) - F(x, \bar{\lambda}, \mu)],$$

так что разность $F' - F$ удовлетворяет тому же $\bar{\partial}$ -уравнению с неоднородным членом, равным

$$\frac{1}{2i} \int d\bar{\nu} \wedge d\nu \delta(\lambda - \nu) [r(\bar{\nu}) - r'(\bar{\nu})] F'(x, \bar{\nu}, \mu).$$

Эта разность убывает при $\lambda \rightarrow \infty$, таким образом, в силу предположения об однозначной разрешимости уравнения (3.12) получаем

$$F'(x, \lambda, \mu) - F(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int d\bar{\nu} \wedge d\nu F(x, \lambda, \bar{\nu}) (r'(\nu) - r(\nu)) F'(x, \nu, \mu). \quad (3.25)$$

Учитывая формулы (3.19), видим, что это равенство обобщает интегральные уравнения для F и сводится к ним в том случае, когда $r'(\lambda)$ или $r(\lambda)$ тождественно равна нулю. С помощью равенства (3.25) имеем также

$$\frac{\delta F(x, \lambda, \mu)}{\delta r(\nu)} = \frac{1}{\pi} F(x, \lambda, \bar{\nu}) F(x, \nu, \mu), \quad (3.26)$$

т. е. для функциональной производной функции Коши-Йоста по данным рассеяния мы получаем равенство, аналогичное функциональной производной функции Грина по потенциалу (см. соотношение (2.24)).

Для вычисления функциональной производной функции $F(x, \lambda, \mu)$ по $u(x)$, запишем, пользуясь выражениями (2.25), равенство

$$\frac{\delta \psi(x, \lambda) \varphi(x, \mu)}{\delta u(y)} = \psi(y, \lambda) \mathcal{G}(y, x, \lambda) \varphi(x, \mu) + \psi(x, \lambda) \mathcal{G}(x, y, \mu) \varphi(y, \mu),$$

так что с учетом (2.22) и (2.40) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta F(x, \lambda, \mu)}{\delta u(y)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\alpha [\theta((\lambda_{\text{Im}})^2 - \alpha^2) - \theta(y_2 - x_2)] F_{y_1}(y, \lambda, \lambda_{\text{Re}} + i\alpha) F(x, \lambda_{\text{Re}} + i\alpha, \mu) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int d\alpha [\theta((\mu_{\text{Im}})^2 - \alpha^2) - \theta(x_2 - y_2)] F(x, \lambda, \mu_{\text{Re}} + i\alpha) F_{y_1}(y, \mu_{\text{Re}} + i\alpha, \mu). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Соотношения (3.26) и (3.27) демонстрируют специфическое свойство функции Коши-Йоста: ее инфинитезимальные преобразования представляются в виде билинейных комбинаций самой функции. Подтверждение этого свойства мы получим далее при рассмотрении временных эволюций.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЧИСЛУ ВРЕМЕН

Рассмотрим теперь эволюцию потенциала оператора теплопроводности (2.1) по бесконечному набору времен $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Строго говоря, роль времен играют переменные x_k при $k \geq 3$, а x_1 и x_2 , входящие в уравнение теплопроводности (2.3), суть пространственные переменные. Чтобы избежать проблемы определения функций, зависящих от бесконечного набора переменных, мы вводим здесь зависимость от произвольного конечного числа N времен $x_1, \dots, x_N$, полагая

$$\ell(\lambda)x = \sum_{k=1}^N \lambda^k x_k \quad (4.1)$$

во всех уравнениях $\bar{\partial}$ -задачи (ср. с (2.36)). Точнее, подставим в (2.6) (и тем самым в (2.40) и в (3.4), где условие $x_2 = y_2$ нужно заменить на $x_k = y_k$ для $k \geq 2$) вместо $\ell(\lambda)x$ из (2.4), выражение (4.1). Ту же подстановку следует произвести и в формулах (3.19), и в уравнениях (2.30), (3.14)–(3.18), (3.23) и (3.24), задающих $\bar{\partial}$ -производные решений Йоста и функции Коши–Йоста. Тогда вследствие (3.14) и (3.15) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f_{x_k}(x, \lambda, \mu) = (\bar{\lambda}^k - \lambda^k) r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} f(x, \bar{\lambda}, \mu) - r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} f_{x_k}(x, \bar{\lambda}, \mu), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} f_{x_k}(x, \lambda, \mu) = (\bar{\mu}^k - \mu^k) f(x, \lambda, \bar{\mu}) r(\mu) e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x} + f_{x_k}(x, \lambda, \bar{\mu}) r(\mu) e^{(\ell(\bar{\mu}) - \ell(\mu))x} \quad (4.3)$$

для любого $k \leq N$, в то время как для $k > N$ первые слагаемые в правых частях в правой части равны нулю, а тогда в силу предположения об однозначной разрешимости уравнений (3.14) и производные $f_{x_k}(x, \lambda, \mu) = 0$ для всех $k > N$. Учитывая уравнение (4.2), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial_{x_k}}{\nu^{k+1}} f(x, \lambda, \mu) = \\ = - \left(\frac{1 - (\lambda/\nu)^{N+1}}{\nu - \lambda} - \frac{1 - (\bar{\lambda}/\nu)^{N+1}}{\nu - \bar{\lambda}} \right) r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} f(x, \bar{\lambda}, \mu) - \\ - r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial_{x_k}}{\nu^{k+1}} f(x, \bar{\lambda}, \mu), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где суммы конечны в силу предыдущего замечания. Тогда k -е уравнение в (4.2) является не чем иным, как равенством коэффициентов при ν^{-k-1} в разложении по $1/\nu$ левой и правой частей уравнения (4.4).

Определим теперь оператор $X(\nu)$ его действием на функцию Коши–Йоста:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} X(\nu) f(x, \lambda, \mu) = - \left(\frac{1}{\nu - \lambda} - \frac{1}{\nu - \bar{\lambda}} \right) r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} f(x, \bar{\lambda}, \mu) - \\ - r(\bar{\lambda}) e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} X(\nu) f(x, \bar{\lambda}, \mu). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ясно, что разложение по $1/\nu$ первого слагаемого в правой части данного равенства совпадает с разложением первого слагаемого в правой части (4.4) до порядка ν^{-N-1} . Таким образом, $X(\nu)f(x, \lambda, \mu)$ тоже допускает разложение по $1/\nu$, при этом коэффициент при ν^{-k-1} равен $f_{x_k}(x, \lambda, \mu)$ для всех $k \leq N$. Учитывая, что (4.1) – частный случай тождества (2.36), где $x_k = 0$ для всех $k > N$, получаем, что при $k > N$ этот коэффициент равен $f_{x_k}(x, \lambda, \mu)$, где следует положить $x_j = 0$ при $j > N$. Данный факт позволяет избежать формального подхода, основанного на использовании функций бесконечного числа переменных, когда $\ell(\lambda)x$ вводится посредством (2.36), а оператор $X(\nu)$ – равенством

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_{x_k}}{\nu^{k+1}}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad \nu \neq 0. \quad (4.6)$$

В силу произвольности N в (4.1) оператор $X(\nu)$, введенный в (4.5), можно считать производящим оператором для производных функции Коши-Йоста по всем высшим временам.

Используя уравнение (3.14), перепишем (4.5) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left(X(\nu)f(x, \lambda, \mu) - \frac{f(x, \lambda, \mu)}{\nu - \lambda} \right) = \\ = \pi \frac{\delta(\lambda - \mu)}{\nu - \mu} + \pi \delta(\lambda - \nu)f(x, \nu, \mu) - r(\bar{\lambda})e^{(\ell(\lambda) - \ell(\bar{\lambda}))x} \left(X(\nu)f(x, \bar{\lambda}, \mu) - \frac{f(x, \bar{\lambda}, \mu)}{\nu - \bar{\lambda}} \right), \end{aligned}$$

так что выражение в скобках подчиняется $\bar{\partial}$ -уравнению (3.14) с неоднородным членом

$$\frac{\delta(\lambda - \mu)}{\nu - \mu} + \delta(\lambda - \nu)f(x, \nu, \mu) = \int \frac{d\bar{\nu}' \wedge d\nu'}{2i} \delta(\lambda - \nu') \left(\frac{\delta(\nu' - \mu)}{\nu - \mu} + \delta(\nu' - \nu)f(x, \nu, \mu) \right).$$

В смысле обобщенных функций этот член убывает при $\lambda \rightarrow \infty$, так что с учетом (3.14) получаем

$$X(\nu)f(x, \lambda, \mu) - \frac{f(x, \lambda, \mu)}{\nu - \lambda} = - \int \frac{d\bar{\nu}' \wedge d\nu'}{2i} f(x, \lambda, \nu') \left(\frac{\delta(\nu' - \mu)}{\nu - \mu} + \delta(\nu' - \nu)f(x, \nu, \mu) \right),$$

и после интегрирования в правой части мы имеем

$$X(\nu)f(x, \lambda, \mu) = \left(\frac{1}{\mu - \nu} - \frac{1}{\lambda - \nu} \right) f(x, \lambda, \mu) - f(x, \lambda, \nu)f(x, \nu, \mu). \quad (4.7)$$

Теперь благодаря равенству (3.6) и асимптотическим свойствам (3.8)–(3.10) мы получаем действие оператора $X(\nu)$ на решения Йоста и потенциалы:

$$X(\nu)\chi(x, \mu) = \frac{\chi(x, \mu)}{\mu - \nu} - \chi(x, \nu)f(x, \nu, \mu), \quad (4.8)$$

$$X(\nu)\xi(x, \lambda) = -\frac{\xi(x, \lambda)}{\lambda - \nu} - f(x, \lambda, \nu)\xi(x, \nu), \quad (4.9)$$

$$X(\nu)w(x) = \chi(x, \nu)\xi(x, \nu) - 1 \equiv \varphi(x, \nu)\psi(x, \nu) - 1, \quad (4.10)$$

где в последнем равенстве мы использовали формулы (2.4). Эволюция функции $f(x, \lambda, \mu)$, решений Йоста и потенциала $w(x)$ по любому конечному числу времен иерархии КП-II получается путем разложения по $1/\nu$ соотношений (4.7)–(4.10).

Уравнение (4.7) заслуживает некоторых комментариев. Его левая часть регулярна для любых значений λ, μ, ν , поскольку единственная сингулярность при $\lambda = \mu$ выпадает при дифференцировании. Чтобы проверить регулярность правой части, воспользуемся равенством (3.6) и перепишем уравнение (4.7) в виде

$$X(\nu)f(x, \lambda, \mu) = \frac{g(x, \lambda, \mu) - g(x, \lambda, \nu)}{\mu - \nu} - \frac{g(x, \lambda, \mu) - g(x, \nu, \mu)}{\lambda - \nu} - g(x, \lambda, \nu)g(x, \nu, \mu), \quad (4.11)$$

так что особенности при $\nu = \lambda$ и $\nu = \mu$ также сокращаются, хотя предельные значения в этих точках могут зависеть от способа предельного перехода. Легко видеть, что операторы $X(\nu)$ и $X(\nu')$ коммутируют. Действительно, в силу, например, представления (4.6) имеем

$$\begin{aligned} X(\nu')X(\nu)f(x, \lambda, \mu) &= \left(\frac{1}{\mu - \nu'} - \frac{1}{\lambda - \nu'}\right)\left(\frac{1}{\mu - \nu} - \frac{1}{\lambda - \nu}\right)f(x, \lambda, \mu) - \\ &- \left(\frac{1}{\mu - \nu} - \frac{1}{\lambda - \nu}\right)f(x, \lambda, \nu')f(x, \nu', \mu) - \left(\frac{1}{\mu - \nu'} - \frac{1}{\lambda - \nu'}\right)f(x, \lambda, \nu)f(x, \nu, \mu) + \\ &+ f(x, \lambda, \nu')f(x, \nu', \nu)f(x, \nu, \mu) + f(x, \lambda, \nu)f(x, \nu, \nu')f(x, \nu', \mu). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Заметим, что, подставляя в (2.4) вместо $\ell(\lambda)x$ формальный ряд из (2.36), полагая, что $|\nu| > |\lambda|$, $|\nu| > |\mu|$ и используя оператор $X(\nu)$, заданный в (4.6), можно формально записать уравнения (4.7)–(4.9) в более компактной форме

$$X(\nu)F(x, \lambda, \mu) = -F(x, \lambda, \nu)F(x, \nu, \mu), \quad (4.13)$$

$$X(\nu)\varphi(x, \mu) = -\varphi(x, \nu)F(x, \nu, \mu), \quad (4.14)$$

$$X(\nu)\psi(x, \lambda) = -F(x, \lambda, \nu)\psi(x, \nu). \quad (4.15)$$

Первое из этих уравнений еще раз показывает, что (ср. с (3.26) и (3.27)) инфинитезимальные преобразования функции Коши–Йоста даются в виде ее билинейных комбинаций.

Соотношения (4.13)–(4.15) были выведены в работе [2] для случая потенциала с конечным носителем и было показано, что соотношение (4.13) позволяет получить все уравнения иерархий КП-II и мКП-II. В следующем разделе мы рассматриваем некоторые специфические аспекты асимптотического разложения этого равенства. Здесь отметим, что при том же предположении о конечности носителя данных рассеяния, что и при выводе тождества Хироты (2.25), вследствие (3.12) мы имеем для λ и μ вне контура C

$$\oint_C d\nu F(x, \lambda, \nu)F(x', \nu, \mu) = 0. \quad (4.16)$$

Это равенство, в свою очередь, приводит к тождеству Хироты в силу асимптотических свойств функции Коши–Йоста. Как мы только что показали, предположение о носителе данных рассеяния $r(\lambda)$ не является необходимым для получения соотношений (4.7)–(4.10). В то же время соотношения (4.8) и (4.9) (или их формальные

аналоги (4.14) и (4.15)) показывают, что функция Коши–Йоста естественно возникает при описании эволюций решений Йоста.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Как следует из предыдущего построения, производная функции Коши–Йоста $f(x, \lambda, \mu)$ по некоторому времени x_k возникает как коэффициент при ν^{-k-1} в асимптотическом разложении равенства (4.7) по $1/\nu$, $\nu \in \mathbb{C}$. В правую часть этого равенства параметр ν входит явно и как аргумент функций $f(x, \lambda, \nu)$ и $f(x, \nu, \mu)$, так что нам нужны асимптотические разложения функции $f(x, \lambda, \mu)$ по обоим параметрам λ и μ . Но из (3.6) следует, что из-за члена $(\mu - \lambda)^{-1}$ эти разложения зависят от того, в каком порядке мы их выполняем. С другой стороны, асимптотические разложения второго члена $g(x, \lambda, \mu)$ в (3.6) не зависят от последовательности разложений, поскольку, подставляя это равенство в (3.18), имеем

$$g(x, \lambda, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(z)}{(\lambda - \bar{z})(\mu - z)} e^{(\ell(\bar{z}) - \ell(z))x} - \\ - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{d\bar{z} \wedge dz r(\bar{z})}{\lambda - z} \int \frac{d\bar{z}' \wedge dz' r(z')}{\mu - z'} e^{(\ell(z) - \ell(\bar{z}) + \ell(\bar{z}') - \ell(z'))x} f(x, \bar{z}, \bar{z}'). \quad (5.1)$$

Введем обозначение $g(x, l, m)$, $l, m = 0, 1, 2, \dots$, для коэффициентов асимптотического разложения функции $g(x, \lambda, \mu)$ при стремлении λ и/или μ к бесконечности:

$$g(x, \lambda, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g(x, l, \mu)}{\lambda^{l+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g(x, \lambda, m)}{\mu^{m+1}} = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{g(x, l, m)}{\lambda^{l+1} \mu^{m+1}}, \quad (5.2)$$

так что

$$g(x, l, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g(x, l, m)}{\mu^{m+1}}, \quad g(x, \lambda, m) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g(x, l, m)}{\lambda^{l+1}}. \quad (5.3)$$

В силу (3.8)–(3.10) имеем

$$g(x, 0, \mu) = 1 - \chi(x, \mu), \quad (5.4)$$

$$g(x, \lambda, 0) = -1 + \xi(x, \lambda), \quad (5.5)$$

$$g(x, 0, 0) = w(x), \quad (5.6)$$

где необходимо подчеркнуть, что, скажем, $g(x, 0, \mu)$ является не значением $g(x, \lambda, \mu)$ при $\lambda = 0$, а коэффициентом при $1/\lambda$ в первом из равенств (5.2).

Ввиду вышесказанного последний член в правой части равенства (4.11) не зависит от того, в каком порядке выполняются асимптотические разложения. Замечательный факт состоит в том, что первые два члена в правой части этого равенства тоже не зависят от порядка действий, поскольку с учетом (5.2) и (5.3) имеем

$$\frac{g(x, \lambda, \mu) - g(x, \lambda, \nu)}{\mu - \nu} = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(x, l, k+m)}{\lambda^{l+1} \mu^{m+1} \nu^{k+1}}, \quad (5.7)$$

$$\frac{g(x, \lambda, \mu) - g(x, \nu, \mu)}{\lambda - \nu} = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(x, l+k, m)}{\lambda^{l+1} \mu^{m+1} \nu^{k+1}}. \quad (5.8)$$

Таким образом, асимптотические ряды в правой части уравнения (4.7), являющегося просто другой формой уравнения (4.11), не зависят от порядка, в котором устремляются к бесконечности три комплексных параметра λ , μ и ν . Уравнение (4.7) более удобно для асимптотического разложения, однако при этом промежуточные объекты нуждаются в особом внимании. Следуя обозначению (5.2), введем

$$f(x, \lambda, \mu) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f'(x, l, \mu)}{\lambda^{l+1}}, & \lambda \rightarrow \infty, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f''(x, \lambda, m)}{\mu^{m+1}}, & \mu \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.9)$$

где в силу (5.3)

$$f'(x, l, \mu) = -\mu^l + g(x, l, \mu), \quad f''(x, \lambda, m) = \lambda^m + g(x, \lambda, m) \quad (5.10)$$

для $l, m = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, мы имеем различные и при этом растущие выражения для коэффициентных функций этих разложений.

Решения Йоста были введены в соотношениях (3.8) и (3.9) (см. также (5.4) и (5.5)) как предельные значения функции Коши–Йоста, в этих обозначениях они имеют вид

$$f'(x, 0, \mu) = -\chi(x, \mu), \quad f''(x, \lambda, 0) = \xi(x, \lambda). \quad (5.11)$$

Поскольку асимптотическое разложение выражения (4.7) не зависит от порядка выполнения разложений, можно использовать это равенство, чтобы получить эволюции по временам для решений Йоста и потенциала, что обосновывает вышеприведенные формулы (4.8)–(4.10). Так, с помощью (5.9) мы выводим из (4.7) следующие уравнения:

$$X(\nu)f'(x, l, \mu) = \frac{f'(x, l, \mu)}{\mu - \nu} - \sum_{j=0}^{l-1} \nu^{l-1-j} f'(x, j, \mu) - f'(x, l, \nu)f(x, \nu, \mu), \quad (5.12)$$

$$X(\nu)f''(x, \lambda, m) = \sum_{j=0}^{m-1} \nu^{m-1-j} f''(x, \lambda, j) - \frac{f''(x, \lambda, m)}{\lambda - \nu} - f(x, \lambda, \nu)f''(x, \nu, m). \quad (5.13)$$

С помощью соотношений (5.10) можно получить асимптотические разложения этих равенств при $\nu \rightarrow \infty$:

$$\partial_{x_k} f'(x, l, \mu) = f'(x, l+k, \mu) - \mu^k f'(x, l, \mu) - \sum_{j=0}^{k-1} g(x, l, k-1-j) f'(x, j, \mu), \quad (5.14)$$

$$\partial_{x_k} f''(x, \lambda, m) = -f''(x, \lambda, m+k) + \lambda^k f''(x, \lambda, m) - \sum_{j=0}^{m-1} f''(x, \lambda, k-1-j) g(x, j, m). \quad (5.15)$$

С другой стороны, разлагая (4.7) сначала по ν , имеем

$$\partial_{x_k} f(x, \lambda, \mu) = (\lambda^k - \mu^k) f(x, \lambda, \mu) - \sum_{l=0}^{k-1} f''(x, \lambda, k-l-1) f'(x, l, \mu), \quad (5.16)$$

и легко показать, что вследствие (5.10) все положительные степени λ и μ , и асимптотические разложения этих равенств по λ и μ приводят к (5.14) и (5.15) соответственно. Видно, что в случае, когда в (5.12) $l = 0$ (или в (5.13) $m = 0$) правые части упрощаются, и в силу (5.11) мы приходим к соотношениям (4.8) и (4.9). Дальнейшие асимптотические разложения уравнений (5.14) и (5.15) возможны после подстановки выражений (5.10), что дает

$$\partial_{x_k} g(x, l, m) = g(x, l + k, m) - g(x, l, k + m) - \sum_{j=0}^{k-1} g(x, l, j) g(x, k - 1 - j, m). \quad (5.17)$$

Положив здесь $l = m = 0$, с учетом обозначений (5.4)–(5.6) мы получаем соотношение (4.10). Отметим, что член порядка ν^{-1} в разложении равенства (4.10) дает ноль, члены, пропорциональные ν^{-2} и ν^{-3} , дают тождества, а для члена порядка ν^{-4} получим

$$8w_{x_3}(x) = 2w_{x_1 x_1 x_1}(x) + 12(w_{x_1}(x)^2) + 6\partial_{x_1}^{-1} w_{x_2 x_2}(x), \quad (5.18)$$

т.е. уравнение МКП-II, которое в силу (2.2) дает стандартную форму уравнения КП-II:

$$(u_t - 3(u^2)_{x_1} + u_{x_1 x_1 x_1})_{x_1} = -3u_{x_2 x_2}. \quad (5.19)$$

Уравнение (5.17) также дает рекуррентную процедуру для определения всех коэффициентов $g(x, l, m)$ в (5.6) начиная с $g(x, 0, 0)$. Действительно, высшие коэффициенты в правой части (5.6) появляются в виде разности $g(x, l + k, m) - g(x, l, k + m)$. С другой стороны, для $k = 1$ имеем

$$\partial_{x_1} g(l, m) = g(l + 1, m) - g(l, m + 1) - g(l, 0)g(0, m), \quad (5.20)$$

и в $\partial_{x_1} \partial_{x_{k-1}} g(x, l, m)$ эти коэффициенты входят в виде $g(x, l + k, m) + g(x, l, k + m)$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (5.16), соответствующие низшим эволюциям по x_1 , x_2 и x_3 :

$$\partial_{x_1} f(x, \lambda, \mu) = (\lambda - \mu)f(x, \lambda, \mu) - f''(x, \lambda, 0)f'(x, 0, \mu), \quad (5.21)$$

$$\partial_{x_2} f(x, \lambda, \mu) = (\lambda^2 - \mu^2)f(x, \lambda, \mu) - f''(x, \lambda, 1)f'(x, 0, \mu) - f''(x, \lambda, 0)f'(x, 1, \mu), \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_3} f(x, \lambda, \mu) = & (\lambda^3 - \mu^3)f(x, \lambda, \mu) - \\ & - f''(x, \lambda, 2)f'(x, 0, \mu) - f''(x, \lambda, 1)f'(x, 1, \mu) - f''(x, \lambda, 0)f'(x, 2, \mu). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Используя обозначение (5.6), мы выводим из разложений (5.14) и (5.15), что

$$\partial_{x_1} f'(x, 0, \mu) = -(\mu + w(x))f'(x, 0, \mu) + f'(x, 1, \mu), \quad (5.24)$$

$$\partial_{x_1} f''(x, \lambda, 0) = (\lambda - w(x))f''(x, \lambda, 0) - f''(x, \lambda, 1), \quad (5.25)$$

а тогда

$$\mathcal{L}_0(x, \partial_x) f(x, \lambda, \mu) = -2\mu f_{x_1}(x, \lambda, \mu) - 2f''_{x_1}(x, \lambda, 0)f'(x, 0, \mu), \quad (5.26)$$

$$\mathcal{L}_0^d(x, \partial_x) f(x, \lambda, \mu) = 2\lambda f_{x_1}(x, \lambda, \mu) - 2f''(x, \lambda, 0)f'_{x_1}(x, 0, \mu). \quad (5.27)$$

Эти равенства дают действие дифференциальных операторов на функцию $f(x, \lambda, \mu)$, выраженное через объекты с одним нулевым аргументом, т. е. через решения Йоста вида (5.11):

$$\mathcal{L}_0(x, \partial_x)f(x, \lambda, \mu) = -2\mu f_{x_1}(x, \lambda, \mu) + 2\xi_{x_1}(x, \lambda)\chi(x, \mu), \quad (5.28)$$

$$\mathcal{L}_0^d(x, \partial_x)f(x, \lambda, \mu) = 2\lambda f_{x_1}(x, \lambda, \mu) + 2\xi(x, \lambda)\chi_{x_1}(x, \mu), \quad (5.29)$$

так что главные члены разложения первого равенства по λ и второго равенства по μ в точности совпадают с (2.7) в силу формул (3.8)–(3.10).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, мы видим, что уравнение (4.7) вместе с его асимптотическим поведением, заданным в (3.5), и представлением (3.6) определяет все объекты иерархии КП-II и их эволюции. В свою очередь, все эти эволюции потенциала в компактной форме представлены формулой (4.10).

Список литературы

- [1] Т. Miwa, М. Jimbo, Е. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics, **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4683–4700.
- [3] L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4701–4728.
- [4] V. B. Matveev, М. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [5] P. G. Grinevich, А. Yu. Orlov, “Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmannians, $\det \bar{\partial}_j$ and Segal–Wilson τ -function”, *Problems of Modern Quantum Field Theory*, eds. А. А. Belavin, А. U. Klimyk, А. B. Zamolodchikov, Springer, Berlin, 1989, 86–106.
- [6] M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, А. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **69**:2 (1983), 135.
- [7] M. V. Wickerhauser, *Commun. Math. Phys.*, **108**:1 (1987), 67–89.
- [8] M. Boiti, F. Pempinelli, А. К. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 937–957.
- [9] M. Boiti, F. Pempinelli, А. К. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4683–4718.
- [10] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **159**:3 (2009), 364–378.

Поступила в редакцию 30.04.2015