Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, Асимптотическая оценка зарядового формфактора пиона, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 215–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 10:30:57

© 1998 г.

А. Ф. Крутов*, В. Е. Троицкий†

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗАРЯДОВОГО ФОРМФАКТОРА ПИОНА

В рамках релятивистской гамильтоновой динамики получена асимптотика зарядового формфактора пиона при стремлении переданного импульса к бесконечности, а массы конституэнтного кварка к нулю. Показано, что эта асимптотика совпадает с предсказаниями пертурбативной квантовой хромодинамики, определяется только релятивистской кинематикой и не зависит от модели взаимодействия конституэнтных кварков в пионе.

В настоящее время установлено, что исследование электромагнитной структуры составных кварковых систем в области низких и промежуточных переданных импульсов, т.е. в области так называемых “мягких” процессов, требует применения непертурбативных методов. Кроме того, в системах легких кварков (таких как, например, пион) необходимо учитывать релятивистские эффекты, которые дают существенный вклад даже в области малых переданных импульсов.

В последние годы для исследования составных кварковых систем в непертурбативной области широко используется релятивистская гамильтонова динамика (РГД) (аксиоматика данного подхода, ссылки на расчетные работы, а также ссылки исторического характера содержатся в обзорах [1–3], см. также [4–8]). РГД может быть сформулирована различным образом. Наиболее рациональные формулировки носят названия мгновенной формы динамики, точечной формы динамики, а также динамики на световом фронте. Отличительной чертой РГД по отношению к полевым теориям является релятивистски-инвариантное выделение конечного числа наиболее существенных для описываемой системы степеней свободы. В связи с этим одним из принципиальных и до сих пор непроясненных вопросов РГД является вопрос о ее соответствии пространственно-временному, т.е. полемому, описанию адронных систем – квантовой хромодинамике (КХД).

В настоящее время утвердилось представление, что РГД и КХД как бы дополняют друг друга. Считается, что традиционная (пертурбативная) КХД дает надежные пред-

* Самарский государственный университет, Самара, Россия. E-mail: krutov@info.ssu.samara.ru

† Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: troitsky@theory.npi.msu.su

сказания в области высоких энергий, а РГД может претендовать на описание физики достаточно низких энергий. Однако границы применимости данных подходов не являются твердо установленными. Например, это имеет место при описании эксклюзивных процессов, в том числе при расчете упругих формфакторов адронов, когда оценки границ наступления пертурбативного режима очень сильно отличаются в различных расчетах [9].

В связи с вопросом о связи РГД и КХД представляет интерес сравнение предсказаний этих теорий в той или иной области энергий. Так, твердо установленным предсказанием КХД является асимптотическое поведение при $Q^2 \rightarrow \infty$ ($Q^2 = -q^2$, q – переданный импульс) упругих формфакторов составных кварковых систем. Это поведение впервые было описано классическими правилами кваркового счета [10] и, например, для пиона с точностью до логарифмических поправок имеет вид

$$F_\pi(Q^2) \sim Q^{-2}. \quad (1)$$

В данной работе мы покажем, что асимптотическая формула (1) может быть получена в рамках мгновенной формы РГД [4] при $Q^2 \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ (M – масса конститuentного кварка), причем данное асимптотическое поведение является универсальным, т.е. не зависит от выбора конкретной модели взаимодействия конститuentных кварков и определяется только релятивистской кинематикой двухкварковой системы.

Указанные предельные переходы отвечают следующему представлению о физике больших передач импульса. При $Q^2 \rightarrow \infty$ кварки становятся свободными, при этом они сбрасывают “непертурбативную шубу” и приобретают исходную (токовую) массу. Для пиона, состоящего из легких кварков, это означает, что $M \rightarrow 0$. Если ввести размерный параметр b , который определяет характерный адронный масштаб (масштаб конфайнмента), то указанные пределы сводятся к неравенствам: $Q^2 \gg b$, $M \ll b$.

В нашем подходе электромагнитный формфактор пиона представляется в виде некоторого функционала, порожденного так называемым свободным двухчастичным формфактором [4]. Этот формфактор описывает электромагнитные свойства системы из двух свободных частиц, т.е. в случае пиона определяет матричный элемент электромагнитного тока системы из двух свободных кварков. Если свободные кварки имеют квантовые числа пиона, то соответствующий матричный элемент имеет вид [4]

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | j_\mu | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} \rangle = A_\mu(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'). \quad (2)$$

В формуле (2) $Q^2 = -(P - P')^2$, $s = P^2$ – квадрат инвариантной массы системы, $J = S = l = 0$, $g_0(s, Q^2, s')$ – свободный двухчастичный формфактор системы невзаимодействующих частиц. Вектор $A_\mu(s, Q^2, s')$ определяется трансформационными свойствами тока (лоренц-ковариантностью и законом сохранения тока) [4]. Явный вид функции $g_0(s, Q^2, s')$ в модели точечных кварков получен в работе [11]:

$$g_0(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)Q^2}{2\sqrt{(s - 4M^2)(s' - 4M^2)}} \frac{\theta(s, Q^2, s')}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} \left(1 + \frac{Q^2}{4M^2}\right)^{-1/2} \times \\ \times \left\{ (s + s' + Q^2) \cos(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{M} \xi(s, Q^2, s') \sin(\omega_1 + \omega_2) \right\}. \quad (3)$$

Здесь $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$, $\xi = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')}$, ω_1 и ω_2 – параметры вигнеровского поворота:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \arctg \frac{\xi(s, Q^2, s')}{M[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})}, \\ \omega_2 &= \arctg \frac{(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'})\xi(s, Q^2, s')}{M(s + s' + Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}) + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)},\end{aligned}\quad (4)$$

$\theta(s, Q^2, s') = \vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2)$, ϑ – ступенчатая функция,

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2}\sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)}.$$

Свободные двухчастичные формфакторы впервые были введены в статье [12] и использовались в работах [13–16] при описании составных систем в модифицированном дисперсионном подходе. Формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ в формуле (2) должен быть интерпретирован как регулярная обобщенная функция, т.е. этот объект определяется линейным непрерывным функционалом на некотором пространстве основных функций [17].

Для того чтобы функционал, задаваемый функцией $g_0(s, Q^2, s')$, определял формфактор пиона, он должен вычисляться на пространстве функций $\varphi(s, s') = \psi(s)\psi(s')$ по следующему правилу [4]:

$$F_\pi(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \psi(s) g_0(s, Q^2, s') \psi(s'), \quad (5)$$

где ψ – нормированные с релятивистской плотностью состояний функции: $\psi(s) = \sqrt[4]{s} u(k)k$, а $u(k)$ – двухкварковые волновые функции S -состояния относительного движения, $s = 4(k^2 + M^2)$.

Таким образом, чтобы установить асимптотическое поведение формфактора пиона, необходимо вычислить при $Q^2 \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ обобщенную функцию $g_0(s, Q^2, s')$, которая на определенном классе функций дает пионный формфактор.

Масса конститuentных кварков M и квадрат переданного импульса Q^2 являются параметрами обобщенной функции $g_0(s, Q^2, s')$. Таким образом, пределы $Q^2 \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow 0$ должны рассматриваться нами в обобщенном смысле, т.е. как пределы соответствующего функционала. Вычисление таких пределов для обобщенной функции $g_0(s, Q^2, s')$ с физической точки зрения оправдано тем, что пион в асимптотической области может быть описан как система свободных кварков с квантовыми числами пиона, а электромагнитные свойства такой системы определяются как раз свободным двухчастичным формфактором $g_0(s, Q^2, s')$.

Для вычисления асимптотического разложения обобщенной функции мы сделаем следующие предположения.

1. Будем считать, что обобщенная функция задана на всем пространстве R^2 . При вычислении функционала (5) это не предполагалось, в (5) переменные s, s' изменяются в физической области $s, s' \geq 4M^2$.

2. В качестве пространства основных функций возьмем обычно используемое пространство $\mathcal{S}(R^2)$, т.е. пространство бесконечно дифференцируемых, убывающих при $|\vec{s}| \rightarrow \infty$ ($\vec{s} = (s, s')$) вместе со всеми производными быстрее любой степени $1/|\vec{s}|$ функций [17], т.е. основные функции убывают не медленнее чем $\exp(-\beta|\vec{s}|^\alpha)$, $\alpha > 0$.

3. Функционал, задающий регулярную обобщенную функцию, определим соотношением

$$\langle \tilde{g}_0(s, Q^2, s') \varphi(s, s') \rangle = \int d\mu(s, s') \tilde{g}_0(s, Q^2, s') \varphi(s, s'), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0(s, Q^2, s') &= 16\vartheta(s - 4M^2)\vartheta(s' - 4M^2)g_0(s, Q^2, s'), \\ d\mu(s, s') &= \sqrt[4]{ss'} d\mu(s) d\mu(s'), \quad d\mu(s) = \frac{1}{4}k d\sqrt{s}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае $\varphi(s, s') = u(k(s))u(k'(s'))$ функционал (6) переходит в выражение (5).

С технической точки зрения вычисление асимптотики обобщенной функции означает вычисление асимптотики при $Q^2 \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ функционала (6).

Для получения асимптотической оценки интеграла в (6) выполним следующие шаги.

1. Приведем интеграл по s' к интегралу по отрезку $[0, 1]$. Для этого воспользуемся тем, что свободный двухчастичный формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ содержит обрезавшие функции

$$\vartheta(s' - s_1(s, Q^2)) - \vartheta(s' - s_2(s, Q^2)).$$

2. Введем монотонно убывающую по s при фиксированном s' и по s' при фиксированном s ($s, s' > 0$) функцию $\tilde{\varphi}(s, s')$ такую, что

$$|\varphi(s, s') - \tilde{\varphi}(s, s')| \rightarrow 0, \quad |\vec{s}| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

3. Определим два безразмерных параметра и предельные переходы будем производить следующим образом: $\eta = Q^2/b^2 \rightarrow \infty$, $\xi = b/2M \rightarrow \infty$.

4. В интеграле по s введем новую переменную y с помощью соотношений $y = E/2M$, $s = 4M^2 + 2ME$ и явно выделим зависимость от параметра η .

5. В подынтегральной функции функционала (6) ограничимся главным членом разложения при $\eta \rightarrow \infty$. Это можно сделать в силу равномерной сходимости интегралов.

В результате для функционала (6) получим следующую оценку при $\eta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_0(s, Q^2, s'), \varphi(s, s') \rangle &\sim \frac{1}{16} \sqrt[4]{\eta} \left(\frac{2M}{b} \right)^{5/2} b^3 \int_0^\infty dy \frac{\sqrt{y}}{(1+y)^{1/4}} \times \\ &\times \int_0^1 dt \frac{\tilde{\varphi}(s, \tilde{s})}{a(t)^{1/4}} \frac{1}{[\sqrt{y}(2t-1) + \sqrt{1+y}]^2} \times \\ &\times \left\{ \left[\sqrt{y}(2t-1) + \sqrt{1+y} \right] \cos(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) + 2\sqrt{y}\sqrt{t(1-t)} \sin(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{\omega}_{1,2}$ – главные члены разложения параметров поворота спинов, содержащихся в $g_0(s, Q^2, s')$ [4],

$$\tilde{s} = \eta b^2 a(t) = \eta b^2 \left(1 + \frac{s - 4M^2}{2M^2} + \frac{1}{2M^2} (2t - 1) \sqrt{s(s - 4M^2)} \right).$$

Для оценки внутреннего интеграла в (9) выделим явно параметр ξ , введенный выше, и оценим поведение этого интеграла при $\xi \rightarrow \infty$. Ограничиваясь главным членом разложения, получим

$$J(\eta, \xi, y) \sim \sqrt{\frac{b}{2\xi}} \frac{1}{\sqrt[4]{s - 4M^2}} \int_0^1 dt \tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t)) f(t, y), \quad (10)$$

$$f(t, y) = \frac{t^{1/4}}{[\sqrt{y}(2t - 1) + \sqrt{1 + y}]^2} \left\{ \sqrt{y}(2t - 1) + \sqrt{1 + y} + 2\sqrt{y}(1 - t) \right\}, \quad (11)$$

где

$$\tilde{s}_0(t) = 4\eta\xi^2(s - 4M^2) \left(1 + \frac{b^2}{2(s - 4M^2)\xi^2} \right) t. \quad (12)$$

При получении формулы (11) мы учли, что при $\xi \rightarrow \infty$

$$\cos(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \sim \sqrt{t}, \quad \sin(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) \sim \sqrt{1 - t}.$$

Покажем, что основной вклад в асимптотическое разложение интеграла (10) дает малая ε -окрестность точки $t = 0$ [18]. Для этого произведем оценку при $\eta, \xi \rightarrow \infty$ интеграла

$$\int_{\varepsilon}^1 dt \tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t)) f(t, y), \quad (13)$$

где ε – малая, но конечная величина. Функция $\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t))$ в силу (12) монотонно убывает по переменной t , поэтому

$$|\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t))| \leq |\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(\varepsilon))|.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^1 dt \tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t)) f(t, y) \right| &\leq \int_{\varepsilon}^1 dt |\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(t))| |f(t, y)| \leq \\ &\leq |\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(\varepsilon))| \int_{\varepsilon}^1 dt |f(t, y)|. \end{aligned} \quad (14)$$

Интеграл в неравенстве (14) сходится для функции $f(t, y)$, определяемой соотношением (11). Функция $|\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0(\varepsilon))|$ в силу (8) убывает быстрее любой обратной степени $\tilde{s}_0(\varepsilon)$, а значит, в силу (12) быстрее любых обратных степеней η и ξ^2 . Таким образом, основной вклад (степенной) в асимптотику интеграла (10) дает малая окрестность точки $t = 0$.

Произведем в ε -окрестности точки $t = 0$ разложение

$$\tilde{\varphi}(s, \tilde{s}_0) \simeq \tilde{\varphi}(s, 0) + 4\eta\xi^2(s - 4M^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{s - 4M^2} \frac{1}{\xi^2}\right) \tilde{\varphi}'_{s'}(s, 0)t.$$

После несложных преобразований можно выписать следующую асимптотическую оценку для интеграла в (10):

$$J(\eta, \xi, y) \sim \sqrt{\frac{b}{2\xi}} \frac{1}{\sqrt[4]{s - 4M^2}} \tilde{\varphi}(s, 0) \frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y}}{(\sqrt{y+1} - \sqrt{y})^2} \times \\ \times \int_0^\varepsilon dt t^{1/4} \exp \left[-4\eta\xi^2(s - 4M^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{s - 4M^2} \frac{1}{\xi^2}\right) \left| \frac{\tilde{\varphi}'_{s'}(s, 0)}{\tilde{\varphi}(s, 0)} \right| t \right]. \quad (15)$$

Абсолютная величина отношения возникла в (15) вследствие монотонности функции $\tilde{\varphi}(s, s')$. Сделаем в оценке (15) замену переменной

$$v = 4\xi^2(s - 4M^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{s - 4M^2} \frac{1}{\xi^2}\right) \left| \frac{\tilde{\varphi}'_{s'}(s, 0)}{\tilde{\varphi}(s, 0)} \right| t.$$

Учтем также, что с точностью до экспоненциально убывающих членов справедлива оценка [18]

$$\int_0^{\varepsilon v} dv v^{1/4} e^{-\eta v} \simeq \int_0^\infty dv v^{1/4} e^{-\eta v} = \frac{1}{\eta^{5/4}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Таким образом, для интеграла (15) получим

$$J(\eta, \xi, y) \sim \sqrt{\frac{b}{2\xi}} \frac{1}{\sqrt[4]{s - 4M^2}} \tilde{\varphi}(s, 0) \frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y}}{(\sqrt{y+1} - \sqrt{y})^2} \times \\ \times \frac{1}{(2\xi)^{5/2}} \left[\frac{\tilde{\varphi}(s, 0)}{|\tilde{\varphi}'_{s'}(s, 0)|} \right]^{5/4} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{(s - 2M^2)^{5/4}} \frac{1}{\eta^{5/4}}.$$

Подставляя эту оценку в (9) и возвращаясь к интегрированию по переменной s , имеем

$$\langle \tilde{g}_0(s, Q^2, s'), \varphi(s, s') \rangle \sim \frac{1}{4} \frac{M^4}{Q^2} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \int d\sqrt{s} \frac{\sqrt[4]{s(s - 4M^2)}}{(s - 2M^2)^{5/4}} \times \\ \times \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - 4M^2}}{(\sqrt{s} - \sqrt{s - 4M^2})^2} \left| \frac{\tilde{\varphi}(s, 0)}{\tilde{\varphi}'_{s'}(s, 0)} \right|^{5/4} \tilde{\varphi}(s, 0). \quad (16)$$

С точностью до предасимптотического множителя (16) можно переписать в виде

$$\langle \tilde{g}_0(s, Q^2, s'), \varphi(s, s') \rangle \sim \left\langle \frac{1}{Q^2} g(s, s'), \varphi(s, s') \right\rangle. \quad (17)$$

В равенстве (17) функция $g(s, s')$ определена соотношением

$$g(s, s') = M^4 \frac{1}{\sqrt[4]{s(s-4M^2)}} \frac{1}{(s-2M^2)^{5/4}} \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4M^2}}{(\sqrt{s} - \sqrt{s-4M^2})^2} \times \\ \times \vartheta(s-4M^2) \delta(\mu(s') - \mu(s)).$$

Итак, мы доказали, что в смысле обобщенных функций имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\tilde{g}_0(s, Q^2, s') \sim \frac{1}{Q^2} g(s, s'), \quad Q^2 \rightarrow \infty, \quad M \rightarrow 0. \quad (18)$$

Отметим, что полученный результат будет справедлив и на более широком, чем $\mathcal{S}(R^2)$, пространстве основных функций. Достаточно потребовать, чтобы основные функции обеспечивали равномерную сходимость интегралов, задающих функционал (6).

Применяя оценку (18) к выражению (5), получим, что асимптотическое поведение не зависит от выбора функций $u(k)$, т.е. от выбора конкретного вида взаимодействия кварков в пионе.

Таким образом, мы получили асимптотику формфактора пиона, которая, во-первых, совпадает с предсказаниями КХД (1), во-вторых, не зависит от модели взаимодействия кварков в пионе и, в-третьих, определяется асимптотикой свободного двухчастичного формфактора как обобщенной функции. Поскольку свободный двухчастичный формфактор вычисляется методами релятивистской кинематики, то найденная асимптотическая оценка является следствием релятивистской кинематики.

Сравним полученный результат с результатами других подходов.

В работе [15] рассматривалось асимптотическое поведение формфакторов нуклона, представленного как связанное состояние пиона и нуклона в P_{11} -канале. Асимптотика электромагнитного формфактора этой системы выражается через асимптотику фазы упругого πN -рассеяния δ_{11} . Эта система содержит, так же как и у нас, два конститuentа, однако эти конститuentы являются реальными частицами со спинами ноль и половина, и поэтому результаты [15] нельзя напрямую сравнивать с нашими результатами. Тем не менее в работе [15] можно выявить некоторое сходство с данной работой. При формальном переходе $m_\pi, m_N \rightarrow 0$ в [15] асимптотика электромагнитного формфактора составной системы, так же как и у нас, перестает зависеть от вида взаимодействия конститuentов, т.е. перестает зависеть от асимптотики фазы пион-нуклонного рассеяния.

В РГД на световом фронте [19] совпадающая с предсказаниями КХД асимптотика пионного формфактора $Q^2 \rightarrow \infty, M \rightarrow 0$ была получена при специальном степенном ограничении на асимптотику волновой функции. В работах [20, 21] наличие асимптотики (1) было обнаружено для волновой функции гауссовского типа.

Принципиальное отличие нашего результата от результатов вышеприведенных работ состоит в том, что полученные в этих работах результаты являются следствием

структуры аргумента волновой функции взаимодействующих кварков и специальных ограничений на асимптотику волновой функции. Представляется, что этот факт трудно интерпретировать с точки зрения асимптотической свободы, следствием которой фактически и является известный результат (1). Получается, что поведение формфактора двухкварковой системы в области $Q^2 \rightarrow \infty$, где кварки становятся свободными, является “памятью” об их взаимодействии.

Результат же, полученный в настоящей работе и совпадающий с (1), является следствием только релятивистской кинематики, которая справедлива при любых энергиях. Отметим, что если, например, пренебречь релятивистским эффектом поворота спина, т.е. приравнять нулю параметры поворота $\omega_{1,2}$ в функции $g_0(s, Q^2, s')$, то асимптотика обобщенной функции в (18) изменится. Это также отличает наш результат от динамики на световом фронте. Как легко может быть показано, аналог релятивистского поворота спина на световом фронте – поворот Меллоша [20] – не влияет на асимптотику формфактора пиона.

Приведем результаты расчетов асимптотики пионного формфактора для двух моделей. В модели гармонического осциллятора [20] имеем

$$u(k) = N_{\text{HO}} \exp\left(\frac{-k^2}{2b^2}\right). \quad (19)$$

В случае волновой функции степенного вида [22, 23] –

$$u(k) = N_{\text{PL}} \left(\frac{k^2}{b^2} + 1\right)^{-n}. \quad (20)$$

Гауссовский вид волновой функции позволяет упростить асимптотическую оценку интегралов, т.к. разрешает применить соответствующие теоремы из работы [18].

На примере расчетов в модели гармонического осциллятора можно продемонстрировать роль релятивизма и, в частности, роль эффекта релятивистского поворота спина. Расчет с учетом поворота спина дает для формфактора пиона оценку

$$F_\pi(Q^2) \sim 32\sqrt{2} \frac{b^2}{Q^2}. \quad (21)$$

Расчет без учета релятивистского поворота спина приводит к другому результату:

$$F_\pi(Q^2) \sim 4\sqrt{2} \frac{M}{Q}. \quad (22)$$

Видно, что релятивистский поворот спина дает существенный вклад в асимптотическое разложение. В случае пренебрежения этим эффектом не получается правильной, т.е. совпадающей с предсказаниями КХД, асимптотики.

Для прояснения роли релятивизма в наших расчетах приведем нерелятивистскую асимптотику, полученную из асимптотической оценки нерелятивистского предела выражения (5) в модели гармонического осциллятора:

$$F_{\pi}(Q^2) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{Q}{2M}} \exp\left(-\frac{Q^2}{8b^2}\right). \quad (23)$$

Таким образом, нерелятивистская асимптотика дает гауссовское убывание формфактора. Как видно из сравнения (21) и (22) с (23), релятивизм существенно изменяет асимптотическое поведение формфактора. Отметим, что в формулах (21)–(23) учтен явный вид нормировочной константы в (19): $N_{\text{НО}} = (4/\sqrt{\pi}b^3)^{1/2}$.

Асимптотика формфактора в модели (20) имеет следующий вид:

$$F_{\pi}(Q^2) \sim 2\frac{b^2}{Q^2}(b^3N_{\text{PL}}^2)\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n^{5/4}}B\left(\frac{5}{4}, n - \frac{5}{4}\right), \quad n > \frac{5}{4}, \quad (24)$$

где $B(x, y)$ – бета-функция Эйлера.

Формула (24) показывает, что асимптотическая в смысле обобщенных функций формула (18) действительно имеет место на более широком, чем $\mathcal{S}(R^2)$, пространстве основных функций.

Отметим, что в асимптотических формулах (21) и (24) отсутствует такой размерный параметр, как масса кварка. Это отвечает физике асимптотически больших передач импульса, т.к. в этой области все масштабы определяются масштабом конфайнмента. В моделях (19) и (20) этот масштаб задается параметром b .

Сформулируем основные выводы работы. В мгновенной форме РГД асимптотика формфактора пиона при $Q^2 \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ совпадает с предсказаниями пертурбативной КХД. Асимптотика определяется только релятивистской кинематикой, в частности релятивистским эффектом поворота спинов, и не зависит от выбора волновой функции кварков в пионе, т.е. от модели взаимодействия кварков.

Авторы выражают благодарность А. И. Кириллову за полезное обсуждение и ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17288).

Список литературы

- [1] *W. N. Polyzou.* Ann. Phys. 1989. V. 193. P. 367.
- [2] *B. D. Keister, W. N. Polyzou.* Adv. Nucl. Phys. 1991. V. 20. P. 225.
- [3] *F. M. Lev.* Riv. Nuovo Cimento. 1993. V. 16. P. 1; Ann. Phys. (N.Y.). 1995. V. 237. P. 355.
- [4] *Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий.* ТМФ. 1995. Т. 103. С. 41.
- [5] *E. V. Balandina, A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* J. Phys. G. 1996. V. 22. P. 1585.
- [6] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* Electroweak properties of light mesons in relativistic Hamiltonian dynamics. hep-ph/9704293.
- [7] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky.* Instant-form approach to two-body systems. hep-ph/9707533.

- [8] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky*. Relativistic effects in two-body systems: π - and K -mesons and deuteron. hep-ph/9707534.
- [9] *N. Isgur, C. H. Llewellyn Smith*. Nucl. Phys. B. 1989. V. 317. P. 526.
- [10] *V. A. Matveev*. Origin of the quark counting laws. In: Proceedings of the International Seminar "Quarks'94". Singapore: World Scientific, 1994. P. 41.
- [11] *A. F. Krutov, V. E. Troitsky*. J. Phys. G. 1993. V. 19. P. L127.
- [12] *В. Е. Троицкий, Ю. М. Широков*. ТМФ. 1969. Т. 1. С. 213.
- [13] *В. П. Кожеевников, В. Е. Троицкий, С. В. Трубников, Ю. М. Широков*. ТМФ. 1972. Т. 10. С. 47.
- [14] *V. I. Kukulin, V. E. Troitsky, Yu. M. Shirokov, S. V. Trubnikov*. Phys. Lett. B. 1972. V. 39. P. 319.
- [15] *A. I. Kirillov, Yu. M. Shirokov, V. E. Troitsky*. Phys. Lett. B. 1972. V. 39. P. 249.
- [16] *А. И. Кириллов, В. Е. Троицкий, С. В. Трубников, Ю. М. Широков*. ЭЧАЯ. 1975. Т. 6. С. 3.
- [17] *В. С. Владимиров*. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [18] *Ф. Олвер*. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
- [19] *М. В. Терентьев*. ЯФ. 1976. Т. 24. С. 207.
- [20] *P. L. Chung, F. Coester, W. N. Polyzou*. Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 545.
- [21] *B. D. Keister*. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 1500.
- [22] *F. Cardarelli, I. M. Grach, I. M. Narodetskii, E. Pace, G. Salmeé, S. Simula*. Phys. Lett. B. 1994. V. 332. P. 1.
- [23] *F. Schlumpf*. Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 6895.

Поступила в редакцию 12.III.1998 г.