Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Антипин, А. И. Дубиковский, П. К. Силаев,
О некоторых свойствах динамики коллапса в массив-
ной и безмассовой релятивистской теории гравитации,
ТМФ, 2016, том 187, номер 1, 114–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:52:27

© 2016 г. К. В. Антипин*, А. И. Дубиковский*, П. К. Силаев*[†]

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИНАМИКИ КОЛЛАПСА В МАССИВНОЙ И БЕЗМАССОВОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Проведено численное и аналитическое исследование динамики коллапса в массивной и безмассовой релятивистской теории гравитации для разных уравнений состояния вещества. Это позволило уточнить характер динамики коллапса в случае массивной релятивистской теории гравитации, в частности, была установлена зависимость от массы гравитона для времени достижения точки поворота (т. е. точки перехода от сжатия к расширению). Для безмассовой релятивистской теории гравитации уточнена связь между известным решением общей теории относительности для холодной пыли и соответствующим решением релятивистской теории гравитации. Показано, что гармоническое время сингулярно, в том числе для гладкого распределения материи, соответствующего компактному объекту с существенно размытой границей, т. е. решение Оппенгеймера–Снайдера не может быть целиком вложено в пространство Минковского. Кроме того, исследовано влияние ненулевого давления на динамику коллапса.

Ключевые слова: теория гравитации, общая теория относительности, релятивистская теория гравитации, коллапс, масса гравитона.

DOI: 10.4213/tmf8988

1. ВВЕДЕНИЕ

Еще в 30-х годах прошлого века было показано, что в рамках общей теории относительности (ОТО) эволюция пылевой сферы приводит к формированию черной дыры [1], [2]. В рамках релятивистской теории гравитации (РТГ) [3], [4] наличие массы гравитона достаточно сильно меняет ситуацию. Разумеется, в ньютоновской и постньютоновской области масса гравитона не может оказать существенного влияния на характер статических решений, однако в области сильных полей наличие

*Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: dubikovs@bog.msu.ru

[†]Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: silaev@bog.msu.ru

ненулевой массы оказывается чрезвычайно существенным. Общий анализ влияния массы гравитона на статические сферически-симметричные решения был проведен в работе [5], где показано, что эти решения не обладают свойствами черной дыры. Анализ динамики сферически-симметричной конфигурации для холодной пыли был проведен в работе [6], где показано, что пылевой шар должен пульсировать, т. е. формирования черной дыры при коллапсе холодной пыли не происходит.

В настоящей работе мы представляем численные задачи о коллапсе для некоторых конкретных сферически-симметричных начальных конфигураций. Начальные конфигурации задаются следующим образом. В моделях с ненулевым давлением строится статическое решение, удовлетворяющее одному из модельных уравнений состояния (степенная зависимость давления от энергии). В результате статическое решение представляет собой гладкое распределение материи, причем с формальной точки зрения плотность материи нигде не обращается в нуль. Расчет показал, что для всех использованных уравнений состояния распределение материи, во-первых, монотонно убывает с ростом радиуса, во-вторых, является “компактным” в том смысле, что можно указать характерный радиус, внутри которого содержится практически вся материя. Эволюция такой конфигурации запускалась посредством плавного уменьшения давления, что до некоторой степени моделирует выгорание ядерного топлива. Тем самым начальные условия соответствовали нулевым скоростям и нулевым производным метрики по времени. Для моделей с нулевым давлением мы использовали стационарную конфигурацию с гладким компактным распределением плотности материи, нулевой скоростью материи и нулевыми производными метрики по времени. Разумеется, метрические коэффициенты в этом случае определялись из условия стационарности и уравнений для метрики.

Такая постановка задачи позволяет, во-первых, уточнить детали динамики системы. Во-вторых, это дает возможность проверить интуитивно очевидное утверждение о том, что замена модели холодной пыли на более реалистичную модель с ненулевым давлением не приводит к качественным изменениям. Наличие давления должно лишь несколько тормозить (или даже останавливать, если оно достаточно велико) процесс коллапса. В-третьих, в рамках нашего подхода мы можем проанализировать, как влияет на динамику коллапса конечность размера переходной области между ненулевой плотностью материи и практически нулевой плотностью материи. В большинстве работ по необходимости рассматриваются “внешнее” (вакуумное) и “внутреннее” решения, которые сшиваются на границе тела, так что ширина переходной области полагается равной нулю. Между тем опыт работы с дифференциальными уравнениями второго порядка показывает, что результаты для модели с границами нулевой ширины иногда довольно сильно отличаются от результатов для модели с переходной областью конечного размера – достаточно вспомнить классическую задачу квантовой механики о надбарьерном отражении на конечном скачке потенциала. В-четвертых, мы анализируем безмассовый предел РТГ, т. е. исследуем вопрос о том, как выглядит коллапс в безмассовой РТГ, и сравниваем эти результаты с соответствующими результатами ОТО. Наконец, на основе анализа полученных численных данных мы получаем точные аналитические результаты, касающиеся времени достижения точки поворота при коллапсе и поведения гармонического времени для коллапса холодной пыли в ОТО.

Структура работы следующая. В разделе 2 мы анализируем случай безмассовой теории. Сначала мы исследуем свойства решения для холодной пыли в безмассовой РТГ, которое получается, если построить гармонические координаты для решения Оппенгеймера–Снайдера и тем самым “вложить” это решение в пространство Минковского. Затем мы исследуем влияние ненулевого давления материи на динамику коллапса в безмассовой РТГ. В разделе 3 мы исследуем вопрос о коллапсе в массивной РТГ и устанавливаем зависимость времени достижения точки поворота от массы гравитона.

2. СЛУЧАЙ БЕЗМАССОВОЙ ТЕОРИИ

В случае безмассовой теории мы можем использовать известные результаты, полученные в ОТО. Необходимо лишь установить, какие секторы этих решений могут быть “вложены” в пространство Минковского. Разумеется, аналитические результаты можно получить только для случая холодной пыли, случай ненулевого давления мы проанализируем численно. Однако можно заранее сказать, что ненулевое давление должно лишь несколько замедлять процесс коллапса, не внося качественных изменений в общую картину; прямой численный расчет подтверждает это предположение.

Напомним, что в ОТО для несопутствующей системы (например, при выборе калибровки $g_{22} = -r^2$) процесс коллапса требует бесконечного времени. Для случая тела с границей¹⁾ r_0 (т. е. когда плотность материи не убывает плавно с ростом радиальной переменной r , а обращается в нуль при $r \geq r_0$) этот факт легко объяснить: благодаря теореме Биркгофа метрика вне тела (при $r > r_0$) совпадает с метрикой Шварцшильда, следовательно, элемент границы тела (“самая внешняя” пылинка) движется в метрике Шварцшильда, и ей требуется бесконечное время, чтобы упасть на горизонт. При этом внутри тела метрический коэффициент $g_{00}(r) < g_{00}(r_0)$, причем обе эти величины достаточно быстро стремятся к нулю. Кстати, именно это вызывает неограниченный рост величины нулевой компоненты T^{00} тензора энергии-импульса материи при конечной плотности материи $e(t, r)$, как это и было показано в [4], [7]. Несмотря на быстрое убывание метрического коэффициента $g_{00}(r)$, нулевого значения он достигает за бесконечное время, т. е. для удаленного наблюдателя коллапс идет бесконечно долго.

Таким образом, мы можем поставить вопрос: всегда ли в безмассовой РТГ картина коллапса совпадает с картиной в несопутствующей системе координат ОТО? Иначе говоря, всегда ли в безмассовой РТГ требуется бесконечное время для коллапса? Для ответа на этот вопрос достаточно проанализировать уравнение, позволяющее перейти от решения Оппенгеймера–Снайдера к аналогичному решению безмассовой РТГ. Мы ограничимся случаем, когда коллапс начинается со стационарной конфигурации, т. е. в начальный момент скорости равны нулю. Заметим, что другой случай – степенного решения – был проанализирован в работе [8] в рамках несколько более традиционного подхода, в котором рассматривается тело с границей и, соответственно, внешнее (вакуумное) и внутреннее решения, которые сшиваются на границе тела. В рассматриваемом нами случае решение принимает вид [1], [2] (здесь и далее мы пользуемся обозначениями из монографии [9])

$$g_{ij} = \text{diag}(1, -e^{\lambda(\tau, R)}, -r^2(\tau, R), -r^2(\tau, R) \sin^2 \theta), \quad (1)$$

¹⁾Этот не слишком реалистичский случай удобен для качественного анализа.

где

$$e^{\lambda(\tau, R)} = \frac{(\partial_R r(\tau, R))^2}{f(R) + 1},$$

$$r(\tau, R) = \frac{F(R)}{-2f(r)}(1 - \cos \eta), \quad e(\tau, R) = \frac{\partial_R F(R)}{r^2(\tau, R) \partial_R r(\tau, R)};$$

здесь η определяется соотношением

$$\tau = \frac{F(R)}{2(-f)^{3/2}(\tau, R)}(\pi - \eta + \sin \eta). \quad (2)$$

Величина η изменяется со временем от значения π (при этом $\tau = 0$) до нуля, а $F(R)$ и $f(R)$ – произвольные функции, которые, впрочем, должны быть подобраны таким образом, чтобы плотность материи и метрические коэффициенты были конечны в начальный момент времени, имели правильный знак и необходимую нам асимптотику на бесконечности. При конкретных численных расчетах мы выбирали их так, чтобы распределение материи в начальный момент времени удовлетворяло описанному во введении начальным условиям – являлось гладкой монотонной функцией, соответствующей условно компактному объекту с размытой границей. При нашем выборе начала отсчета времени (в обозначениях книги [9] это означает выбор функции $\tau_0(R)$) мы получаем “стационарное” начальное условие, т. е. нулевые производные по времени метрических коэффициентов и нулевую скорость материи.

Для построения аналогичного решения безмассовой РТГ достаточно решить уравнения

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \tilde{t}(\tau, R) - \partial_R^2 \tilde{t}(\tau, R) e^{-\lambda(\tau, R)} + \partial_\tau \tilde{t}(\tau, R) \left(\frac{\partial_\tau \lambda(\tau, R)}{2} + \frac{2\partial_\tau r(\tau, R)}{r(\tau, R)} \right) + \\ + \partial_R \tilde{t}(\tau, R) \left(\frac{\partial_R \lambda(\tau, R)}{2} - \frac{2\partial_R r(\tau, R)}{r(\tau, R) e^{\lambda(\tau, R)}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \tilde{r}(\tau, R) - \frac{\partial_R^2 \tilde{r}(\tau, R)}{v(\tau, R)} + \partial_\tau \tilde{r}(\tau, R) \left(\frac{\partial_\tau \lambda(\tau, R)}{2} + \frac{2\partial_\tau r(\tau, R)}{r(\tau, R)} \right) + \\ + \partial_R \tilde{r}(\tau, R) \left(\frac{\partial_R \lambda(\tau, R)}{2e^{\lambda(\tau, R)}} - \frac{2\partial_R r(\tau, R)}{r(\tau, R) e^{\lambda(\tau, R)}} \right) = -\frac{2\tilde{r}(\tau, R)}{r^2(\tau, R)} \end{aligned} \quad (4)$$

для новых переменных $\tilde{t}$, $\tilde{r}$. В этих переменных решение (1) будет решением уравнений РТГ [3], [4], в которых масса гравитона μ положена равной нулю. Следует заметить, что при переходе к новым координатам, вообще говоря, нарушается диагональность метрики. В гармонических координатах $\tilde{t}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\theta} = \theta$, $\tilde{\varphi} = \varphi$ мы полагаем интервал в пространстве Минковского равным

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 - \tilde{r}^2 \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2,$$

т. е. одновременная диагональность метрики в пространстве Минковского и эффективной метрики g_{ij} не достигается.

Мы сосредоточимся на уравнении (3) для новой временной переменной. Если окажется, что в момент коллапса время стремится к бесконечности, то для коллапса в РТГ требуется бесконечное время. В работах [10], [11] этот вопрос уже был исследован посредством численного анализа, однако численное доказательство сингулярности той или иной величины может вызывать определенные сомнения. Кроме того,

в дальнейшем нам понадобится асимптотика функции $\tilde{t}(\tau, R)$ при $R \rightarrow 0$ на поздних стадиях коллапса, так что мы получим соответствующее аналитическое выражение, справедливое для таких гладких функций $f(R)$ и $F(R)$, которые обеспечивают конечную плотность энергии и конечные метрические коэффициенты в начальный момент времени.

Прямое численное решение уравнения (3), проведенное для достаточно широкого набора функций $f(R)$, $F(R)$, показывает, что неограниченный рост времени $\tilde{t}$ начинается в окрестности значения $R = 0$. Более того, $\tilde{t}(\tau, R)$ и $\partial_\tau \tilde{t}(\tau, R)$ как функции от R монотонно убывают на интервале $[0, \infty)$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением окрестности точки $R = 0$ и будем разлагать в ряд по степеням R все величины, входящие в решение (1).

Требование конечности плотности энергии и метрических коэффициентов в начальный момент времени приводят к следующим разложениям:

$$f(R) = a_2 R^2 + a_3 R^3 + \dots, \quad F(R) = b_3 R^3 + b_4 R^4 + \dots.$$

В этом случае плотность энергии в окрестности значения $R = 0$ приобретает вид

$$e(\tau, R) = \frac{24a_2^3}{b_3^3(1 - \cos \eta)^3} R^0 + O(R^1).$$

Для параметра η используем разложение

$$\eta = c_0(\tau)R^0 + c_1(\tau)R^1 + \dots.$$

Уравнение (2) позволяет найти коэффициенты $c_i(\tau)$, в частности

$$c_0(\tau) = \left[6 \left(\pi - \frac{2\tau a_2^{3/2}}{b_3} \right) \right]^{1/3}.$$

Наконец, для времени $\tilde{t}$ положим

$$\tilde{t}(\tau, R) = d_0(\tau)R^0 + d_1(\tau)R^1 + \dots.$$

Подстановка всех этих рядов в (3) показывает, что $d_1(\tau) = 0$. Далее, выделяя в (3) слагаемые при R^0 , получаем

$$\partial_\tau^2 d_0(\tau) = \frac{4a_2^{3/2}/b_3}{\pi - 2\tau a_2^{3/2}/b_3} \partial_\tau d_0(\tau).$$

Коллапс соответствует обращению в нуль знаменателя в правой части этого уравнения, так что время $\tilde{t}$ при коллапсе действительно неограниченно растет, причем этот рост описывается асимптотикой

$$d_0(\tau) \approx \text{const} \cdot \left(\pi - \frac{2\tau k_2^{3/2}}{l_3} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Легко проверить, что учет старших степеней в разложениях по R не меняет полученных результатов.

Итак, в РТГ с нулевой массой гравитона эволюция тела с размытой границей, состоящего из холодной пыли (в сферически-симметричном случае), до некоторой степени аналогична эволюции такого же тела в ОТО с точки зрения удаленного наблюдателя. При коллапсе гармоническое время неограниченно растет, и тем самым процесс коллапса требует бесконечного времени.

Что касается более реалистичного случая ненулевого давления, то мы были вынуждены ограничиться численным анализом. В качестве начального условия мы выбирали статическую конфигурацию, соответствующую данному уравнению состояния материи. Мы ограничились степенными зависимостями

$$p(r) = Ce^\alpha(r) \quad (6)$$

при разных C и α . Поскольку статическая конфигурация интересует нас не сама по себе, а как начальное условие для динамической задачи, удобно параметризовать метрические коэффициенты следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{00}(r) = u(r) &= \frac{v(r)K^4(r)}{L^4(r)}, & -g_{22}(r) = w(r) &= K^2(r), \\ -g_{11}(r) = v(r) &= \frac{2K(r)K'(r)}{r} - \frac{K^2(r)L'(r)}{rL(r)} \end{aligned} \quad (7)$$

(при этом будут автоматически удовлетворяться уравнения $D_i \tilde{g}^{ij} = 0$). Тогда для функций $K(r)$, $L(r)$, $p(r)$ получим уравнения (для краткости мы опустим аргумент r у всех функций)

$$\begin{aligned} K'' &= \frac{1}{2KLr} \left[(K^4L' - 2K^3K'L)(e - \mu^2 - p) + 2K^2L' \left(\frac{\mu^2 r^2}{2} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4KK' \left(-L \frac{\mu^2 r^2}{2} + L + L'r \right) - 6K'^2 Lr \right], \\ L'' &= \frac{1}{2K^4K'Lr} \left[2K^6K'LL'(e + \mu^2 + 3p) - 2K^7(L')^2 \left(\frac{\mu^2}{2} + p \right) + \right. \\ &\quad \left. + K^5 \left(-4e(K')^2 L^2 - 4(K')^2 L^2 p + LL' \frac{\mu^2 r}{2} + 2(L')^2 \left(\frac{\mu^2 r^2}{2} - 1 \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2K^4K' \left(L^2 \frac{\mu^2 r}{2} + LL'(\mu^2 r^2 - 3) - 5(L')^2 r \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2K^3(K')^2 L(2L + 11L'r) + 12K^2(K')^3 L^2 r - KL^5L' \frac{\mu^2}{2r} + 2K'L^6 \frac{\mu^2}{2r} \right], \\ p' &= \frac{1}{4K^3K'Lr} \left[(e + p) \left((2K^6L' - 4K^5K'L) \left(\frac{\mu^2}{2} + p \right) - K^4L \frac{\mu^2 r}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2K^3(2K'L - KL') \left(\frac{\mu^2 r^2}{2} - 1 \right) + 2K^2(K')^2 Lr + L^5 \frac{\mu^2 r}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

причем массу гравитона μ в данном случае надо положить равной нулю. Эта система уравнений решается с граничными условиями $K(0) = 0$, $L(0) = 0$, $p(\infty) = 0$, $K'(\infty) = 1$, $L'(\infty) = 1$. Разумеется, при численном решении уравнений роль бесконечности играет достаточно большое r , а точные граничные условия заменяются на разложения по степеням $1/r$.

Представляет определенный интерес то обстоятельство, что если не подбирать специально массу решения m и константы C и α , то решение в той области, где плотность материи можно считать нулевой, вообще говоря, не совпадает с простейшей формой статического решения безмассовой РТГ в вакууме

$$u = \frac{\tilde{r} - m}{\tilde{r} + m}, \quad v = \frac{\tilde{r} + m}{\tilde{r} - m}, \quad w = (\tilde{r} + m)^2.$$

Эта форма, в свою очередь, соответствует простейшему решению уравнения (4) для статического случая в вакууме, а именно $\tilde{r}_1(r) = r - m$. В полученных нами численных решениях функция $u(r)$ в области больших r ведет себя так, что коэффициент при $1/r^3$, как правило, не совпадает с $-2m^3$, а это означает, что коэффициент при втором (логарифмическом) решении уравнения (4)

$$\tilde{r}_2(r) = 2m + (r - m) \ln \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$$

отличен от нуля. Это обстоятельство уже было отмечено в работах [12], [13], где указано, что сшивание со внутренним решением не позволяет при рассмотрении условий гармоничности [14] положить коэффициент при логарифмическом решении уравнения (4) равным нулю. В действительности этот результат очевиден, поскольку при $r \rightarrow 0$ решение определяется тремя произвольными константами ($K(0) = L(0) = 0$), так что при $r \rightarrow \infty$ нам необходимы обе произвольные константы – коэффициент при $1/r$, соответствующий массе решения, и коэффициент при $1/r^3$, определяющий коэффициент при логарифмическом члене.

Изменение со временем построенного таким образом статического решения мы реализуем посредством модификации уравнения состояния материи (6), уменьшая константу C (это своего рода моделирование выгорания ядерного топлива). Для целей численного счета оказывается более удобным изменять C не скачком, а плавно,

$$C(t) = C_1 + (C_0 - C_1)e^{-\beta t^2};$$

здесь β – некоторая константа, C_0 – значение константы, соответствующее построенному статическому решению, а C_1 – окончательное значение константы (случай $C_1 = 0$ соответствует случаю холодной пыли).

В динамической задаче мы параметризуем метрические коэффициенты совершенно так же, как в статической: по формулам (7). Напомним, что статическое решение мы используем как начальное условие для динамической задачи, так что

$$u(0, r) \equiv u(r), \quad v(0, r) \equiv v(r), \quad w(0, r) \equiv w(r), \quad K(0, r) \equiv K(r), \quad L(0, r) \equiv L(r).$$

Динамика системы определяется динамикой метрики и динамикой материи. Причина, по которой мы выбрали параметризацию (7) функциями $K(t, r)$ и $L(t, r)$ достаточно проста: при этом динамика метрики сводится к уравнению для $K(t, r)$, в то время как уравнение $D_i \tilde{g}_{i0} = 0$ дает

$$\partial_0 \frac{w^2(t, r)v(t, r)}{u(t, r)} = \partial_0 L^4(t, r) = 0,$$

т. е. величина $L(t, r)$ не зависит от времени и совпадает со своим начальным значением, а именно с $L(r)$, взятым из статического решения: $L(t, r) = L(0, r) \equiv L(r)$.

Для функции $K(t, r)$ из уравнений РТГ [3], [4], точнее, из уравнения для R_{11} , получаем уравнение (как и ранее, мы для краткости опустим аргументы t и r у всех функций, дифференцирование по времени обозначим точкой, а по радиусу – штрихом)

$$\begin{aligned} \ddot{K} = \frac{1}{4KL^5r(KL' - 2K'L)} & \left[-K^7 \left(LL'r \left(2es^2 + \frac{\mu^2}{2} \right) - 4(K')^2 L^2 \mu^2 + 2(L')^2 \left(\frac{\mu^2}{2r^2} - 1 \right) \right) + \right. \\ & + 2K^6 K' \left(L^2 r \left(2e\eta^2 + \frac{\mu^2}{2} \right) + L \left(L' \left(\frac{2\mu^2}{r^2} - 5 \right) + L''r \right) - 5(L')^2 r \right) + \\ & + 2K^9 (L')^2 \frac{\mu^2}{2} - 8K^8 K' LL' \frac{\mu^2}{2} + 2K^5 K' L (15K' L'r - 2L(K'(\mu^2 r^2 - 3) + K''r)) - \\ & - 24K^4 K'^3 L^2 r + K^3 L^5 L' \frac{\mu^2 r}{2} - 2K^2 K' L^6 \frac{\mu^2 r}{2} + \\ & \left. + 2K \dot{K} L^5 r (5\dot{K} L' - 2\dot{K}' L) - 16\dot{K}^2 K' L^6 r \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(здесь массу гравитона μ следует положить равной нулю). Как и ранее, плотность материи обозначена здесь как $e(t, r)$, а первая компонента ее скорости dx^1/ds – как $\eta(t, r)$. Динамику материи можно получить из закона сохранения, т. е. из соотношения $\nabla_i T^{ij} = 0$. Оба нетривиальных выражения (при $j = 0$ и при $j = 1$) имеют структуру

$$A_1 \partial_0 e(t, r) + A_2 \partial_0 \eta(t, r) + A_3 = 0$$

(выражения для A_i слишком громоздки, чтобы их здесь приводить). Это позволяет найти по отдельности $\partial_0 e(t, r)$ и $\partial_0 \eta(t, r)$. Начальные условия для $e(0, r)$ получаем из статического решения: $e(0, r) = e(r)$, а $\eta(0, r) = 0$.

Результаты численного расчета подтверждают первоначальные предположения: коллапс холодной пыли (случай $C_1 = 0$) идет несколько быстрее, чем коллапс материи с остаточным давлением, пропорциональным C_1 (разумеется, если C_1 достаточно мало, чтобы коллапс вообще происходил при данной массе решения), а поведение метрических коэффициентов в целом совпадает с поведением метрических коэффициентов для решения Оппенгеймера–Снайдера, взятого в системе отсчета удаленного наблюдателя.

На рис. 1 приведена характерная картина эволюции метрического коэффициента $g_{00} = u(t, r)$ при достаточно больших временах. В нашем случае понятие “граница тела” отсутствует (материя распределена непрерывно), но условная граница области, в которой сконцентрирована материя, приблизительно совпадает с областью резкого роста функции $u(t, r)$. Заметим, что в соответствии с теоремой Биркгофа (и ее аналогом в РТГ [15], [16]) в той области, которую можно условно считать вакуумом (плотность материи достаточно мала), метрика не эволюционирует. На рис. 1 можно заметить, что скорость движения “границы тела” уменьшается, в то время как уменьшение функции $u(t, 0)$ не замедляется. Эти два замечания полностью

Рис. 1. Эволюция метрического коэффициента $u(t, r)$ при достаточно больших временах $t_3 > t_2 > t_1$.

описывают последующую эволюцию решения – граница останавливается, а $u(t, 0)$ продолжает убывать, что полностью соответствует проведенному ранее анализу поведения времени $\tilde{t}(\tau, R)$ для решения Оппенгеймера–Снайдера.

3. СЛУЧАЙ НЕНУЛЕВОЙ МАССЫ ГРАВИТОНА

В случае массивной РТГ мы не располагаем каким-либо явным аналитическим решением, поэтому для предварительного анализа динамики системы мы вынуждены обратиться к непосредственному численному расчету. В предыдущем разделе мы уже привели все необходимые соотношения для поиска статического решения (8) и для постановки динамической задачи (9) в случае ненулевой массы гравитона μ .

К сожалению, мы были вынуждены проводить численное моделирование при совершенно нереалистичных массах гравитона. Известна оценка для массы покоя гравитона $m_g < 3 \cdot 10^{-66}$ г (так что $\mu < 8 \cdot 10^{-29}$ см⁻¹). Следовательно, масса решения должна отличаться от массы покоя гравитона по крайней мере на 100 порядков. При поиске статического решения это приводит к техническим трудностям: чтобы исследовать влияние массы на решение, вычисления следует проводить, пользуясь как минимум шестидесятизначной арифметикой, что делает вычисления исключительно медленными. При исследовании динамики коллапса это приводит к принципиальным трудностям. Как будет показано ниже, влияние ненулевой массы на динамику коллапса скажется лишь через время, пропорциональное $1/\mu$, а провести численный анализ на интервале времени, пропорциональном 10^{30} , представляется невозможным в принципе. Поэтому мы исследуем модельную задачу, в которой масса гравитона лишь на несколько порядков меньше, чем масса решения.

Для статических конфигураций ненулевая масса гравитона приводит к некоторому увеличению значения $u(0)$ – чем больше μ , тем ближе $u(0)$ к единице. Что касается динамики коллапса, то на ранних стадиях картина ничем не отличается от случая безмассовой теории, а при достаточно больших временах значение функции $u(t, 0)$ достигает точки поворота и начинает расти. Чем меньше μ , тем дальше

Рис. 2. Зависимость метрического коэффициента $u(t, 0)$ в начале координат от времени до и после точки поворота $t_0 = 108.8$.

по времени отстоит точка поворота. Последующая эволюция решения представляет собой колебания величины $u(t, 0)$ (см. рис. 2), которые сопровождаются не очень регулярными колебаниями (волнами) в распределении материи.

Следует подчеркнуть, что колебания величины $u(t, 0)$ гармоническими не являются, совершенно так же, как колебания плотности материи не представляют собой равномерные циклы сжатие-разрежение (см. рис. 3). Первоначальный характерный радиус области, который занимала материя, в ходе этих колебаний не достигается, т. е. значение плотности материи на больших расстояниях от центра в ходе колебаний оказывается существенно меньше, чем первоначальное значение.

Полученные численные результаты, разумеется, служат лишь указанием на характер динамики решения, и необходимо дать прямое аналитическое доказательство того, что в случае $\mu \neq 0$ в динамике $u(t, 0)$ присутствует точка поворота, а при $\mu = 0$ эта точка поворота отсутствует. Попутно мы установим зависимость времени достижения точки поворота от массы гравитона. Поскольку нас интересует окрестность точки $r = 0$, вновь воспользуемся разложением в ряды по степеням r .

Для функций $K(t, r)$ и $L(r)$, учитывая граничные условия в нуле, запишем

$$K(t, r) = K_1(t)r + K_2(t)r^2 + K_3(t)r^3 + \dots, \quad L(r) = L_1r + L_2r^2 + L_3r^3 + \dots.$$

Подстановка этих разложений в (8) и (9) дает $K_2(t) = 0$ и $L_2 = 0$. Аналогично введем разложения

$$e(t, r) = e_0(t)r^0 + e_1(t)r^1 + e_2(t)r^2 + \dots, \quad \eta(r) = \eta_1(t)r + \eta_2(t)r^2 + \eta_3(t)r^3 + \dots.$$

Подставляя все эти разложения в (9) и выделяя коэффициент при r^0 , получим уравнение (как обычно, опустим для краткости аргумент t у функций $K_1(t)$ и $K_3(t)$)

$$\ddot{K}_1 = -\frac{K_1^7\mu^2}{4L_1^4} - \frac{5K_1^5L_3}{L_1^5} + \frac{K_1^5\mu^2}{8L_1^4} + \frac{10K_1^4K_3}{L_1^4} + \frac{5\dot{K}_1^2}{2K_1} + \frac{K_1\mu^2}{8}.$$

Рис. 3. Метрические коэффициенты $u(t_1, r)$ и $u(t_2, r)$ как функции r для времени $t_1 < t_0$ (штриховая линия) и для времени $t_2 > t_0$ (сплошная линия); здесь t_0 – точка поворота.

Коллапс соответствует стремлению функции $K_1(t)$ к нулю, поэтому мы можем удерживать в этом выражении лишь линейные по $K_1(t)$ слагаемые, пренебрегая слагаемыми, содержащими $K_1^4(t)$, $K_1^5(t)$, $K_1^7(t)$. Тогда получим

$$\ddot{K}_1 = \frac{5\dot{K}_1^2}{2K_1} + \frac{K_1\mu^2}{8}. \quad (10)$$

Интересно, что решение этого уравнения, справедливое лишь в малой окрестности начала координат и на поздних стадиях коллапса, совпадает с решением уравнения, возникающим в космологической модели РТГ [17], полученного при предположении, что давление равно нулю, а максимальное значение масштабного фактора Вселенной $R_{\max}$ достаточно велико.

Таким образом, в малой окрестности начала координат на поздних стадиях коллапса возникает своего рода “однородная изотропная Вселенная”. В действительности для оценки времени достижения точки поворота достаточно отметить, что уравнение для масштабного фактора Вселенной $R(\tau)$ в окрестности нижней точки поворота $R_{\min}$, полученное в работе [18], совпадает с (10), если его также рассматривать только в окрестности точки поворота.

При $\mu \neq 0$ решением уравнения (10) является

$$K_1(t) = \text{const} \cdot \left(\cos \frac{\sqrt{3}\mu(t - t_0)}{4} \right)^{-2/3}, \quad (11)$$

а при $\mu = 0$ мы имеем решение

$$K_1(t) = \text{const} \cdot (t - t_0)^{-2/3}. \quad (12)$$

Ответ для случая нулевой массы, разумеется, в точности совпадает с выражением, которое легко получить из асимптотики (5) для времени $\tilde{t}(\tau, R)$, выписанной в предыдущем разделе.

Из уравнения (10) вытекает, что при $\mu t \ll 1$ можно пренебречь вторым слагаемым в правой части (10), и эволюция системы описывается соотношением (12). По достижении времен порядка $1/\mu$ член с массой начинает играть существенную роль, достигается точка поворота, и функция $K_1(t)$ начинает расти, причем ее поведение в окрестности точки поворота (минимума) описывается соотношением (11). Результаты численного моделирования показали, что после точки поворота величина $K_1(t)$ продолжает расти, и через некоторое время линейное приближение (10) оказывается неприменимым (см. рис. 2). В процессе роста $K_1(t)$ достигает значений, сопоставимых с первоначальным значением $K_1(0)$, а потом вновь начинает убывать.

Таким образом, мы показали, что при любой сколь угодно малой массе гравитона коллапс, в отличие от безмассовой теории, прекращается, причем характерное время от начала коллапса до точки поворота пропорционально $1/\mu$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в настоящей работе результаты численного анализа динамики системы, с одной стороны, подтверждают интуитивно очевидное предположение, что наличие ненулевого давления (для довольно широкого класса модельных уравнений состояния вещества) замедляет процесс коллапса, но не приводит к качественным изменениям в динамике системы. Заметим, впрочем, что мы работали в секторе относительно малых давлений, при которых ни остановки коллапса, ни критических явлений [19] не происходит. С другой стороны, наши расчеты подтвердили статус точного аналитического решения уравнений ОТО для коллапсирующей пыли в рамках безмассовой РТГ. Решение уравнений безмассовой РТГ, как и следовало ожидать, в точности совпадает с решением ОТО с точки зрения удаленного наблюдателя (или, что то же самое, в “несопутствующей” системе координат). А именно, величина g_{00} неограниченно (экспоненциально быстро) убывает в области, где плотность материи относительно велика (это обстоятельство приводит к неограниченному росту величины T^{00} при конечной плотности материи $e(t, r)$, как это и было показано ранее [4], [7]), но достигает нулевого значения лишь за бесконечное время.

Мы доказали, что гармоническое время сингулярно для любого решения Оппенгеймера–Снайдера с гладким компактным распределением материи, так что коллапс в пространстве Минковского требует бесконечного времени. Наконец, мы численно и аналитически исследовали динамику коллапса для массивной РТГ. Анализируя динамику системы в окрестности точки поворота, мы показали, что время достижения точки поворота имеет порядок $1/\mu$, где μ – масса гравитона. При существующих оценках массы покоя гравитона $m_g < 3 \cdot 10^{-66}$ г это время оказывается пропорциональным $4 \cdot 10^{17}$ с = $12 \cdot 10^9$ лет, т.е. сравнимым с возрастом Вселенной. Как уже было отмечено выше, динамика коллапса в окрестности точки поворота совпадает с динамикой фридмановской Вселенной [17], [18], так что это совпадение неудивительно.

При численном анализе динамики коллапса мы были вынуждены рассматривать не слишком реалистичную модель, в которой разница между массой решения и массой гравитона составляет не требуемые 60 порядков, а лишь несколько (от 3 до 5) порядков. Тем не менее результаты вполне подтверждают выводы работы [6], следует только заметить, что пульсации пылевого шара носят нерегулярный характер и первоначальный размер шара в ходе пульсаций не восстанавливается.

Благодарности. Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность М. А. Мествиришвили и К. А. Свешникову за внимание к работе и плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] R. C. Tolman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **20**:3 (1934), 169–176.
- [2] J. R. Oppenheimer, H. Snyder, *Phys. Rev.*, **56**:5 (1939), 455–459.
- [3] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 1989.
- [4] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2012.
- [5] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **121**:1 (1999), 4–24.
- [6] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 295–304.
- [7] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 292–302.
- [8] Ю. В. Чугреев, *ЭЧАЯ*, **21**:3 (1990), 697–725.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 2001.
- [10] T. W. Marshall, *The gravitational collapse of a dust ball*, arXiv:0907.2339.
- [11] T. W. Marshall, *Fields tell matter how to move*, arXiv:1103.6168.
- [12] Р. М. Авакян, *Точные решения уравнений Эйнштейна и их интерпретация*, Изд-во Тартусского ун-та, Тарту, 1988.
- [13] А. В. Генк, *ТМФ*, **87**:1 (1991), 130–140.
- [14] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, ГИТТЛ, М., 1955.
- [15] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ЭЧАЯ*, **40**:1 (2009), 136–143.
- [16] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **181**:2 (2014), 401–416.
- [17] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ЯФ*, **61**:8 (1998), 1526–1536.
- [18] М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугреев, *ТМФ*, **80**:2 (1989), 305–312.
- [19] C. Gundlach, J. M. Martín-García, *Living Rev. Relativity*, **10** (2007), 5, 57 pp.

Поступила в редакцию 10.06.2015,
после доработки 21.07.2015