Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Киселев, Асимптотика диспергирующих волн
в спиральной структуре, *ТМФ*, 2016, том 187, но-
мер 1, 21–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:38:23

© 2016 г.

В. В. Киселев*

АСИМПТОТИКА ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВОЛН В СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

В рамках интегрируемой модели sine-Гордон в спиральных структурах магнетиков исследовано поведение при больших временах слабонелинейного диспергирующего волнового поля, порожденного пространственно локализованным начальным возмущением структуры. Применяемый метод основан на прямом асимптотическом анализе соответствующей матричной задачи Римана на торе.

Ключевые слова: спиральная структура, уравнение sine-Гордон, асимптотика, диспергирующие волны.

DOI: 10.4213/tmf8985

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель sine-Гордон является универсальной для описания нелинейных процессов в несоизмеримых структурах конденсированных сред [1]–[3] и, в частности, в спиральных (полосовых доменных) структурах магнетиков и мультиферроиков [4]–[7]. Основное состояние таких систем пространственно неоднородно и теоретически описывается одномерной решеткой из 2π -кинков (доменных границ). Из-за сильной нелинейности модели и основного состояния среды анализ солитоноподобных возбуждений и волн в спиральных структурах возможен только с привлечением специальных методов интегрирования. В работах [8], [9] для исследования солитонов на фоне спиральной структуры использовались преобразования Дарбу и Беклунда. В работе [10] дана формулировка задачи Римана, пригодная для полного анализа солитонов и нелинейных волн в спиральных структурах. Хотя U – V -пара интегрируемой модели sine-Гордон рационально зависит от спектрального параметра, условие сопряжения аналитических функций, которое лежит в основе метода

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема “Квант”, № 01201463332).

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

интегрирования, формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности. Риманова поверхность связана с периодической спиральной структурой и оказывается топологически эквивалентной тору. Процедура из работы [10] дает аналитическое описание солитонов и диспергирующих волн при локализованных начальных возмущениях спиральной структуры и заданных краевых условиях на бесконечности. Установлено, что образование солитонов в спиральной структуре всегда сопровождается ее макроскопическими трансляциями. Найдены формулы, которые связывают сдвиги в краевых условиях фоновой структуры с параметрами, определяющими строение и скорость солитонов.

В настоящей работе предполагается, что внешнее воздействие на систему достаточно мало и не вызывает макроскопических сдвигов структуры, приводящих к образованию солитонов. При таких условиях вычисляется главный член асимптотики при $t \rightarrow +\infty$ для волнового поля в случае локализованных в пространстве начальных возмущений спиральной структуры.

Напомним, что для волновых интегрируемых нелинейных моделей матрица сопряжения задачи Римана в пределе

$$t \rightarrow +\infty, \quad \frac{z}{t} = O(1) \quad (1.1)$$

(где z и t – пространственная координата и время) обычно быстро осциллирует на множестве непрерывного спектра вспомогательной линейной системы всюду, за исключением окрестностей стационарных точек. В работах [11], [12] это обстоятельство использовано для сведения исходной задачи Римана к набору более простых задач. Упрощение задачи Римана характеризуется тем, что все матрицы сопряжения постоянны по спектральному параметру. Соответствующие задачи называются изомонодронными. Их фундаментальные решения удовлетворяют дополнительным линейным дифференциальным уравнениям относительно спектрального параметра. Для решения дополнительных уравнений удалось использовать мощные аналитические средства – теорию специальных функций и метод ВКБ. Это позволило найти временные асимптотики типичных изомонодронных задач [13], [14] и описать при больших временах поведение волновых полей многих нелинейных интегрируемых систем с однородным основным состоянием.

Характерная особенность временных асимптотик нелинейных волновых интегрируемых моделей – наличие в фазе колебаний поля поправок, логарифмически зависящих от времени. Проблема состоит в получении приближенных выражений для волнового поля при $t \rightarrow +\infty$ в терминах начальных условий задачи. Процедура, предложенная в работах [11], [12], эффективно решает эту проблему.

При построении асимптотик волновых полей предлагались различные приемы для упрощения исходной задачи Римана. Для модели sine-Гордон с однородным основным состоянием временные асимптотики волнового поля в отсутствие солитонов найдены в работах [15], [16].

Систематический и элегантный подход к изучению асимптотического поведения осциллирующих задач Римана предложен в работах [17], [18]. Его основная идея состоит в следующем. Посредством подходящих треугольных факторизаций матрицы сопряжения исходную задачу Римана локализуют вблизи стационарных точек. Вводятся новые аналитические функции и разделяющий их контур. На новом контуре

спектральные коэффициенты модельной задачи кусочно-постоянны, а матрица сопряжения экспоненциально стремится к единичной при удалении от стационарных точек. В конечном счете решение упрощенной задачи Римана выражается через специальные функции. Преимущества такой схемы для анализа волновых полей в нелинейных интегрируемых моделях с однородным основным состоянием проиллюстрированы в работах [18], [19]. Представляет интерес распространение подхода, предложенного в [18], на более сложные задачи.

В настоящей работе для модели sine-Гордон предлагается одна из версий данного подхода для расчета волнового поля на фоне спиральной структуры в пределе $t \rightarrow +\infty$, $z/t = O(1)$. Эта пространственно-временная область представляет наибольший интерес, так как в ней осцилляции волнового поля вносят основной вклад в интегралы движения системы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Модель sine-Гордон, наиболее популярная при обсуждении волновых процессов в магнетиках и мультиферроиках со спиральной структурой, имеет вид

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (2.1)$$

Угол Φ задает распределение вектора ферро- или антиферромагнетизма. Например, в ферромагнетике с анизотропией типа легкая плоскость вектор ферромагнетизма записывается как $\mathbf{M} = M_0(\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$, где M_0 – номинальная намагниченность [20].

В безразмерных переменных плотность энергии хиральных магнетиков без центра инверсии имеет вид

$$w = \frac{1}{2}[(\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2] + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi).$$

Управляющий параметр q зависит от температуры или внешнего поля (электрического или магнитного). При $q < 4/\pi$ минимуму энергии отвечает однородное распределение параметра порядка $\Phi = 0 \bmod(2\pi)$, а при $q > 4/\pi$ – спиральная структура в виде решетки 2π -кинков:

$$\Phi \equiv \varphi_0 = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), \quad (2.2)$$

где $\chi = z/k$ и $0 < k < 1$ – модуль эллиптических функций Якоби. Выражение (2.2) описывает домены длины $L_0 = 2Kk$, в пределах которых $\Phi \approx 2\pi s$ (здесь s – целое число), разделенные доменными границами ширины $l_0 = 2Kk'/\pi$. Здесь и далее $K = K(k)$, $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы первого рода от модуля k и дополнительного модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$ [21], [22]. Каждой доменной границе отвечает 2π -кинк поля Φ [20],

$$\Phi \approx 4 \operatorname{arctg} e^{-(z - mL_0)/l_0} \bmod(2\pi),$$

который описывает локализованный спиральный поворот вектора ферро- или антиферромагнетизма (здесь m – целое число). Экспериментально наблюдаются длинопериодические структуры с $L_0 > l_0$. Это налагает ограничения на значения k .

Например, при $L_0 = 3l_0$ модуль $k = 0.67$. Если же $L_0 \simeq 7l_0$, то $k = 0.99$. Наличие малого параметра $k' = \sqrt{1 - k^2} \ll 1$ упрощает анализ.

Далее мы рассматриваем волновые процессы при локализованных начальных возмущениях спиральной структуры, не сопровождающихся образованием солитонов. Им соответствуют решения модели (2.1) с асимптотическими условиями $\Phi(\chi, t) \rightarrow \varphi^{(0)}(\chi)$ при $z \rightarrow \pm\infty$.

Перейдем к формулировке задачи Римана [10], [20], лежащей в основе расчетов. Уравнение sine-Гордон (2.1) эквивалентно условию совместности следующей вспомогательной системы линейных уравнений [23]:

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_z \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right], \\ \partial_z \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_t \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_2 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_1 \sin \frac{\Phi}{2} \right],\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $w_1^2 - w_2^2 = 1$, σ_i ($i = 1, 2, 3$) – матрицы Паули. В параметризации $w_1 = \text{sn}(u, k)$, $w_2 = i \text{sn}(u, k)$ частное решение системы (2.3), отвечающее фоновой структуре $\varphi_0(\chi)$, имеет вид

$$\Psi_0(u, \chi, t) = M(u, \chi) e^{C(u, \chi, t) \sigma_3},\tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}C(u, \chi, t) &= ip(u)\chi + \frac{it}{2k} \text{dn}(u, k), \quad p(u) = \frac{i}{2} Z(u, k), \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi + u) & i\sigma(\chi + 2iK' - u) e^{-\eta_3(\chi + iK' - u)} \\ -i\sigma(\chi + 2iK' + u) e^{-\eta_3(\chi + iK' + u)} & \sigma(\chi - u) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \frac{m(\chi)}{\sigma(u)} e^{-(\eta_1 u/K)\chi \sigma_3}, \\ m(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sigma(iK')}{\sigma(\chi + iK')} \right|, \quad \det M = \frac{\text{dn}(u, k)}{1 - \text{dn}(u, k)}.\end{aligned}$$

Здесь сигма-функции Вейерштрасса имеют периоды $2K$, $4iK'$, а $Z(u, k)$ – дзета-функция Якоби [21], [22]. Функция $M(u, \chi)$ периодична по χ с периодом $4K$. Для функции $\Psi_0(u, \chi, t)$ величина $p(u)$ играет роль блоховского квазиимпульса:

$$\Psi_0(u, \chi \pm 4K, t) = \Psi_0(u, \chi, t) e^{\pm 4Kip(u) \sigma_3}.$$

Матрица $\Psi_0(u)$ обладает следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned}\Psi_0(u \pm 2K) &= \sigma_3 \Psi_0(u) \sigma_3, \quad \Psi_0^*[(u \pm 2iK')^*] = \sigma_1 \Psi_0(u) \frac{k \text{sn}(u, k)}{1 + \text{dn}(u, k)}, \\ \Psi_0^*(-u^*) &= -\sigma_2 \Psi_0(u) \sigma_2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Фундаментальные решения Йоста вспомогательной системы (2.3) задаются асимптотическими условиями

$$\Psi_{1,2} \rightarrow \Psi_0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \mp\infty.\tag{2.6}$$

Решения Йоста являются двоякопериодическими по спектральному параметру u с периодами $4K$, $4iK'$. Непрерывному спектру задачи (2.3), (2.6) соответствует множество

$$\Gamma = \{u: \text{Im } p(u) = 0\} = \{u: \text{Re } u = 0, K, \quad |\text{Im } u| \leq 2K'\} \quad \text{mod}(2K, 4iK').$$

Рис. 1. Области аналитичности $D_{\pm}^{(1,2)}$ функций $\mu_{\pm}(u)$ в параллелограмме периодов и контур $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ (толстые линии).

На контуре Γ фундаментальные решения связаны между собой:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Матрица перехода

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}$$

зависит только от спектрального параметра u и обладает следующими свойствами для $u \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), & \bar{a}(u) &= a^*(-u^*), \\ a(u)\bar{a}(u) + b(u)\bar{b}(u) &= 1, & a(u \pm 2K) &= a(u), & a^*[(u \pm 2iK')^*] &= a(u), \\ b(u \pm 2K) &= -b(u), & b^*[(u \pm 2iK')^*] &= b(u). \end{aligned}$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести кусочно-аналитические матричные функции параметра u

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \exp \left[\frac{i}{4}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3 \right] (\Psi_2^{(1)}, \Psi_1^{(2)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}^{-1} \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}, \\ \mu_- &= \exp \left[\frac{i}{4}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3 \right] (\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(2)}) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\Psi^{(i)}$ для i -го столбца матрицы Ψ ($i = 1, 2$). Согласно результатам работы [10] функции $\mu_+(u)$, $\bar{a}(u)$ аналитически продолжаются с контура Γ в область $D_+ = \{u: \text{Im } p(u) > 0\}$, а функции $\mu_-(u)$, $a(u)$ аналитически продолжаются в область $D_- = \{u: \text{Im } p(u) < 0\}$. Области $D_{\pm}$ определены по $\text{mod}(2K, 4iK')$.

На рис. 1 изображены области $D_{\pm}^{(1)}$, $D_{\pm}^{(2)}$ и разграничивающие их отрезки γ_1 , γ_2 , $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K$, $4iK'$. Направления обхода контура $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ выбраны так, что области $D_-^{(1)}$, $D_-^{(2)}$ остаются слева.

В отсутствие солитонов функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности. Проблема интегрирования вспомогательных уравнений (2.3) и модели

sine-Гордон (2.1) сводится к решению регулярной задачи Римана, которая формулируется следующим образом [10], [20]. Необходимо найти аналитические в областях D_+ и D_- , двоякопериодические (с периодами $4K$, $4iK'$) функции $\mu_+(u)$ и $\mu_-(u)$, которые удовлетворяют условию сопряжения на контуре Γ

$$\mu_+(u) = \mu_-(u)G(u), \quad G(u) = \Psi_0(u) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{r}(u) \\ -r(u) & 1 + r(u)\bar{r}(u) \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u), \quad (2.8)$$

редукциям

$$\mu_{\pm}(u + 2K) = \sigma_3 \mu_{\pm}(u) \sigma_3, \quad \mu_{\pm}^*[(u + 2iK')^*] = \sigma_1 \mu_{\pm}(u) \sigma_1, \quad (2.9)$$

ограничению

$$\mu_+(u) = \sigma_2 \mu_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \Gamma, \quad (2.10)$$

и условию нормировки

$$\mu_{\pm}(-iK') = I. \quad (2.11)$$

Здесь коэффициенты $r(u)$, $\bar{r}(u)$, называемые также коэффициентами отражения, определяются соотношениями

$$r(u) = \frac{a(u)}{b(u)}, \quad \bar{r}(u) = r^*(-u^*), \quad u \in \Gamma, \quad (2.12)$$

и обладают следующими свойствами симметрии на контуре Γ :

$$r(u \pm 2K) = -r(u), \quad r^*[(u \pm 2iK')^*] = r(u), \quad u \in \Gamma. \quad (2.13)$$

Условие (2.8) сопряжения аналитических функций $\mu_{\pm}$ является иной формой записи связи (2.7) решений Йоста на контуре Γ . Свойства симметрии (2.9) и (2.10) функций $\mu_{\pm}(u)$ следуют из аналогичных условий для функций Йоста.

После того как решение задачи Римана (2.8)–(2.11) найдено, по нему восстанавливается не только решение линейной системы (2.3), но и точное решение исходной существенно нелинейной модели sine-Гордон. Для этого достаточно воспользоваться формулой [10], [20]

$$\mu_{\pm}(iK') = \exp \left[\frac{i}{2} (\Phi - \varphi_0) \sigma_3 \right]. \quad (2.14)$$

В работе [10] решение регулярной задачи Римана (2.8)–(2.11) сведено к системе линейных интегральных уравнений на торе. При $|r(u)| \ll 1$, $u \in \Gamma$, их приближенное решение найдено методом последовательных приближений. В линейном по $|r(u)|$ приближении выражение для волнового поля имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi - \varphi_0 \approx \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-K'}^{K'} dv r^*(iv) U(iv, \chi) e^{2C(iv, \chi, t)} + \right. \\ \left. + \int_{-K'}^{K'} dv r^*(iv - K) U(iv - K, \chi) e^{2C(iv - K, \chi, t)} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Функция

$$U(u, \chi) \equiv M_{11}(u, \chi) M_{21}(u, \chi) [\operatorname{dn}(u, k) - 1] \quad (2.16)$$

определяет периодическую часть функции Ламе $\Lambda(u, \chi)$:

$$\Lambda(u, \chi) = U(u, \chi) e^{2ip(u)\chi}, \quad U(u, \chi \pm 2K) = -U(u, \chi).$$

Уравнение Ламе возникает при линеаризации уравнения sine-Гордон относительно фоновой структуры $\varphi_0(\chi)$ [10], [20]. Два слагаемых в правой части равенства (2.15) соответствуют вкладам в волновое поле Φ от активационных и голдстоуновских мод на фоне спиральной структуры.

В представлении (2.15) значения функции

$$2C(u, \chi, t) = -Z(u)\chi + \frac{it}{k} \operatorname{dn}(u, k) \quad (2.17)$$

являются чисто мнимыми при $u = iv, iv - K$. Внутри интервалов интегрирования функции $U(iv, \chi)$, $U(iv - K, \chi)$ ограничены по переменной v и периодичны по $\chi = z/k$, а фазовые множители e^{2C} в пределе (1.1) быстро осциллируют всюду, за исключением окрестностей точек стационарной фазы. Поэтому при больших временах приближенное значение волнового поля можно найти, вычислив интеграл (2.15) методом стационарной фазы.

Пусть для определенности $z > 0$, $t > 0$, тогда точки стационарной фазы $2C(iv)$ определяются корнями уравнения

$$\frac{z}{t} = \frac{k^2 \operatorname{sn}(v, k')}{\beta + \alpha \operatorname{sn}^2(v, k')} < 1, \quad (2.18)$$

где постоянные $\alpha = E/K - (k')^2$ и $\beta = 1 - E/K$ удовлетворяют ограничениям

$$k^2 = \alpha + \beta, \quad \alpha > \beta k' > 0, \quad |\beta - \alpha| < k^2.$$

Здесь $E = E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода [21], [22]. На отрезке $|v| \leq 2K'$ уравнение (2.18) имеет корни $v = v_0$ и $v = 2K' - v_0$, где $0 < v_0 < K'$.

При тех же условиях на отрезке значений переменной $u = iv - K$ при $|v| \leq 2K'$ точки стационарной фазы $2C(iv - K)$ существуют лишь при условии

$$\frac{z}{t} < \frac{Kk'}{E} < 1. \quad (2.19)$$

Величина Kk'/E – это максимальная групповая скорость голдстоуновских мод в спиральной структуре [8]. Для длиннопериодических спиральных структур в пространственно-временной области $z/t = O(1)$ условие (2.19) не выполняется. В этой области волновое поле определяется вкладом только активационных мод.

В пределе (1.1) интеграл (2.15) дает

$$\Phi - \varphi_0 \approx 4 \sqrt{\frac{2}{\pi t \sigma(v_0)}} \operatorname{Re}(r^*(iv_0) U(iv_0, \chi) e^{2C(iv_0, \chi, t) + \pi i/4}), \quad (2.20)$$

где

$$2\partial_v^2 C(iv_0) = i\sigma(v_0)t, \quad \sigma(v_0) = \frac{kd'_0[\beta - \alpha(s'_0)^2]}{c'_0[\beta + \alpha(s'_0)^2]} > 0. \quad (2.21)$$

Рис. 2. Области ограниченности функции e^C (заштрихованы) и области ограниченности функции e^{-C} (оставлены светлыми).

Здесь для сокращения записи введены обозначения $s'_0 = \text{sn}(v_0, k')$ и т. д. Для длиннопериодических структур $\beta > \alpha(s'_0)^2$.

Из-за медленного спада волнового поля при больших временах взаимодействия диспергирующих волн приводят к малым поправкам в амплитуде и фазе колебаний поля Φ (2.20). Наша цель состоит в том, чтобы найти эти изменения и выразить их через начальные спектральные данные задачи.

3. РАСЧЕТ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

В формулировке задачи Римана (2.8) матрица сопряжения G имеет следующую алгебраическую структуру:

$$G(u, \chi, t) = M(u, \chi, t)g(u, \chi, t)M^{-1}(u, \chi, t), \quad (3.1)$$

где

$$g(u, \chi, t) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{r}(u) e^{2C(u, \chi, t)} \\ -r(u) e^{-2C(u, \chi, t)} & 1 + r(u)\bar{r}(u) \end{pmatrix}.$$

Матричная функция M периодична по χ с периодом $4K$,

$$M(u, \chi \pm 2K) = \sigma_3 M(u, \chi) \sigma_3,$$

а функция $C(u, \chi, t)$ линейна по χ, t (см. соотношение (2.17)). Обе функции мероморфны по параметру u . В пределе (1.1) множители $e^{\pm 2C}$ быстро осциллируют на контуре Γ всюду, за исключением окрестностей стационарных точек. Анализ показывает, что функции $e^{\pm C}$ аналитически продолжаются с контура Γ и остаются ограниченными только в определенных областях фундаментального прямоугольника. А именно, при условии

$$\frac{Kk'}{E} < \frac{z}{t} < 1$$

функция e^C (функция e^{-C}) ограничена в заштрихованных (соответственно светлых) областях на рис. 2. Граница между заштрихованными и светлыми областями

Рис. 3. Полу плоскости $D_{\pm}^{(1)}$ и контуры γ_1 , γ_2 , $\tilde{\gamma}_2$ в комплексной плоскости параметра λ , $\nu = \sqrt{(1-k')/(1+k')}$. Заштрихованы области, в которых ограничена функция e^C ; области, в которых ограничена функция e^{-C} , оставлены светлыми.

(линия $\text{Re } C(u) = 0$) пересекает контур Γ в стационарных точках под прямым углом. В точках пересечения с Γ линии $\text{Re } C(u) = 0$ имеют локальные экстремумы.

Для получения приближенного решения задачи Римана (2.8) нужно перейти от нее к новой модельной задаче Римана, для которой матрица сопряжения между новыми аналитическими функциями $\mu_{\pm}^{(1)}(u)$ будет экспоненциально стремиться к единичной при удалении от стационарных точек, а коэффициенты $r(u)$, $\bar{r}(u)$ кусочно-постоянны. Покажем, что при наличии спиральной структуры такая схема расчета (ее называют методом наискорейшего нелинейного спуска) позволяет аналитически описать поведение волнового поля $\Phi(z, t)$ при больших временах.

Упрощение исходной задачи Римана (2.8) выполним в несколько этапов. Прежде всего заметим, что отрезки γ_2 и $\tilde{\gamma}_2$, через которые осуществляется переход из областей $D_{\pm}^{(1)}$ в области $D_{\pm}^{(2)}$ (см. рис. 1), не содержат стационарных точек: матрицы скачков в пределе (1.1) быстро осциллируют. Поэтому при расчете асимптотического поведения функции $\Phi(z, t)$ можно пренебречь вкладами от скачков функций $\mu_{\pm}(u)$ на контурах γ_2 и $\tilde{\gamma}_2$.

Введем новый спектральный параметр

$$\lambda = \text{cn}(u, k) + i \text{sn}(u, k), \quad |\text{Re } u| < K, \quad |\text{Im } u| < 2K'.$$

Тогда области $D_{+}^{(1)}$ и $D_{-}^{(1)}$ изменения параметра u конформно отображаются соответственно в верхнюю и нижнюю полу плоскости комплексного параметра λ (далее эти полу плоскости тоже обозначены как $D_{+}^{(1)}$ и $D_{-}^{(1)}$). Отрезок γ_1 перейдет в вещественную ось $\text{Im } \lambda = 0$. Точки стационарной фазы займут на ней симметричные положения: $\lambda = \pm \lambda_0$, где $\lambda_0 = \text{nc}(v_0, k') - \text{sc}(v_0, k') > 0$ (см. рис. 3). Отрезкам γ_2 и $\tilde{\gamma}_2$ фундаментального прямоугольника отвечают два разреза в плоскости параметра λ ,

Рис. 4. Контур Σ и области аналитичности функций $\mu^{(1)}(\lambda)$.

через берега которых осуществляется переход с одного листа римановой поверхности на другой. Второму листу в плоскости λ соответствуют области $D_{\pm}^{(2)}$ в фундаментальном прямоугольнике параметра u на рис. 1. Направления контуров γ_1 , γ_2 и $\tilde{\gamma}_2$ на рис. 3 согласованы с обходами соответствующих отрезков в фундаментальном прямоугольнике. Особым точкам $u = iK'$ и $u = -iK'$ линейной системы (2.3) соответствуют значения $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Поскольку мы пренебрегаем скачками аналитических функций $\mu_{\pm}^{(1)}(\lambda)$ на контурах γ_2 и $\tilde{\gamma}_2$, задача Римана с областями $D_{\pm}^{(1)}$ в плоскости параметра λ далее рассматривается независимо от задачи Римана на втором листе римановой поверхности. Дальнейшее преобразование состоит в замене задачи Римана с полуплоскостями $D_{\pm}^{(1)}$ в плоскости параметра λ и разделяющим их контуром вдоль вещественной оси эквивалентной задачей с новым контуром Σ , объединяющим линии наискорейшего спуска функций $e^{\pm C}$: $\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B$ (см. рис. 4). Остановимся на этом подробнее.

Вблизи стационарной точки B (точки $\lambda = \lambda_0$) в пределе (1.1) фазу $2C$ функции e^{2C} можно заменить первыми членами ее разложения в ряд Тейлора:

$$e^{2C} \approx e^{2C_0} e^{(it/2)\sigma_B(\lambda - \lambda_0)^2}, \quad (3.2)$$

где

$$C_0 = C(u)|_{u=iv_0}, \quad \sigma_B = -\sigma(v_0) \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^2 \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\sigma(v_0)}{\text{dn}^2(iv_0, k)\lambda_0^2} > 0.$$

Подобным образом вблизи второй стационарной точки A (точки $\lambda = -\lambda_0$) получим

$$e^{2C} \approx e^{2C_0^*} e^{-(it/2)\sigma_B(\lambda + \lambda_0)^2}. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.2), (3.3) – проявление общей закономерности: значения рассматриваемых далее функций вблизи стационарных точек A и B всегда связаны между собой.

В окрестности точки B для множителя e^{2C} (множителя e^{-2C}) линиями наискорейшего спуска будут Σ_B^2 и Σ_B^4 (соответственно Σ_B^1 и Σ_B^3); вблизи точки A – это

контуры Σ_A^1 и Σ_A^3 (соответственно Σ_A^2 и Σ_A^4), см. рис. 4. Четыре линии Σ_A и четыре линии Σ_B в точке пересечения ортогональны и образуют в плоскости параметра λ два “креста”, повернутых на угол $\pi/4$ относительно осей координат в плоскости λ .

Для дальнейших построений важно, что функция e^C (функция e^{-C}) является аналитической и ограниченной в областях $\Omega_1, \Omega_2, \omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_4$ (в областях $\Omega_3, \omega_1, \omega_4, \omega_5, \Omega_5, \Omega_6$ соответственно) (см. рис. 4).

Спектральную плотность $r(\lambda) \equiv r(iv(\lambda))$ можно аппроксимировать рациональными функциями спектрального параметра λ [18]. В пределе (1.1) только недиагональные элементы матрицы g в (3.1) содержат экспоненциально растущие или убывающие в плоскости параметра λ множители $e^{\pm 2C}$. Поэтому для введения новых матричных функций с “хорошими” свойствами аналитичности по λ достаточно представить функцию g как произведение подходящих верхне- и нижнетреугольных матриц [18]. В данной задаче решающую роль в требуемой факторизации играет предварительное калибровочное преобразование

$$\mu(\lambda) = \tilde{\mu}(\lambda)\Psi_0(\lambda)\delta^{\sigma_3}(\lambda)\Psi_0^{-1}(\lambda),$$

где $\delta(\lambda)$ – кусочно-аналитическая функция в плоскости параметра λ ,

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) &= \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \right)^{i\nu} e^{\chi(\lambda)}, \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \ln[1 + |r(\lambda_0)|^2] > 0, \quad \chi(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \ln \frac{1 + |r(\xi)|^2}{1 + |r(\lambda_0)|^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а $r(\lambda) \equiv r(iv(\lambda))$ – спектральная плотность, заданная на вещественной оси в плоскости параметра λ . Функция $\delta(\lambda)$ определена в плоскости λ с разрезом вдоль отрезка $[-\lambda_0, \lambda_0]$ (толстая линия на рис. 4). При вещественных λ предельные значения $\delta_{\pm}(\lambda) \equiv \delta(\lambda \pm i0)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \delta_+(\lambda) &= \delta_+(\lambda) & \text{при } |\lambda| > \lambda_0, \\ \frac{\delta_-(\lambda)}{\delta_+(\lambda)} &= 1 + |r(\lambda)|^2 & \text{при } |\lambda| < \lambda_0. \end{aligned}$$

Функции $\delta(\lambda)$ и $\chi(\lambda)$ обладают свойствами симметрии

$$\delta^*(-\lambda^*) = \delta(\lambda), \quad \chi^*(-\lambda^*) = \chi(\lambda).$$

Ограничения на спектральные плотности $r(\lambda)$ и $\bar{r}(\lambda)$ на вещественной оси следуют из вторых формул в (2.12) и (2.13):

$$\bar{r}(\lambda) = r^*(\lambda), \quad r^*(-\lambda) = r(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Первое из соотношений (2.13) далее не учитывается, так как оно дает связь функций $r(\lambda)$ на разных листах римановой поверхности. При локализованных начальных возмущениях спиральной структуры функция $r(\lambda)$ обращается в нуль в особых точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ системы (2.3) быстрее любой степени λ и λ^{-1} соответственно.

Обобщая построения работы [18], введем новую кусочно-аналитическую функцию $\mu^{(1)}(\lambda)$ на рассматриваемом листе римановой поверхности:

$$\mu^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} \tilde{\mu}\Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & r^*\delta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Omega_1 \cup \omega_3, \\ \tilde{\mu}\Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r\delta^2 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Omega_6 \cup \omega_4, \\ \tilde{\mu}\Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\delta^{-2}(1 + |r|^2)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Omega_3 \cup \omega_1, \\ \tilde{\mu}\Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & -r^*(1 + |r|^2)^{-1}\delta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Omega_4 \cup \omega_6, \\ \tilde{\mu} & \text{при } \lambda \in \Omega_2 \cup \omega_2 \cup \Omega_5 \cup \omega_5. \end{cases}$$

Она имеет скачки $v^{(1)}(\lambda)$ только на линиях $\Sigma_{A,B}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) контура Σ :

$$\mu_+^{(1)}(\lambda) = \mu_-^{(1)}(\lambda)v^{(1)}(\lambda), \quad (3.5)$$

где

$$v^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & r^*\delta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Sigma_B^{(2)} \cup \Sigma_A^{(3)}, \\ \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\delta^{-2} & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Sigma_B^{(1)} \cup \Sigma_A^{(4)}, \\ \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & r^*(1 + |r|^2)^{-1}\delta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Sigma_B^{(4)} \cup \Sigma_A^{(1)}, \\ \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta^{-2}r(1 + |r|^2)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1} & \text{при } \lambda \in \Sigma_B^{(3)} \cup \Sigma_A^{(2)}. \end{cases}$$

Направление обхода линий Σ указаны на рис. 4. Здесь и далее считаем, что сторона “+” линии в плоскости λ лежит слева от линии, а сторона “−” лежит справа от нее.

Условия для функции $\mu^{(1)}(\lambda)$

$$[\mu^{(1)}(-\lambda^*)]^* = \sigma_1 \mu^{(1)}(\lambda) \sigma_1, \quad \mu^{(1)}(\lambda) \rightarrow I \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

являются следствиями второй из формул (2.9) и условия нормировки (2.11).

Новая задача Римана (3.5), (3.6) примечательна тем, что на линиях контура Σ в пределе (1.1) матрицы сопряжения $v^{(1)}$ стремятся к единичной при удалении от центров крестов Σ_A и Σ_B . Не будет большой ошибкой, если на линиях Σ_A (линиях Σ_B) спектральную плотность $r(\lambda)$ заменить значением $r(-\lambda_0)$ (значением $r(\lambda_0)$) в центре креста. В итоге исходная проблема сведется к задаче с кусочно-постоянной спектральной плотностью. В работах [17], [18] для модели мКдФ переход от первоначальной спектральной плотности $r(\lambda)$ к кусочно-постоянной аппроксимации обоснован посредством тщательных оценок.

По той же причине на крестах Σ_A и Σ_B функцию $\Psi_0 \delta^{\sigma_3}$ можно заменить ее разложениями вблизи стационарных точек A ($\lambda = -\lambda_0$) и B ($\lambda = \lambda_0$) соответственно.

Тогда приближенное решение задачи Римана (3.5) на контуре Σ будет объединением решений $\mu^{(1,A)}$ и $\mu^{(1,B)}$ более простых задач Римана на лучах Σ_A и Σ_B , а именно $\mu^{(1)} = \mu^{(1,A)}$ на кресте Σ_A и $\mu^{(1)} = \mu^{(1,B)}$ на кресте Σ_B .

Для расчета функции $\mu^{(1,B)}$ введем локальный параметр λ_B такой, что

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\lambda_B}{\sqrt{t\sigma_B}},$$

и приближение (см. соотношения (2.4), (3.2), (3.4))

$$\Psi_0 \delta^{\sigma_3} \simeq \Psi_0^B \Delta^{\sigma_3}(\lambda_B),$$

$$\Delta(\lambda_B) = (\lambda_B)^{i\nu} e^{i\lambda_B^2/4}, \quad \Psi_0^B = M(u)|_{u=iv_0} e^{\sigma_3[C_0 + \chi(\lambda_0) - i\nu \ln(4\lambda_0^2 \sigma_B t)/2]}.$$

Функция $(\lambda_B)^{i\nu}$ аналитична в плоскости λ_B с разрезом вдоль луча $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$.

С учетом указанных упрощений, полагая $\nu^{(1,B)} = \mu^{(1,B)} \Psi_0^B$, приходим к проблеме построения аналитических функций $\nu^{(1,B)}(\lambda)$ с условиями сопряжения на лучах Σ_B

$$\nu_+^{(1,B)} = \nu_-^{(1,B)} v^B, \quad \lambda_B \in \Sigma_B, \quad (3.7)$$

и нормировкой $\nu^{(1,B)} \rightarrow \Psi_0^B$ при $\lambda_B \rightarrow \infty$. Матрица сопряжения v^B выражается через кусочно-постоянную матрицу v_0^B как $v^B = \Delta^{\sigma_3} v_0^B \Delta^{-\sigma_3}$, где

$$v_0^B = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_B & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \lambda_B \in \Sigma_B^{(1)}, \\ \begin{pmatrix} 1 & r_B^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \lambda_B \in \Sigma_B^{(2)}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_B[1 + |r_B|^2]^{-1} & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \lambda_B \in \Sigma_B^{(3)}, \\ \begin{pmatrix} 1 & r_B^*[1 + |r_B|^2]^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \lambda_B \in \Sigma_B^{(4)}; \end{cases}$$

здесь $r_B \equiv r(\lambda_0)$.

В окрестности стационарной точки A ($\lambda = -\lambda_0$) введем локальный параметр λ_A такой, что

$$\lambda = -\lambda_0 + \frac{\lambda_A}{\sqrt{t\sigma_B}}.$$

Упрощения задачи Римана на кресте Σ_A аналогичны выполненным для окрестности точки B . Нетрудно показать, что в выбранных параметризациях решение задачи Римана $\mu^{(1,A)}$ на кресте Σ_A выражается через $\mu^{(1,B)}$:

$$\mu^{(1,A)}(\lambda_A) = \sigma_1 [\mu^{(1,B)}(-\lambda_A^*)]^* \sigma_1, \quad v^A(\lambda_A) = \sigma_1 [v^B(-\lambda_A^*)]^* \sigma_1. \quad (3.8)$$

В конечном счете это следует из первого соотношения (3.6).

Таким образом, построение аналитической функции $\mu^{(1)}(\lambda)$ со скачками на контуре $\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B$ сведено к решению модельной задачи Римана (3.7) с контуром в виде лучей Σ_B .

Задачу Римана (3.7) на лучах Σ_B можно снова преобразовать к задаче Римана в плоскости параметра λ_B с контуром вдоль вещественной оси $\mathbb{R}$. Это достигается с помощью кусочно-аналитической функции φ^B [18],

$$\varphi^B(\lambda_B) = \begin{cases} (\lambda_B)^{-i\nu\sigma_3} & \text{при } \lambda_B \in \Omega_2 \cup \Omega_5, \\ e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r_B & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-\sigma_3} & \text{при } \lambda_B \in \Omega_6, \\ e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_B[1 + |r_B|^2]^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-\sigma_3} & \text{при } \lambda_B \in \Omega_3, \\ e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & -r_B^*[1 + |r_B|^2]^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-\sigma_3} & \text{при } \lambda_B \in \Omega_4, \\ e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & r_B^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-\sigma_3} & \text{при } \lambda_B \in \Omega_1, \end{cases}$$

которая устраняет скачки на линиях креста Σ_B :

$$\varphi_-^B v^B (\varphi_+^B)^{-1} = I, \quad \lambda_B \in \Sigma_B.$$

Калибровочное преобразование $\nu^{(1,B)} = H^B \varphi^B$ приводит задачу сопряжения (3.7) аналитических функций на лучах Σ_B к эквивалентной задаче на контуре $\mathbb{R}$:

$$H_+^B(\lambda_B) = H_-^B(\lambda_B) e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4} \begin{pmatrix} 1 & -r_B^* \\ r_B & 1 + |r_B|^2 \end{pmatrix} e^{-i\lambda_B^2\sigma_3/4}, \quad \lambda_B \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

$$H^B(\lambda_B) \rightarrow \Psi_0^B(\lambda_B)^{i\nu\sigma_3} \quad \text{при } \lambda_B \rightarrow \infty.$$

Преимущество формулировки (3.9) состоит в том, что она допускает явное решение. Для его построения заметим, что вследствие независимости спектральной плотности $r_B = r(\lambda_0)$ от параметра λ_B матричная функция $Y^B \equiv H^B e^{i\lambda_B^2\sigma_3/4}$ на вещественной оси удовлетворяет равенству

$$\partial_{\lambda_B} Y_+^B (Y_+^B)^{-1} = \partial_{\lambda_B} Y_-^B (Y_-^B)^{-1},$$

которое допускает аналитическое продолжение и определяет мероморфную функцию в комплексной плоскости λ_B . Эта функция совпадает с главной частью разложения величины $\partial_{\lambda_B} Y^B (Y^B)^{-1}$ вблизи существенно особой точки $\lambda_B = \infty$ [12].

В работе [10] приведены асимптотические формулы для решений Йоста $\Psi_{1,2}(u)$ вблизи особой точки $u = iK' (\lambda(iK') = \infty)$. С их помощью получаем разложение функции H^B при $|\lambda_B| \gg 1$:

$$H^B = \mu^{(1,B)} \Psi_0^B (\varphi^B)^{-1} = \left(1 + \frac{in^B}{\lambda_B} + O\left(\frac{1}{\lambda_B^2}\right) \right) \Psi_0^B(\lambda_B)^{i\nu\sigma_3}. \quad (3.10)$$

Хотя матрица n^B явно выражается через поля Φ и φ_0 , для дальнейшего анализа важна только ее алгебраическая структура:

$$n^B = n_1^B \sigma_1 + n_2^B \sigma_2. \quad (3.11)$$

Здесь $n_{1,2}^B$ – вещественные функции переменных z и t .

Используя разложение (3.10), находим

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda_B} Y^B (Y^B)^{-1} &= \Psi_0^B \left(\frac{i\lambda_B}{2} \sigma_3 + \beta \right) (\Psi_0^B)^{-1}, \\ \beta &= \frac{1}{2} [\sigma_3, N^B], \quad N^B = (\Psi_0^B)^{-1} n^B \Psi_0^B.\end{aligned}$$

Отсюда следует представление $Y^B = \Psi_0^B X$, где X – решение линейного дифференциального уравнения относительно λ_B

$$\left(\partial_{\lambda_B} - \frac{i\lambda_B}{2} \sigma_3 - \beta \right) X = 0 \quad (3.12)$$

с асимптотическим условием $X \rightarrow (\lambda_B)^{i\nu\sigma_3} e^{i\lambda_B^2 \sigma_3/4}$ при $\lambda_B \rightarrow \infty$.

Формула (3.11) и свойство симметрии функции Ψ_0^B

$$(\Psi_0^B)^* = -\sigma_2 \Psi_0^B \sigma_2 \quad (3.13)$$

конкретизируют структуру матриц N^B и β :

$$N^B = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{21}^* \\ N_{21} & -N_{11}^* \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & N_{21}^* \\ -N_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.12) совпадает с полученным в работе [18] при анализе волнового поля модели мКдФ. Его решения с требуемыми свойствами аналитичности выражаются через функции параболического цилиндра [24]. В области $\text{Im } \lambda_B > 0$ функция $X(\lambda_B)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} &= e^{-\pi\nu/4} \begin{pmatrix} D_{i\nu}(\xi) \\ \frac{i\nu}{\beta_{12}} e^{-\pi i/4} D_{i\nu-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \xi = \lambda_B e^{-\pi i/4}, \\ \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} &= e^{3\pi\nu/4} \begin{pmatrix} -\frac{i\nu}{\beta_{21}} e^{-3\pi i/4} D_{-i\nu-1}(\tilde{\xi}) \\ D_{-i\nu}(\tilde{\xi}) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \tilde{\xi} = \lambda_B e^{-3\pi i/4}.\end{aligned}$$

В нижней полуплоскости мы имеем

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} &= e^{3\pi\nu/4} \begin{pmatrix} D_{i\nu}(\eta) \\ \frac{i\nu}{\beta_{12}} e^{3\pi i/4} D_{i\nu-1}(\eta) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \eta = \lambda_B e^{3\pi i/4}, \\ \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix} &= e^{-\pi\nu/4} \begin{pmatrix} -\frac{i\nu}{\beta_{21}} e^{\pi i/4} D_{-i\nu-1}(\tilde{\eta}) \\ D_{-i\nu}(\tilde{\eta}) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \tilde{\eta} = \lambda_B e^{\pi i/4}.\end{aligned}$$

Как и в работе [18], параметр ν и элементы матрицы β выражаются через данные рассеяния:

$$\begin{aligned}\beta_{21} = -\beta_{12}^* = -N_{21} &= \frac{\Gamma(1-i\nu)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\pi i}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right) r(\lambda_0), \\ \nu = -\beta_{12}\beta_{21} = |N_{21}|^2 &= \frac{1}{2\pi} \ln[1 + |r(\lambda_0)|^2] > 0.\end{aligned} \quad (3.14)$$

Объединяя результаты, получаем соотношение

$$\mu^{(1,B)}(\lambda_B)\Psi_0^B = \Psi_0^B X(\lambda_B)e^{-i\lambda_B^2\sigma_3/4}\varphi^B(\lambda_B), \quad (3.15)$$

которое позволяет перенести множитель Ψ_0^B справа налево в произведении некоммутирующих матриц.

Напомним, что точкам A и B плоскости параметра λ соответствуют значения $u = iv_0$ и $u = 2iK' - iv_0$ в фундаментальном прямоугольнике плоскости параметра u . Множитель Ψ_0^A , возникающий при упрощении задачи Римана в окрестности точки A , связан с множителем Ψ_0^B второй из редукций (2.5):

$$\Psi_0^A = \sigma_1[\Psi_0^B \gamma]^*, \quad \gamma \equiv k \operatorname{sn}(iv_0, k)[1 + \operatorname{dn}(iv_0, k)]^{-1}. \quad (3.16)$$

Комбинируя формулы (3.8), (3.15), (3.16), получаем

$$\mu^{(1,A)}(\lambda_A)\Psi_0^A = \sigma_1[\Psi_0^B X(-\lambda_A^*)e^{-i(\lambda_B^2)^*\sigma_3/4}\varphi^B(-\lambda_A^*)\gamma]^*. \quad (3.17)$$

Соотношение (3.17) позволяет не только перенести множитель Ψ_0^A справа налево в произведении некоммутирующих матриц, но и использовать при расчетах на кресте Σ_A функции, уже найденные для окрестности точки B .

В выбранной параметризации асимптотика волнового поля $\Phi(z, t)$ в пределе (1.1) определяется вкладом $\mu^{(1)}(0)$ от кусочно-аналитической функции $\mu^{(1)}(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$. Это следует из соотношения (2.14) и связи точки $\lambda = 0$ со значением $u = -iK'$ исходного спектрального параметра.

Используя теорему Коши, восстановим значение функции $\mu^{(1)}(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ по ее скачкам на контуре $\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B$:

$$\mu^{(1)}(\lambda)|_{\lambda=0} = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} \mu_-^{(1)}(\tilde{\lambda})[v^{(1)}(\tilde{\lambda}) - I]. \quad (3.18)$$

В пределе (1.1) на лучах Σ_A и Σ_B матрица $(v^{(1)}(\tilde{\lambda}) - I)$ экспоненциально стремится к нулю при удалении от стационарных точек. Поэтому в равенстве (3.18) оправдан переход от интегрирования по переменной $\tilde{\lambda}$ к интегрированию по локальным параметрам λ_B и λ_A : $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_B/\sqrt{t\sigma_B}$ на линиях Σ_B и $\tilde{\lambda} = -\lambda_0 + \lambda_A/\sqrt{t\sigma_A}$ на линиях Σ_A . В пределе $t \rightarrow +\infty$ в знаменателях подынтегральных выражений можно пренебречь зависимостью от λ_B и λ_A . Матрицу сопряжения $v^{(1)}$ на линиях Σ_B и Σ_A заменяем выражениями $\Psi_0^B v^B (\Psi_0^B)^{-1}$ и $\Psi_0^A v^A (\Psi_0^A)^{-1}$, а функции $\mu_-^{(1)}(\lambda_A)$ и $\mu_-^{(1)}(\lambda_B)$ – приближениями $\mu_-^{(1,A)}$ и $\mu_-^{(1,B)}$ (см. формулы (3.15), (3.17)). В результате перечисленных упрощений контурные интегралы в (3.18) сводятся к табличному [24]

$$\int_0^\infty dt e^{-t^2/4} t^{\mu-1} D_{-\nu}(t) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-(\mu+\nu)/2} \Gamma(\mu)}{\Gamma[(\nu + \mu + 1)/2]}.$$

При алгебраических преобразованиях мы учитываем свойство симметрии функции Ψ_0^B (3.13), редукции (3.8), (3.17) и связь (3.14) множителей β_{12} и β_{21} . Расчет приводит к сокращению лишних слагаемых и нетривиальному объединению оставшихся членов.

В конечном счете из соотношений (2.14), (3.18) находим асимптотику при $t \rightarrow +\infty$ решения задачи Коши для волнового поля Φ на фоне спиральной структуры:

$$\Phi(\chi, t) - \varphi_0(\chi) = 8\sqrt{\frac{\nu}{t\sigma(v_0)}} \operatorname{Re}[U(iv_0, \chi) e^{i\Theta}] + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.19)$$

Здесь функции $U(u, \chi)$ и $\sigma(v_0)$ определяются формулами (2.16), (2.21) и параметр Θ имеет вид

$$\Theta = \frac{2}{i} C_0 + \frac{\pi}{4} + \arg \Gamma(1 + i\nu) - \arg r(\lambda_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{\xi - \lambda_0} \ln \frac{1 + |r(\xi)|^2}{1 + |r(\lambda_0)|^2} - \nu \ln(4\lambda_0^2 \sigma_B t),$$

а значения C_0 и σ_B такие же, как в (3.2).

Полученный результат (3.19) отличается от результата для линеаризованной задачи (2.20) перенормировкой амплитуды и фазы колебаний поля $\Phi - \varphi_0$, связанной со взаимодействием волн. В линейном по $|r(\lambda_0)|$ приближении функции (2.20) и (3.19) совпадают, поскольку $\sqrt{\nu} \simeq |r(\lambda_0)|/\sqrt{2\pi}$.

В отсутствие спиральной структуры предложенный вариант расчета волнового поля для модели sine-Гордон в пределе $t \rightarrow +\infty$, $z/t = O(1)$ без привлечения априорных гипотез о форме решения воспроизводит результат работ [15], [16], что говорит о его общности и эффективности.

Как и в случае однородного основного состояния среды [25], метод наискорейшего нелинейного спуска позволяет получить асимптотики волнового поля в спиральной структуре во всех порядках при $t \rightarrow +\infty$.

Выражение (3.19) для поля Φ в бессолитонном секторе можно использовать для построения методом одевания [10], [20] более общих решений модели sine-Гордон, которые описывают взаимодействие солитонов и диспергирующих волн в спиральной структуре. В случае однородного основного состояния среды подобная задача решена в работе [26]. Наличие у солитонов медленно убывающих “хвостов” и/или “предвестников” в виде излучения должно проявиться как особенности взаимодействия солитонов друг с другом и с фоновой структурой.

Благодарности. Автор признателен А. А. Расковалову и Д. В. Долгих за обсуждение результатов работы и техническую помощь.

Список литературы

- [1] P. Bak, *Rep. Progr. Phys.*, **45**:6 (1982), 587–629.
- [2] V. L. Pokrovsky, A. L. Talapov, *Theory of Incommensurate Crystals*, Harwood Acad. Publ., New York, 1984.
- [3] И. Ф. Люксютов, А. Г. Наумовец, В. А. Покровский, *Двумерные кристаллы*, Наукова думка, Киев, 1988.
- [4] И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ*, **47**:3(9) (1964), 992–1002.
- [5] Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, Энергоатомиздат, М., 1987.
- [6] I. Dzyaloshinskii, *Europhys. Lett.*, **83**:6 (2008), 67001, 2 pp.
- [7] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 2: *Топологические солитоны, двумерные и трехмерные узоры*, УрО РАН, Екатеринбург, 2011.

- [8] А. С. Ковалев, И. В. Герасимчук, *ЖЭТФ*, **122**:5 (2002), 1116–1124.
- [9] A. B. Borisov, J. Kishine, Y. G. Bostrem, A. S. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B.*, **79**:13 (2009), 134436–134446, arXiv: 0901.1423.
- [10] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 268–292.
- [11] А. Р. Итс, *Докл. АН СССР*, **261**:1 (1981), 14–18.
- [12] А. Р. Итс, *Изв. АН СССР*, **49**:3 (1985), 530–565.
- [13] A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *The Isomonodromy Deformation Method in Theory of Painleve Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1191**, Springer, Berlin, 1986.
- [14] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, ИКИ, М.; РХД, Ижевск, 2005.
- [15] H. Segur, M. J. Ablowitz, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 165–184.
- [16] А. Р. Итс, В. Е. Петров, *Докл. АН СССР*, **265**:6 (1982), 1302–1304.
- [17] P. Deift, X. Zhou, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **26**:1 (1992), 119–123.
- [18] P. Deift, X. Zhou, *Ann. Math.*, **137**:2 (1993), 295–368.
- [19] P. Deift, A. Its, X. Zhou, “Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations”, *Important Developments in Soliton Theory*, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 181–204.
- [20] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, М., 2014.
- [21] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3: *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Маттье*, Наука, М., 1967.
- [22] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **67**, Springer, New York, 1971.
- [23] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [24] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [25] P. Deift, X. Zhou, *Commun. Math. Phys.*, **165** (1994), 175–191.
- [26] E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, I. A. Shimokhin, *Physica D*, **87**:1–4 (1995), 201–215.

Поступила в редакцию 5.06.2015