Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Губайдуллин, Соизмеримости и гипотеза Молчанова, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 139–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:52:07

© 2016 г.

М. Б. Губайдуллин*

СОИЗМЕРИМОСТИ И ГИПОТЕЗА МОЛЧАНОВА

Примерно полвека назад А. М. Молчанов выдвинул гипотезу о существовании резонансной структуры Солнечной системы, согласно которой с течением времени ее развития планеты неизбежно выходят на такие орбиты, при которых отношение периодов их обращения вокруг Солнца становится близким к отношению небольших натуральных чисел. По мнению Молчанова, резонансность обеспечивается малыми диссипативными силами. Предлагается другое возможное объяснение этого явления, при этом диссипация не учитывается.

Ключевые слова: резонанс, соизмеримость.

DOI: 10.4213/tmf8986

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка устойчивости Солнечной системы – одна из старейших качественных задач небесной механики. Основную трудность при этом представляют так называемые малые знаменатели: целочисленные комбинации частот невозмущенного движения, на которые приходится делить при построении рядов теории возмущений. В свою очередь, в задачах “планетного” типа малые знаменатели взаимосвязаны с соизмеримостями, т. е. с теми случаями, когда отношение частот близко к отношению целых чисел. На самом деле проблема малых знаменателей выходит за рамки астрономии. Малые знаменатели возникают всякий раз при изучении задач, близких к интегрируемым, поэтому неудивительно, что имеется большое количество работ чисто математического характера, но которые при этом имеют самое непосредственное отношение к небесной механике.

Впервые малые знаменатели были обнаружены Лапласом. Ему же принадлежит теорема примерно такого содержания: в первом приближении планетная система устойчива, иными словами, большие полуоси кеплеровых эллипсов планет не имеют вековых возмущений (см., например, книгу [1], § 12). Следующее существенное продвижение было сделано в 1954 г. в работе [2]. Позднее была развита теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ), из которой вытекает, что если массы планет, эксцентриситеты и наклонения их орбит малы, то для большинства начальных

*Факультет математики и информационных технологий, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Башкирский государственный университет, Уфа, Россия. E-mail: gubm@rambler.ru

условий (исключая резонансные и близкие к ним) движение будет условно периодическим, эксцентриситеты и наклоны будут оставаться малыми, а большие полуоси будут вечно колебаться вблизи своих первоначальных значений (см., например, добавление 8 в монографии [3]). В работах [4] и [5] изучаются решения соответствующие “плохим” (резонансным) начальным условиям. Из более современных работ в этом направлении выделим, например, статью [6].

Однако наблюдения фиксируют множество именно “острых” соизмеримостей в Солнечной системе, поэтому позитивная теорема теории КАМ вряд ли применима. Многие исследователи сходятся во мнении, что соизмеримостей слишком много, чтобы объяснять их случайностями. В частности, в работе [7] современное состояние Солнечной системы трактуется как результат длительной эволюции под действием диссипации. В пользу данной точки зрения в целом свидетельствуют результаты численных экспериментов (их обсуждение и дальнейшие ссылки см. в книге [1], § 12), однако, поскольку диссипация в этих экспериментах не учитывалась, можно пытаться искать объяснение данного феномена и без учета диссипации. В предлагаемой работе предпринимается попытка дать такое объяснение.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 формулируется и рассматривается модельная задача. В разделе 3 результаты раздела 2 применяются для объяснения особенностей орбит планет Солнечной системы и приводится рисунок, позволяющий наглядно воспринять основное содержание работы. В разделе 4 решается вспомогательная теоретико-числовая задача. Раздел 5 носит заключительный характер.

2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим три тела с массами 1, m , M . Будем их далее называть астероид, планета и звезда соответственно и будем считать, что $1 \ll m \ll M$, т. е. астероид никак не влияет на движение планеты и звезды, а планета – на движение звезды. Известно, что динамика астероида в полярной системе координат, связанной со звездой (движение планеты пока не учитывается), удовлетворяет системе уравнений

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0; \quad (1)$$

здесь G – гравитационная постоянная. Напомним, как решается данная система, а также сопутствующую терминологию.

Из второго уравнения системы вытекает, что сохраняется кинетический момент:

$$r^2(t)\dot{\varphi}(t) = r^2(0)\dot{\varphi}(0) = C.$$

Это позволяет исключить φ из первого уравнения системы и, сведя ее к одному уравнению относительно r ,

$$\ddot{r} = \frac{C^2 - GMr}{r^3}, \quad (2)$$

полностью решить систему (1). В уравнении (2) выражение в правой части называется силой, а интеграл от нее, взятый с обратным знаком,

$$U(r) = \frac{C^2 - 2GMr}{2r^2},$$

называют потенциальной энергией. Из уравнения (2) видно, что, в частности, существует решение, при котором r не зависит от времени, $r(t) \equiv r(0) = r_a$. Угол при этом изменяется как линейная функция времени: $\varphi(t) = \omega_a t$, где ω_a – частота. Соответствующая орбита астероида есть окружность. Будем считать, что невозмущенное движение астероида именно круговое.

Попробуем теперь учесть влияние планеты. Дополнительно к уже сказанному будем считать, что движение планеты и астероида происходит в одной плоскости, причем орбита планеты также представляет собой окружность соответствующего радиуса. Иными словами, движение планеты описывается в ранее введенной полярной системе координат функциями $r_m(t) = r_m(0) = r_m$ и $\varphi_m(t) = \omega_m t$. В этом случае на астероид со стороны планеты будет действовать дополнительная сила $\vec{F}$, направленная на планету, которая имеет вид

$$F(t) = \frac{Gm}{r^2(t) + r_m^2 - 2r(t)r_m \cos(\omega_m t - \varphi(t))}.$$

Разложим данную силу на две ортогональные компоненты. Компонента, направленная по радиус-вектору астероида, записывается как

$$F_r = \frac{Gm(r_m \cos(\omega_m t - \varphi) - r)}{(r^2 + r_m^2 - 2rr_m \cos(\omega_m t - \varphi))^{3/2}}, \quad (3)$$

а перпендикулярная к ней – как

$$F_\varphi = \frac{Gmr_m \sin(\omega_m t - \varphi)}{(r^2 + r_m^2 - 2rr_m \cos(\omega_m t - \varphi))^{3/2}}. \quad (4)$$

При исследовании возмущенного движения астероида данные компоненты следует учитывать, добавляя их в правые части системы (1):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} + F_r, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = F_\varphi. \quad (5)$$

Примем еще одно допущение. Будем считать, что невозмущенное движение астероида дает хорошее приближение для возмущенного движения на каком-то достаточно большом промежутке времени. Это равносильно тому, что r_a и r_m не очень близки, а отношение m/M достаточно мало. Например, данные математически распылчатые условия можно считать практически выполненными, если взять в качестве звезды, планеты и астероида Солнце, Юпитер и какой-нибудь подходящий астероид из пояса астероидов.

Далее, используя последнее допущение, заменим систему (5) на систему, в которой во втором уравнении правая часть заменена ее значением, средним в следующем смысле: вычисляем интеграл по времени от 0 до T от F_φ (см. выражение (4)), в которую подставлено невозмущенное решение $r = r_a$ и $\varphi = \omega_a t$, полученное значение делим на T и затем устремляем к бесконечности. В данном случае это среднее равно нулю, поскольку

$$F_\varphi|_{r=r_a, \varphi=\omega_a t} = \pm \frac{Gmr_m \sin(\omega t)}{(r_a^2 + r_m^2 - 2r_a r_m \cos(\omega t))^{3/2}}$$

есть периодическая функция, среднее которой по ее периоду $2\pi/\omega$ равно нулю; здесь $\omega = |\omega_m - \omega_a|$. Сам этот прием называется усреднением, и впервые (в несколько ином виде) он был использован как раз при решении задач небесной механики.

Система, которая получается в результате, имеет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} + F_r, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (6)$$

С физической точки зрения переход от (5) к системе (6) имеет следующий смысл. Мы отвлекаемся от малых знакопеременных тангенциальных (т.е. действующих вдоль траектории) ускорений астероида и сосредотачиваемся на нормальных (действующих поперек траектории) возмущениях. Отметим также, что подобным образом можно было бы преобразовать и первое уравнение системы (5), но это не привело бы ни к каким интересным выводам. Среднее от функции F_r (см. выражение (3)), в которую подставлены $r = r_a$ и $\varphi = \omega_a t$, вообще говоря, не равно нулю. Оно может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, как соотносятся r_a и r_m , или, грубо говоря, от того, лежит ли невозмущенная орбита астероида внутри или снаружи орбиты планеты. Усреднив правую часть первого уравнения системы (5), мы просто получили бы уравнение вида (2) со слегка изменившейся правой частью.

Система (6), как и изначальная система (1), имеет первый интеграл. Это кинетический момент

$$r^2(t)\dot{\varphi}(t) = r^2(0)\dot{\varphi}(0) = r_a^2\omega_a = C.$$

Для r получается уравнение

$$\ddot{r} = \frac{C^2 - GMr}{r^3} + F_r \Big|_{\varphi=C \int_0^t r^{-2}(\nu) d\nu}. \quad (7)$$

В дальнейшем запись $F_r(r_a, t)$ будет означать, что в (3) вместо r подставлено r_a , а вместо φ подставлено $\omega_a t$. Упростим полученное уравнение (7), заменив правую его часть отрезком ряда Тейлора по переменной r при $r = r_a = C^2/GM$. Имеем

$$\ddot{r} = -\omega_a^2(r - r_a) + F_r(r_a, t) + \frac{\partial F_r(r_a, t)}{\partial r}(r - r_a). \quad (8)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $U''(r_a) = \omega_a^2$, т.е. вторая производная от потенциальной энергии, взятая в устойчивом положении равновесия, равна квадрату частоты малых колебаний (см. например, книгу [3], гл. III, § 22). При этом первая производная силы (в невозмущенной задаче) отличается от $U''(r)$ лишь знаком.

Введем обозначения $\tau(t) = r(t) - r_a$ для отклонения от положения равновесия невозмущенной задачи и

$$f_0(t) = F_r(r_a, t), \quad f_1(t) = \frac{1}{\varepsilon\omega_a^2} \frac{\partial F_r(r_a, t)}{\partial r}.$$

Функции $f_0(t)$ и $f_1(t)$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$. Тогда из (8) формально следует уравнение

$$\ddot{\tau} = -\omega_a^2(1 + \varepsilon f_1(t))\tau + f_0(t), \quad (9)$$

причем считается, что значение $f_1(t)$ порядка единицы, а ε – малый параметр (меньше единицы), который называется глубиной модуляции. Уравнения вида (9) возникают при описании колебательных систем, на которые действует периодическая сила, а их параметры периодически меняются во времени. Существует обширная литература, посвященная изучению уравнений вида (9) и его частных случаев: при отсутствии $f_0(t)$ оно называется уравнением Хилла, а в еще более частном случае, когда $f_1(t) = \cos t$, – уравнением Матье.

Известны условия, при которых в уравнении (9) возникает параметрический резонанс: отношение удвоенной собственной частоты колебательной системы к частоте изменения параметра должно быть близко к целому числу (см., например, монографию [3], гл. III, § 25). В нашем случае собственная частота равна ω_a , а частота изменения параметра есть $\omega = |\omega_m - \omega_a|$. Специфика здесь состоит в том, что частота ω_a входит также в частоту изменения параметра. Выписывая условия параметрического резонанса и разрешая их относительно ω_a , приходим к соотношениям

$$\omega_a \approx \frac{l}{l-2} \omega_m, \quad l = 3, 4, \dots, \quad \omega_a \approx \frac{k}{k+2} \omega_m, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

при выполнении которых в (9) имеет место параметрический резонанс: решение τ уравнения (9) с близкими к нулю начальными условиями неограниченно растет. В рамках нашей модели это соответствует неустойчивым или, говоря другими словами, запрещенным орбитам астероида. Запрещенность здесь понимается не в буквальном смысле, а в смысле сравнительной кратковременности пребывания астероида на такой орбите.

Соотношения (10) можно интерпретировать следующим образом: планета в результате своего движения по орбите генерирует запрещенные зоны (в смысле времен обращения), которые сгущаются при приближении к ее орбите и простираются от орбит со временем обращения $T_m/3$ до орбит со временем обращения $3T_m$, где $T_m = 2\pi/\omega_m$ – период обращения планеты по ее орбите. В последующем мы не будем каждый раз особо оговаривать нематериальный характер этих зон и ради краткости речи будем говорить про них так, как если бы они действительно локализовались в пространстве.

Заметим также, что при записи соотношений (10) не случайно использованы два индекса, хотя можно было бы обойтись и одним. Дело в том, что индексы l и k нумеруют зоны параметрического резонанса для уравнения (9). Особенностью параметрического резонанса является то, что он проявляется тем сильнее и легче, чем меньше номер зоны. С этой точки зрения астероид на орбите со временем обращения $T_m/3$ ($l = 3$) находится в других условиях, нежели астероид, у которого время обращения равно $3T_m$ ($k = 1$).

Всё сказанное по поводу решений уравнения (9) и их физической интерпретации относится к случаю, когда мы не принимали во внимание функцию $f_0(t)$ из правой части уравнения (9). Ее учет не отменяет уже сказанного. Функция $f_0(t)$ ответственна за обычный резонанс (резонанс, вызванный внешней периодической силой), который возникает при выполнении следующих условий:

$$\omega_a = \frac{n}{n-1} \omega_m, \quad \omega_a = \frac{n-1}{n} \omega_m, \quad n = 2, 3, \dots$$

Здесь, в отличие от параметрического резонанса, важно учитывать высшие гармоники функции $f_0(t)$. При сопоставлении условий возникновения резонанса силы с условиями параметрического резонанса (10) видно, что все они одновременно являются условиями параметрического резонанса. Заметим, что при выполнении соотношений (10) условия резонанса силы могут выполняться, а могут и не выполняться. Это связано с тем обстоятельством, что параметрический резонанс происходит в некотором диапазоне частот (хотя бы и узком), что отражено в записи соотношений (10) с помощью знака приближенного равенства. В отличие от этого случая, при резонансе силы требуется точное совпадение частот. Кроме того, при резонансе силы амплитуда нарастает по линейному закону, тогда как при параметрическом – по экспоненциальному, таким образом, эти резонансы различны по своему воздействию и не могут взаимно компенсироваться, когда действуют оба.

В пределах Солнечной системы можно наблюдать примеры, подтверждающие справедливость приведенных выше рассуждений по поводу условий (10). Так, например, в поясе астероидов между орбитами Марса и Юпитера давно известны так называемые щели (или люки) Кирквуда: пробелы в распределении числа астероидов (см., например, монографию [8], гл. 8, § 4). Наиболее легко наблюдаемыми и очевидными щелями являются те, которые соответствуют соизмеримостям 1:3, 1:2, 3:7, 1:4, 2:5 относительно Юпитера. Наличие двух первых щелей из перечисленного списка можно объяснить, применяя условия (10) к случаю, когда планетой, возмущающей движение астероидов, является Юпитер. Сходный пример представляет система Сатурна с многочисленными щелями в его кольцах. Например, щель Кассини соответствует соизмеримости 1:2 относительно движения Мимаса – одного из спутников Сатурна.

Все наши предварительные выводы базируются на анализе уравнения (9), в котором глубина модуляции ε считалась малой. Покажем, что это действительно так. Для этого достаточно оценить сверху модуль функции f_1 . Заметим, что, строго говоря, следовало бы оценивать не саму функцию, а ее колебательную компоненту, которая и ответственна за резонанс. Как уже было сказано, мы будем действовать более грубо, неявно оценивая колебательную компоненту функции через оценку самой функции. То есть, если выделить в f_1 постоянную α и колебательную $\tilde{f}_1$ компоненты, то можно будет сделать следующие переобозначения:

$$\begin{aligned}\omega_a^2(1 + \varepsilon f_1(t)) &= \omega_a^2(1 + \varepsilon\alpha + \varepsilon\tilde{f}_1(t)) = \tilde{\omega}_a^2(1 + \tilde{\varepsilon}\tilde{f}_1(t)), \\ \tilde{\omega}_a &= \omega_a\sqrt{1 + \varepsilon\alpha}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\alpha}.\end{aligned}$$

При построении более точной теории следует учитывать данный эффект сдвига частоты, который мал, когда мало $\varepsilon\alpha$, для чего в свою очередь достаточно малости εf_1 . Этот эффект не отменяет ранее сделанные качественные интерпретации соотношений (9) и (10), но он, разумеется, вносит определенные количественные поправки. В настоящей работе мы получим лишь оценку сверху

$$|\varepsilon| = \max \left| \frac{(F_r)'_r}{\omega_a^2} \right| < \beta,$$

которая позволит получить обе оценки $|\varepsilon\alpha| < \beta$ и $|\tilde{\varepsilon}\tilde{f}_1(t)| < \beta/(1 - \beta)$. Отсюда следует, что оценки $|\varepsilon| < \beta < 1/2$ будет достаточно, чтобы гарантировать нужное

нам поведение глубины модуляции $\tilde{\varepsilon}$ в преобразованном уравнении (9), в котором компоненты были бы разделены, и которое фактически выписано не будет.

Дифференцируя равенство (3), получим

$$\frac{\partial F_r(r_a, t)}{\partial r} = Gm \frac{2r_a^2 - r_m^2 - 4r_a r_m \cos \omega t + 3r_m^2 \cos^2 \omega t}{(r_a^2 + r_m^2 - 2r_a r_m \cos \omega t)^{5/2}}.$$

Отсюда следует оценка

$$\left| \frac{\partial F_r(r_a, t)}{\partial r} \right| \leq \frac{2Gm}{|r_a - r_m|^3} = \frac{2Gm}{r_a^3} \frac{\gamma^3}{|1 - \gamma|^3},$$

где $\gamma = r_a/r_m$ – безразмерная величина. Формально $\gamma \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, но, поскольку наша модель основана на допущении, что невозмущенное движение астероида дает хорошее приближение для возмущенного движения, исключать из области допустимых значений γ следует некоторую окрестность единицы, а не только ее саму. В свою очередь, из последней оценки вытекает, что глубина модуляции ε из (9) оценивается сверху:

$$|\varepsilon| = \max_t \left| \frac{(F_r)'_r(r_a)}{\omega_a^2} \right| \leq 2 \frac{m}{M} \frac{\gamma^3}{|1 - \gamma|^3}.$$

Здесь было использовано соотношение $\omega_a^2 = GM/r_a^3$. Функция от γ в правой части неравенства терпит бесконечный разрыв при $\gamma = 1$, а при подходе аргумента к единице с той и другой стороны гладко и монотонно стремится к $+\infty$.

Например, рассчитаем оценки для величины модуляции при $l = 3, 4, 5$ и при $k = 1, 2, 3$ (см. соотношения (10)). Это соответствует трем первым внутренним (орбита астероида внутри орбиты планеты) и трем внешним резонансным зонам, создаваемым планетой. Также требуется задать отношение m/M . Например, для Солнца и Юпитера это отношение $m/M \approx 0.001$. Подсчет приводит к следующим числам: 0.002, 0.010, 0.030 для внутренних зон и 0.014, 0.039, 0.083 для внешних. Имея в виду последующее применение подобных соображений к другим планетам Солнечной системы, отметим, что для них эти оценки еще меньше, поскольку меньше отношение m/M (в большинстве случаев весьма существенно, см. табл. 1 далее).

Таким образом, согласно только что проведенным оценкам в окрестностях первых резонансных зон планеты, динамика астероидов действительно может быть описана уравнением (9) в предположении, что отношение m/M достаточно мало. Полученный вывод будет справедлив (при дополнительном условии) и в случае более реалистичной исходной ситуации: планета движется по эллиптической орбите, и невозмущенное движение астероида также представляет собой эллипс. В этом случае у компонент силы F_r и F_φ (см. выражения (3) и (4)) появляются добавки, малые, когда малы эксцентриситеты, и вместе с ними стремящиеся к нулю. Таким образом, дополнительное условие – это малость эксцентриситетов.

В еще более приближенной к реальности модели можно допустить также наклонение, т. е. несовпадение плоскостей орбит планеты и астероида. В этом случае можно ввести цилиндрические координаты r, φ, z таким образом, что в плоскости $z = 0$ располагается невозмущенная орбита астероида. Далее надо выписать силу, действующую со стороны планеты на астероид, и разложить ее на три компоненты.

Третья компонента F_z будет знакопеременна, мала вместе с наклоном и вместе с ним будет стремиться к нулю. Это позволит вновь всё свести к плоскому случаю, если наклонение мало.

3. СОЛНЕЧНАЯ СИСТЕМА

Попробуем теперь применить полученные результаты к случаю, когда вокруг центрального тела с массой M движутся два тела с малыми по сравнению с M массами, но при этом сопоставимые в каком-то смысле по массе друг с другом. Если угодно, то к такой ситуации можно подойти, постепенно увеличивая массу астероида из модельной задачи предыдущего раздела.

Итак, рассмотрим планетную систему, состоящую из звезды и всего двух планет. В этом случае вместо идеализированного одностороннего влияния планеты на астероид возникает взаимовлияние, и при выполнении условий (10) (можно считать, что ω_a – частота обращения менее массивной планеты) планеты обмениваются энергией и (или) кинетическим моментом более интенсивно по сравнению со случаем, когда условие (10) не выполняется. Такие интенсивные обмены будут продолжаться до тех пор, пока планеты не изменят параметры своих орбит так, чтобы перестали выполняться условия резонанса. Понятно, что при этом параметры орбиты более массивной планеты претерпят меньшие изменения. Примечательно, что ничего не изменится в приведенных выше рассуждениях, если формально считать астероидом более массивную планету.

Хороший приближенный пример двухпланетной системы предоставляет Солнечная система, если в качестве планет рассмотреть Юпитер и Сатурн. Сатурн менее массивен, чем Юпитер, примерно в три раза, но при этом превосходит по массе все остальные планеты, вместе взятые, также примерно в три раза. В табл. 1, взятой нами из монографии [8] (см. приложение III), приведены основные данные планет Солнечной системы, а также Цереры (как самого массивного представителя пояса астероидов) и Плутона, хотя их и не относят к полноценным планетам и называют карликовыми планетами.

Итак, если обратиться к примеру Юпитера и Сатурна, то можно заметить, что они находятся примерно в серединах промежутков резонансных зон друг друга (вопрос ширины зон пока не поднимается). А именно, Сатурн находится между первой и второй внешними резонансными зонами Юпитера ($k = 1, 2$) или, что равносильно, Юпитер находится между первой и второй внутренними резонансными зонами Сатурна ($l = 3, 4$, см. соотношения (10)). Более точно,

$$\frac{T_C}{3} = 9.82 < T_{Ю} = 11.86 < 14.73 = \frac{T_C}{2},$$

$$2T_{Ю} = 23.72 < T_C = 29.46 < 35.58 = 3T_{Ю}.$$

Это наглядно можно увидеть, если на числовой оси времени отметить точками периоды обращения соответствующих планет, а отрезками, перпендикулярными оси, – резонансные зоны, созданные планетами. Если формально сделать это не только для Юпитера и Сатурна, а для всех планет из табл. 1, то обнаружится очень примечательная, явно не случайная картина.

В попытке объяснить, почему Юпитер и Сатурн расположены именно примерно посередине соответствующих резонансных зон (что равносильно вопросу, почему

ТАБЛИЦА 1. Характеристики планет Солнечной системы.

Планета	Масса	Большая полуось	Период	Эксцентриситет	Наклонение
Меркурий	0.06	0.39	0.241	0.206	7°
Венера	0.82	0.72	0.615	0.007	3.39°
Земля	1	1	1	0.017	—
Марс	0.11	1.52	1.88	0.093	1.85°
Церера	0.00013	2.76	4.6	0.08	10.59°
Юпитер	318	5.2	11.86	0.049	1.03°
Сатурн	95	9.58	29.46	0.056	2.49°
Уран	14.6	19.23	84.01	0.044	0.77°
Нептун	17.2	30.10	164.79	0.011	1.77°
Плутон	0.0017	39.48	248.09	0.249	17.14°

они тяготеют к соизмеримости 2:5), приходим к закономерному вопросу: насколько широки резонансные зоны? Проведем (весьма приблизительную) оценку сверху ширины первой внешней резонансной зоны ($k = 1$). В книге [9] показано, что для уравнения Матье $\ddot{r} = -\omega_a^2(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$ (для удобства обозначения переменных и параметров здесь согласованы с нашими) в случае первой резонансной зоны, т. е. при $\omega \approx 2\omega_a$, параметрический резонанс возникает, если

$$2\omega_a\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) < \omega < 2\omega_a\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Применим это неравенство в нашем уравнении (9), считая функцию f_1 чисто колебательной и приближая ее первой гармоникой, а функцию f_0 отбросим. Используем равенство $\omega = \omega_m - \omega_a$ и решим уравнение (9) относительно ω_a . Получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{18 + 3\varepsilon}\right)\omega_m < \omega_a < \left(\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{18 + 3\varepsilon}\right)\omega_m.$$

В частности, применим полученную формулу к первой внешней резонансной зоне Юпитера, взяв $\varepsilon = 0.014$ (это значение выступало в качестве оценки сверху для ε в случае первой внешней резонансной зоны Юпитера). Подсчет приводит к следующим результатам: резонансная зона заключена в промежутке от 35.49 до 35.66 земных лет. У последующих резонансных зон уравнения Матье ширина убывает пропорционально ε^n , где n – номер резонансной зоны (см. книгу [9], гл. III, § 29). При этом в нашей задаче одновременно увеличивается оценка глубины модуляции ε . Будем грубо считать, что эти два процесса взаимно нейтрализуют друг друга и что для нескольких следующих резонансных зон Юпитера оценки их ширины такие же, хотя бы по порядку величин, т. е. резонансные зоны узкие.

Косвенным подтверждением правильности проведенных рассуждений служат щели Кирквуда. Их ширина имеет тот же порядок, т. е. не превышает нескольких

десятих долей земных лет. Поскольку оценка глубины модуляции пропорциональна m/M , для Сатурна (и тем более для всех других планет) резонансные зоны с небольшими номерами (только такими мы и интересуемся) также получаются узкими. Поэтому описанный ранее способ визуализации резонансных зон в виде отрезков, перпендикулярных оси времени, вполне законен.

В поисках ответа на вопрос о причине, по которой, в частности, пара Юпитер, Сатурн тяготеет к соизмеримости 2:5, вернемся к уравнению (8). Оно было получено из более точного нелинейного уравнения (7). Наличие нелинейности означает, что в решении уравнения (7) в собственном колебании (при отсутствии F_r) непременно будут возникать высшие гармоники. Они будут проявляться тем сильнее, чем больше эксцентриситет орбиты. Это означает, что эксцентриситет может рассматриваться как мера нелинейности. Учет того, что резонансы могут происходить на высших гармониках, позволяет уточнить условие (10) и выписать целую иерархию резонансов:

$$\omega_a \approx \frac{n}{n-p} \omega_m, \quad \omega_a \approx \frac{n-p}{p} \omega_m, \quad p = 1, 2, \dots, \quad n = p+1, p+2, \dots \quad (11)$$

При $p = 1$ получаются резонансы силы, выявленные ранее при линейном приближении уравнения (7) с помощью (8). При $p = 2$ мы имеем условия параметрического резонанса, также полученные ранее в том же приближении. При $p = 3, 4, \dots$ получаются следующие серии резонансов, причем различие между параметрическим и обычным резонансом здесь размывается (так называемый автопараметрический резонанс). В пользу соотношений (11) свидетельствуют упомянутые ранее щели Кирквуда. Так, соизмеримостям 3:7; 1:4 и 2:5 отвечают $n = 7, p = 4$; $n = 4, p = 3$ и $n = 5, p = 3$.

Эти серии резонансов позволяют попутно ответить на вопрос, почему природа предпочла почти круговые орбиты планет в Солнечной системе. Они могли стать таковыми в процессе эволюции. Большой эксцентриситет орбиты влечет более сильно проявляющуюся резонансную структуру, создаваемую планетой. Планеты с большими эксцентриситетами будут сильнее взаимодействовать с соседними планетами, обмениваясь энергией и кинетическим моментом. В итоге орбиты таких планет будут перестраиваться сравнительно быстро. И наоборот, если орбиты планет случайно оказались почти круговыми, эта конфигурация представляется более устойчивой. Подкрепляет данную версию округления орбит в процессе эволюции система Юпитера. Массы четырех его самых крупных спутников (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто) в сумме составляют подавляющую часть массы системы Юпитера. Они движутся по почти компланарным и почти круговым орбитам. Периоды их обращений вокруг Юпитера измеряются в земных сутках (см. далее), что означает более продолжительное время эволюции, если измерять его в оборотах вокруг центрального тела, по сравнению с планетами Солнечной системы.

Учет в дополнение к (10) соотношений (11) выявляет парадоксальную картину: все планеты тяготеют к резонансным зонам друг друга с небольшими p и n (см. табл. 2). Относительная погрешность приближения в таблице не превышает 5%. Таблицу можно было бы и продолжить: так, отношение периодов Земли и Меркурия близко к 4 ($n = 4, p = 3$), Венеры и Марса – к 3 ($n = 3, p = 2$), Юпитера и Урана – к 7 ($n = 7, p = 6$) и т.д., но эти соизмеримости вторичны в том смысле,

ТАБЛИЦА 2. Соизмеримости в Солнечной системе.

$\frac{T_1}{T_2}$	$\frac{T_B}{T_{Me}}$	$\frac{T_3}{T_B}$	$\frac{T_M}{T_3}$	$\frac{T_{Ц}}{T_M}$	$\frac{T_{Ю}}{T_{Ц}}$	$\frac{T_C}{T_{Ю}}$	$\frac{T_y}{T_C}$	$\frac{T_H}{T_y}$	$\frac{T_{П}}{T_H}$
значение	2.52	1.63	1.88	2.45	2.58	2.48	2.85	1.96	1.51
соизмеримость	5/2	5/3	9/5	5/2	5/2	5/2	3/1	2/1	3/2
n	5	5	9	5	5	5	3	2	3
p	3	2	4	3	3	3	2	1	1

что их можно получить из уже выписанных данных. Еще более точное соответствие соизмеримостям можно обнаружить в упоминавшейся четверке галилеевых спутников системы Юпитера. Их периоды обращения вокруг Юпитера в земных сутках составляют 1.76914, 3.55118, 7.15455, 16.68902 (см., например, книгу [8]), что приводит к погрешностям (p и n малы) не более процента.

Упомянутый парадокс заключается в том, что такие диаметрально противоположные явления, как щели Кирквуда и зафиксированные в табл. 2 соизмеримости, несомненно имеют одну природу. Возможное разрешение этого парадокса раскрывает рис 1. Он был получен следующим способом.

Горизонтальная ось – это ось времени. Выделенная точка на ней изображает некую условную планету, точнее говоря ее период обращения вокруг звезды (один условный год). Последовательно (сначала $p = 1$, а n пробегает натуральный ряд начиная с двух, затем $p = 2$, а n пробегает натуральный ряд начиная с трех и т. д.) изобразим отрезками, перпендикулярными к оси, резонансные зоны из (11), которые создаются данной планетой. При переходе к следующему p будем уменьшать длины отрезков (вообще говоря, чем больше значение p , тем на более высокой гармонике действует резонанс, тем большего времени он требует для своего проявления и тем он менее важен). Самый длинный отрезок, лежащий левее условного года данной планеты, соответствует $1/2$, следующий отрезок такой же длины соответствует $2/3$. Самый длинный отрезок справа от условного года отвечает $2/1$, затем $3/2$ и т. д.

Разумеется, не все резонансы можно реально изобразить, при каждом p диапазон изменения n приходится ограничивать сверху. На рисунке это проявляется в виде окрестности значения условного года планеты, лишенной отрезков. Но это неважно, так как при $n \rightarrow +\infty$ дробь $n/(n-p)$ и ей обратная стремятся к единице, в то время как в модельной задаче из раздела 2 требовалось, чтобы r_a и r_m не были слишком близкими. При нарушении этого требования астероид будет слишком близко подходить к планете, и соглашение о том, что динамика астероида в основном определяется звездой, будет нарушено.

Отметим, что одновременно с изменением длин отрезков можно было бы менять их цвет. Это дало бы возможность отслеживать наложения отрезков или, что эквивалентно, кратности дробей из (11). Но это тоже не так важно. Важнее другое: видно, что вокруг отрезков большей длины образуются промежутки, свободные (при данном диапазоне изменения p) от отрезков меньшей длины. Напрашивающееся нестрогое объяснение этого эффекта состоит в том, что дроби из соотношений (11), соответствующие малым p и n , имеют в некотором смысле бóльшую кратность, чем

Рис. 1. Распределение резонансов.

дроби с большими p и n . За счет этого окрестность таких дробей (отрезков) обедняется следующими дробями (отрезками). В переводе на язык резонансов это означает, что существуют, так сказать, локальные минимумы плотности распределения резонансов, определенной каким-нибудь разумным образом.

4. О РАЗЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

Подведем математическое обоснование под эффект, замеченный на рис. 1. Делать это можно разными способами. Например, можно вывести и затем проанализировать функциональную зависимость от p длины свободной зоны, организующим центром которой служит какая-то фиксированная дробь из (11).

Определенности ради рассмотрим

$$a(n, p) = \frac{n}{n - p}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad n = p + 1, p + 2, \dots$$

Пусть n_1 и p_1 таковы, что дробь $a_1 = a(n_1, p_1) = n_1/(n_1 - p_1)$ несократимая, это, кстати, влечет несократимость дроби n_1/p_1 . Тогда, положив $n_k = kn_1$ и $p_k = kp_1$, $k = 1, 2, \dots$, будем иметь $a_1 = a(n_k, p_k)$. Вычислим

$$\begin{aligned} a_1 - a(n_k + 1, p_k) &= \frac{p_1}{(n_1 - p_1)(k(n_1 - p_1) + 1)}, \\ a(n_k - 1, p_k) - a_1 &= \frac{p_1}{(n_1 - p_1)(k(n_1 - p_1) - 1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если $p_1 = 1$, то kp_1 пробегает без пропусков натуральный ряд, и из этих формул в этом частном случае сразу получаем искомые функциональные зависимости для расстояний ρ_ℓ , ρ_r от соответствующего значения a_1 до ближайших его левых и правых элементов $a(n, p)$, возникающих на p -м шаге:

$$\begin{aligned} \rho_\ell(p) &= \frac{1}{(n_1 - 1)(p(n_1 - 1) + 1)}, & p = 1, 2, \dots, \\ \rho_r(p) &= \frac{1}{(n_1 - 1)(p(n_1 - 1) - 1)}, & p = 2, 3, \dots \quad \text{при } n_1 = 2, \\ & & p = 1, 2, \dots \quad \text{при } n_1 > 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Область определения функции $\rho_r(p)$ задается более сложным образом, чем для ρ_ℓ , поскольку при $n_1 = 2$ и $p = 1$ соответствующий элемент $a_1 = 2$ оказывается самым правым на числовой оси, и у него просто не существует на данном этапе правого соседа. При последующих $p = 2, 3, \dots$ возникают правые соседи.

При $p_1 > 1$ формулы (12) менее полезны, поскольку kp_1 уже не пробегает весь натуральный ряд. Тем не менее далее мы покажем, что они в целом верно выражают искомые зависимости.

Аналогично $a(n, p)$ введем следующую функцию двух вещественных переменных:

$$f(x, y) = \frac{x}{x - y}, \quad y > 0, \quad x > y.$$

Ее линии уровня – это лучи, испущенные из начала координат. Причем по мере возрастания угла, образованного таким лучом с осью абсцисс, от 0 до $\pi/4$ значение функции на таких лучах монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. В частности,

$$f(x, y)|_{y=p_1x/n_1} = \frac{n_1}{n_1 - p_1} = a_1.$$

Рассмотрим в области определения функции прямую $y = p_1x/n_1$. Она проходит через бесконечное множество точек с целочисленными координатами вида (kn_1, kp_1) . Поиск точек с целочисленными координатами, близких к данной прямой, связан с нашей задачей, поскольку таким точкам отвечают дроби, близкие к исходной дроби a_1 . Такие точки, расположенные над (под) прямой, соответствуют приближениям к a_1 справа (слева). При этом уход вдоль прямой на бесконечность соответствует увеличению p .

Оказывается, достаточно изучить распределение ближайших целочисленных точек на одном “периоде”, например от точки (n_1, p_1) до $(2n_1, 2p_1)$. Среди таких точек найдутся лишь две, которые дают наилучшие приближения к a_1 слева и справа; именно при их появлении (при достижении определенных значений p) будут уменьшаться ρ_ℓ и ρ_r . Это следует из того, что через все эти точки можно провести прямые (очевидно, различные), соединяя данные точки с началом координат. Именно те прямые, которые образуют более острые углы с прямой $y = p_1x/n_1$, содержат точки, дающие наилучшие приближения. Это вытекает из описанной ранее картины распределения линий уровня функции $f(x, y)$ по ее области определения. Таких наименьших углов будет всего два. Один отвечает прямой, проходящей над прямой $y = p_1x/n_1$, другой – прямой, проходящей под $y = p_1x/n_1$.

При рассмотрении точек прямой от $(2n_1, 2p_1)$ до $(3n_1, 3p_1)$ всю описанную процедуру можно повторить, и понятно, что точки, дающие наилучшие приближения к a_1 , просто увеличат свои координаты на периоды: x – на n_1 , а y – на p_1 . Из описанной процедуры вытекает также, что наиболее естественной переменной в искомым формулах должна быть не p , а что-то типа $[p/p_1]$ (где $[\cdot]$ – целая часть числа), поскольку отнюдь не при каждом переходе к следующему p появляются более близкие к исходному значению a_1 члены $a(n, p)$, что влечет изменение ρ_ℓ и ρ_r . Но это обязательно происходит один раз (по отдельности справа и слева) за период изменения p .

Ранее полученные частные (для $p_1 = 1$) формулы (13), которые также можно было бы вывести с помощью описанного геометрического подхода, не входят в противоречие с общими выводами, а очень частным образом им соответствуют.

Выведем сначала формулу для ρ_ℓ . Проведем горизонтальные прямые $y = kp_1 + s$, $k = 0, 1, \dots$, $s = 1, \dots, p_1$, каждый раз фиксируя ближайшую к прямой $y = p_1x/n_1$ точку с целыми координатами, находящуюся под данной прямой:

$$(x_s, y_s) = \left(kn_1 + \left\lfloor \frac{n_1s}{p_1} \right\rfloor + 1, kp_1 + s \right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad s = 1, \dots, p_1. \quad (14)$$

Мы получим формулу для ρ_ℓ , если найдем

$$\min_{s=1, p_1} \{a_1 - a(x_s, y_s)\} = \min_{s=1, p_1} \left\{ \frac{([n_1s/p_1] + 1)p_1 - sn_1}{(n_1 - p_1)(k(n_1 - p_1) + [n_1s/p_1] + 1 - s)} \right\}. \quad (15)$$

Рассмотрим более общую задачу. Найдем положительный минимум выражения

$$\frac{p_1q - n_1s}{(n_1 - p_1)(k(n_1 - p_1) - q + s)}, \quad 1 \leq s \leq p_1, \quad 2 \leq q \leq n_1 + 1,$$

где s и q – целые числа. Такой переход соответствует расширению множества точек (14) при поиске минимума (15). Этот минимум реализуется, по крайней мере для всех достаточно больших k , при q и s , при которых числитель обращается в единицу. Это легко увидеть, предположив, что минимум реализуется, когда числитель больше единицы, взяв отношение дробей и устремив $k \rightarrow +\infty$. Что касается принципиальной возможности обратить числитель в единицу, то проблема существования такого s сводится к решению диофантова уравнения $p_1q - n_1s = 1$ в целых подходящих нам числах. Это осуществимо, поскольку, как было отмечено, дробь n_1/p_1 несократима или, что эквивалентно, наибольший общий делитель чисел n_1 и p_1 равен единице (см., например, монографию [10], § 2).

Оказывается, что те точки, которые минимизируют выражение в расширенной задаче, минимизируют его и в (15), поскольку именно среди точек вида (14) находится ближайшая к прямой $y = p_1x/n_1$. Иными словами, решив соответствующее диофантово уравнение, мы не должны проверять, что подходящее его решение действительно определяет какую-либо точку из (14) – это обеспечивается автоматически. Ограничение на величину k снимается, если вспомнить геометрические построения, предсказывающие регулярность появлений ближайших к a_1 дробей. Кроме того, этим же обстоятельством обеспечивается отличие знаменателя от нуля в области определения.

Все это позволяет следующим образом расширить (13):

$$\rho_\ell(p) = \frac{1}{(n_1 - p_1)([(p - s_0)/p_1](n_1 - p_1) + q_0 - s_0)}, \quad p \geq p_1, \quad (16)$$

где (n_0, q_0) есть целочисленное решение уравнения $p_1q - n_1s = 1$, $1 \leq s_0 \leq p_1$, $2 \leq q_0 \leq n_1 + 1$. Здесь было использовано соотношение $kp_1 + s = p$, которое в свою очередь получается из выражения $y = kp_1 + s$, использованного при нахождении точек (14).

Прежде чем переходить к поиску ρ_r , заранее отметим специфику его области определения, аналогичную особенностям области определения функции ρ_r в (13). Если $n_1 = p_1 + 1$, то $\rho_r(p_1)$ (в отличие от $\rho_\ell(p_1)$) не будет иметь смысла. Это связано с тем же обстоятельством, что и выше: с отсутствием при данном $p = p_1$ дробей

$a(n, p_1)$, больших, чем $a_1 = a(n_1, p_1) = a(n_1 + 1, p_1)$. В геометрической терминологии это означает, что все ближайшие целочисленные и расположенные над прямой $y = p_1 x / n_1$ точки от начала координат до точки (n_1, p_1) оказываются вне области определения введенной нами функции $f(x, y)$.

Проведем горизонтальные прямые $y = lp_1 - d$, где $l = 1, 2, \dots$ и $d = 0, \dots, p_1 - 1$, каждый раз фиксируя ближайшую к прямой $y = p_1 x / n_1$ точку с целыми координатами, находящуюся над данной прямой:

$$(x_d, y_d) = \left(ln_1 - \left\lfloor \frac{n_1 d}{p_1} \right\rfloor - 1, lp_1 - d \right), \quad l = 1, 2, \dots, \quad d = 0, \dots, p_1 - 1.$$

Далее рассмотрим

$$\min_{d=0, p_1-1} \{a(x_d, y_d) - a_1\}.$$

Действуя, как в случае ρ_ℓ , получим

$$\rho_r(p) = \frac{1}{(n_1 - p_1)[(p + d_0)/p_1](n_1 - p_1) - g_0 + d_0}, \quad \begin{aligned} p > p_1 & \text{ при } n_1 = p_1 + 1, \\ p \geq p_1 & \text{ при } n_1 > p_1 + 1, \end{aligned} \quad (17)$$

где (d_0, g_0) – целочисленное решение уравнения $p_1 g - n_1 d = 1$, $0 \leq d_0 \leq p_1 - 1$, $1 \leq g_0 \leq n_1 - 1$.

Если задать a_1 , не составляет труда конкретизировать полученные формулы. Например, при $a_1 = 3/(3 - 2) = 3$

$$\rho_\ell(p) = \frac{1}{[(p - 1)/2] + 1}, \quad p \geq 2, \quad \rho_r(p) = \frac{1}{[(p - 1)/2] - 1}, \quad p \geq 3,$$

а при $a_1 = 10/(10 - 7) = 10/3$

$$\rho_\ell(p) = \frac{1}{3[3[(p - 2)/7] + 1]}, \quad \rho_r(p) = \frac{1}{3[3[(p + 2)/7] - 1]}, \quad p \geq 7.$$

Если считать p вещественной переменной, то графики функций $\rho_\ell(p)$, $\rho_r(p)$ кусочно постоянны и стремятся к нулю при уходе аргумента на бесконечность. Если аппроксимировать их непрерывной функцией, то для $a_1 = 3$ можно взять функцию $2/p$ (годную сразу и для $\rho_\ell(p)$, и для $\rho_r(p)$), а для $a_1 = 10/7$ подойдет функция $7p/9$. Понятно, какая функция и почему быстрее убывает.

Проведем теперь сравнение в общем случае и покажем, что вокруг всякой дроби $a_1 = n_1/(n_1 - p_1)$ свободное пространство убывает медленнее, чем у всякой достаточно близкой к ней дроби, появившейся при большем $p > p_1$. В качестве такой дроби рассмотрим

$$\tilde{a} = \frac{kn_1 + \alpha}{kn_1 + \alpha - kp_1 - \beta}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где α и β – любые целые числа, удовлетворяющие неравенствам $|\alpha| < n_1$ и $|\beta| < p_1$. Из формул (13), (16) и (17) вытекает, что вокруг значений a_1 и $\tilde{a}$ свободные зоны убывают, как функции

$$\frac{p_1}{(n_1 - p_1)^2 p}, \quad \frac{p_1 + \beta/k}{k(n_1 - p_1 + (\alpha - \beta)/k)^2 p}.$$

Возьмем отношение коэффициентов и потребуем, чтобы оно было больше единицы:

$$k \left(\frac{p_1}{p_1 + \beta/k} \right) \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{k(n_1 - p_1)} \right)^2 > 1. \quad (18)$$

Выражения в скобках стремятся к единице, когда $k \rightarrow +\infty$. Это означает, что при всех достаточно больших k решение неравенства (18) существует при любых разрешенных значениях параметров.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор осознает недостаточную строгость своих математических построений в разделах 2, 3 (в частности, это касается перехода от системы (5) к усредненной системе (6)) и видит свое основное достижение в нахождении взаимосвязи (хотя бы и зыбкой с математической точки зрения) между столь разнородными явлениями, как щели Кирквуда и соизмеримости. Если эта взаимосвязь действительно имеет место, то, в принципе, можно пытаться подтверждать ее экспериментально, например с помощью электрических колебательных контуров, соответствующим образом связанных и при этом способных менять свои параметры. Также разобраться в этом вопросе могла бы помочь статистика экзопланетных систем, собранная с помощью астрономических наблюдений. Рис. 1 наводит на мысль, что соизмеримости должны быть типичны и скорее присущи более зрелым планетным системам, и наоборот.

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению изложения.

Список литературы

- [1] Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Резонансы и малые знаменатели в небесной механике*, Наука, М., 1978.
- [2] А. Н. Колмогоров, *Докл. АН СССР*, **98**:4 (1954), 527–530.
- [3] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Эдиториал УРСС, М., 2003.
- [4] В. И. Арнольд, *Докл. АН СССР*, **156**:1 (1964), 9–12.
- [5] Н. Н. Нехорошев, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:4 (1971), 82–83.
- [6] A. Bounemoura, V. Kaloshin, *Mosc. Math. J.*, **14**:2 (2014), 181–203.
- [7] А. М. Молчанов, *Гипотеза резонансной структуры Солнечной системы*, ИЦБИ АН СССР, Пуццо, 1974.
- [8] А. Рой, *Движение по орбитам*, Мир, М., 1981.
- [9] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматлит, М., 1958.
- [10] В. Ф. Серпинский, *О решении уравнений в целых числах*, Физматлит, М., 1961.

Поступила в редакцию 9.06.2015,
после доработки 2.10.2015