Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Дутта, Подход Швингера–Дайсона в теории поля Лиувилля, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 519–530

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:09:30

© 2016 г.

П. Дутта*

ПОДХОД ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА В ТЕОРИИ ПОЛЯ ЛИУВИЛЛЯ

Обсуждается теория поля Лиувилля в рамках подхода Швингера–Дайсона и выводится функциональное уравнение для трехточечной структурной константы. Доказано существование второго уравнения Швингера–Дайсона на основе двойственности между операторами экранирующего заряда и получено второе функциональное уравнение для структурной константы. Система этих двух уравнений используется для однозначного определения значения структурной константы.

Ключевые слова: теория поля Лиувилля, конформная теория поля, трехточечная функция, уравнение Швингера–Дайсона.

DOI: 10.4213/tmf8990

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория поля Лиувилля была предметом интенсивного изучения на протяжении последних трех десятилетий. Оно началось с работы Полякова [1], в которой квантование некритических струн было сведено к двумерной теории поля с экспоненциальным взаимодействием. Эта модель классически интегрируема в соответствии с конформной симметрией, было несколько попыток проквантовать ее [2]–[7]. Однако каноническое квантование, основанное на классической интегрируемости, имеет очень сложное доказательство и не помогает выработать полные двух- и трехточечную корреляционные функции.

В 90-е годы Дорн и Отто [8] и братья Замолодчиковы [9] независимо друг от друга предложили точное выражение для трехточечной функции и представили проверку его корректности. Точное выражение было построено по вычетам корреляционной функции в некоторых дискретных точках, где подсчет вычетов возможен с помощью континуального интегрирования [10] и техники Доценко–Фатеева [11]. Так как продолжение с дискретных значений не является однозначным, полученный результат был назван гипотезой Дорна–Отто–Замолодчикова–Замолодчикова (ДОЗЗ).

Работа поддержана Erasmus Mundus Joint Doctorate Program (грант № 2010-1816), финансируемой EACEA of the European Commission, а также стипендией IMPRS.

*Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam, Germany.
E-mail: parikshitdutta@yahoo.co.in

Однако вскоре после этого Тешнер [12] предложил вывод формулы ДОЗЗ при помощи вырожденных вертексных операторов. Интригующий момент состоит в том, что формула ДОЗЗ имеет двойственное множество полюсов, которые не видны в континуальном интеграле. Позже в работах [13] было выдвинуто предположение о том, что двойственное множество полюсов связано с присутствием экстраэкспоненциального потенциала, который вводится в перенормированном действии. В работах [13] было также заявлено, что структура двойственных полюсов определяет трехточечную функцию однозначным образом. Однако никаких точных аргументов в пользу присутствия экстраэкспоненциального члена дано не было. Гипотеза ДОЗЗ прошла много строгих проверок (см. [14]–[17]), и формула представляется верной, однако двойственность до сих пор не вполне понятна. Наша цель состоит в том, чтобы исследовать двойственность более подробно.

В предыдущей работе [18] мы проверили уравнение де Витта для теории поля Лиувилля. Интересно заметить, что подход типа Швингера–Дайсона обеспечивает такое же соотношение для трехточечной функции, как то, которое было использовано в работах [8] для проверки гипотезы. В настоящей работе мы используем этот подход для анализа двойственности теории.

Мы начинаем с формулировки теории поля Лиувилля на языке континуального интеграла и представляем ключевые опорные точки этого подхода. Затем мы выводим уравнение Швингера–Дайсона, которое позволяет анализировать вычеты корреляционных функций и приводит к функциональному уравнению для структурной константы. После этого мы вводим двойственное уравнение Швингера–Дайсона с другим оператором экранирующего заряда и получаем дополнительные вычеты и второе функциональное уравнение для структурной константы. В заключение мы представляем формальный вывод двух функциональных уравнений, начиная с затравочного действия.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Теория поля Лиувилля описывается действием

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} (g^{kl} \partial_k \phi \partial_l \phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}), \quad (1)$$

где ϕ – поле Лиувилля, R – скалярная кривизна фоновой метрики g_{kl} , μ и b – константы, $Q = b + 1/b$.

Из статистической суммы

$$Z[J] = \int [D\phi] \exp \left[-S[\phi] + \int d^2x \sqrt{g(x)} J(x) \phi(x) \right] \quad (2)$$

для источника типа дельта-функции

$$J(x) = \sum_i^n \frac{2\alpha_i}{\sqrt{g(x)}} \delta^2(x - x_i) \quad (3)$$

получаются корреляционные функции для теории поля Лиувилля

$$Z \left[\sum_i^n \frac{2\alpha_i}{\sqrt{g(x)}} \delta^2(x - x_i) \right] = \int [D\phi] e^{-S[\phi]} \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \equiv \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle. \quad (4)$$

Экспонента от поля Лиувилля $e^{2\alpha\phi(x)}$ – это основное поле с конформным весом

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha), \quad (5)$$

и трехточечная корреляционная функция имеет стандартную для конформной теории поля форму:

$$\langle e^{2\alpha_1\phi(x_1)} e^{2\alpha_2\phi(x_2)} e^{2\alpha_3\phi(x_3)} \rangle = |x_{12}|^{2\gamma_3} |x_{23}|^{2\gamma_1} |x_{31}|^{2\gamma_2} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (6)$$

где $\gamma_1 = \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3}$, $\gamma_2 = \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1}$, $\gamma_3 = \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2}$, а x_{ij} , $ij = 12, 23, 31$, – это расстояния между точками x_i и x_j . Ниже мы предполагаем, что поле Лиувилля дано на сфере.

Оператор Лапласа–Бельтрами на сфере имеет всего одну нулевую форму, а именно постоянную функцию ϕ_0 . С помощью разложения поля Лиувилля $\phi(x)$ на нулевую форму и ее ортогональное дополнение $\phi(x) = \phi_0 + \tilde{\phi}(x)$ и с учетом равенства $\int d^2x \sqrt{g} \tilde{\phi} = 0$ получаем

$$\int d^2x \sqrt{g} R \phi = 8\pi \phi_0.$$

Интегрирование по нулевой моде ϕ_0 в (4), заданное как

$$\int d\phi_0 \exp[2(\tilde{\alpha} - Q)\phi_0 - U[\tilde{\phi}]e^{2b\phi_0}] = \Gamma\left(\frac{\tilde{\alpha} - Q}{b}\right) \frac{1}{2b} U[\tilde{\phi}]^{(Q-\tilde{\alpha})/b}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{\alpha} \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad U_b[\tilde{\phi}] \equiv \mu \int d^2x \sqrt{g(x)} e^{2b\tilde{\phi}(x)}, \quad (8)$$

дает [10]

$$\left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i\phi(x_i)} \right\rangle = \Gamma\left(\frac{\tilde{\alpha} - Q}{b}\right) \frac{1}{2b} \int [D\tilde{\phi}] e^{-S_0[\tilde{\phi}]} \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i\tilde{\phi}(x_i)} (U_b[\tilde{\phi}])^{(Q-\tilde{\alpha})/b}, \quad (9)$$

где $S_0[\tilde{\phi}]$ – действие свободного поля

$$S_0[\tilde{\phi}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g} g^{kl} \partial_k \tilde{\phi} \partial_l \tilde{\phi}. \quad (10)$$

Если $(Q - \tilde{\alpha}) = mb$, при положительном целом m можно выполнить континуальное интегрирование свободного поля в (9) и свести это вычисление к интегралам Доценко–Фатеева [11], которые для $n = 3$ дают

$$\begin{aligned} \int [D\tilde{\phi}] e^{-S_0[\tilde{\phi}]} \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i\tilde{\phi}(x_i)} (U_b[\tilde{\phi}])^m &= \\ &= |x_{12}|^{2\gamma_3} |x_{23}|^{2\gamma_1} |x_{31}|^{2\gamma_2} (-1)^m m! I_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{aligned} \quad (11)$$

где γ_i , $i = 1, 2, 3$, такие же, как в (6), и

$$I_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{-\pi\mu}{\gamma(-b^2)} \right)^m \frac{\prod_{j=1}^m \gamma(-jb^2)}{\prod_{k=0}^{m-1} [\gamma(2\alpha_1 b + kb^2) \gamma(2\alpha_2 b + kb^2) \gamma(2\alpha_3 b + kb^2)]}, \quad (12)$$

где $\gamma(u) = \Gamma(u)/\Gamma(1-u)$. Из-за наличия полюсов гамма-функции в (9) при $(Q-\tilde{\alpha}) = mb$ уравнение (12) определяет вычеты структурных констант $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Используя форму вычетов, авторы [8] и [9] смогли построить $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в качестве мероморфной функции:

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}]^{(Q-\tilde{\alpha})/b} \times \frac{\Upsilon'(0)\Upsilon(2\alpha_1)\Upsilon(2\alpha_2)\Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)\Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}, \quad (13)$$

где $\Upsilon(x)$ получается из интегрального представления

$$\Upsilon(x) = \exp \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{(t/2) \operatorname{sh}^2(Q/2 - x)}{\operatorname{sh}(bt/2) \operatorname{sh}(t/2b)} \right) \right]. \quad (14)$$

Поскольку такой вид аналитического продолжения в общем случае не единствен, было предпринято несколько других попыток проверить правильность соотношения (13).

Наша цель заключается в том, чтобы с помощью уравнения Швингера–Дайсона найти несколько новых функциональных соотношений между корреляционными функциями, которые могут задавать структурную константу $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ альтернативным образом.

3. ПЕРВОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Инвариантность меры континуального интегрирования относительно сдвигов

$$\int [D\phi] \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \exp \left[-S[\phi] + \int d^2x \sqrt{g(x)} J(x)\phi(x) \right] = 0 \quad (15)$$

приводит к уравнению типа Швингера–Дайсона

$$J(x)Z[J] - \left\langle \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right\rangle = 0, \quad (16)$$

которое для теории поля Лиувилля принимает форму

$$J(x)Z[J] = -\frac{1}{2\pi} \Delta \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} + \frac{1}{4\pi} QR(x)Z[J] + 2\mu b Z[J_{x,b}], \quad (17)$$

где $\Delta = (1/\sqrt{g}) \partial_a g^{ab} \sqrt{g} \partial_b$ – оператор Лапласа–Бельтрами и

$$J(y)_{x,b} = J(y) + 2b \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta^2(y-x). \quad (18)$$

Интегрирование уравнения (17) дает следующее функциональное соотношение для функции разбиения:

$$\int d^2x \sqrt{g(x)} \left(J(x) - \frac{1}{4\pi} QR(x) \right) Z[J] = 2\mu b \int d^2x \sqrt{g(x)} Z[J_{x,b}]. \quad (19)$$

Заметим, что это уравнение просто получается из соотношения

$$\int [D\phi] \frac{\delta}{\delta\phi_0} \exp \left[-S[\phi] + \int d^2x \sqrt{g(x)} J(x) \phi(x) \right] = 0, \quad (20)$$

которое представляет собой условие инвариантности меры относительно сдвигов только по отношению к нулевой моде.

Включая источник дельта-функционального типа (3) в (19) и интегрируя член кривизны, аналогично тому, как это делалось выше, мы находим

$$(\tilde{\alpha} - Q) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu b \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle. \quad (21)$$

Из этого уравнения можно получить рекуррентные соотношения между корреляционными функциями в интегральной форме. Заменяя n на $n+1$ в (21) и приравнявая одну из констант α_i к b , мы получаем

$$(\tilde{\alpha} + b - Q) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle = \mu b \int d^2y \sqrt{g(y)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} e^{2b\phi(y)} \right\rangle, \quad (22)$$

что вместе с (21) дает

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha} - Q)(\tilde{\alpha} + b - Q) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle &= \\ &= (\mu b)^2 \int d^2x \sqrt{g(x)} \int d^2y \sqrt{g(y)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} e^{2b\phi(y)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Повторяя эту процедуру m раз, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^m (\tilde{\alpha} + jb - Q) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle &= \\ &= (b\mu)^{m+1} \int \dots \int d^2y_j \sqrt{g(y_j)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^m e^{2b\phi(y_j)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Из этого уравнения следует, что n -точечные функции имеют особенности в $\tilde{\alpha} = Q - mb$, что также может быть получено путем интегрирования соотношения (9) по нулевой моде. Из (21) мы также можем сделать вывод, что включение оператора экранирующего заряда

$$U_b = \mu \int d^2x \sqrt{g(x)} e^{2b\phi(x)} \quad (25)$$

добавляет к коррелятору постоянный коэффициент $\tilde{\alpha}$. Заметим, что конформная размерность оператора (25) равняется нулю, и это включение не меняет конформных свойств корреляционных функций.

Рассмотрим уравнение (24) для $n = 3$, а также то же самое уравнение, но с заменой m на $m - 1$. Отношение соответствующих выражений влечет

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha} - Q + mb) \int \cdots \int d^2 y_j \sqrt{g(y_j)} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^{m-1} e^{2b\phi(y_j)} \right\rangle = \\ = \mu b \int \cdots \int d^2 y_j \sqrt{g(y_j)} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^m e^{2b\phi(y_j)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (26)$$

и, снова используя (24), мы находим

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle \prod_{j=0}^m (\tilde{\alpha} + jb - Q) = \\ = (b\mu)^m (\tilde{\alpha} - Q + mb) \int \cdots \int d^2 y_j \sqrt{g(y_j)} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^{m-1} e^{2b\phi(y_j)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Так же, как в (7), интегрирование по нулевой моде в правой части уравнения дает

$$\begin{aligned} \int \cdots \int d^2 y_j \sqrt{g(y_j)} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^{m-1} e^{2b\phi(y_j)} \right\rangle = \Gamma\left(\frac{\tilde{\alpha} + mb - Q}{b}\right) \frac{1}{2b} \int [D\tilde{\phi}] e^{-S_0(\tilde{\phi})} \times \\ \times \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \tilde{\phi}(x_i)} \left(\int d^2 y \sqrt{g(y)} e^{2b\tilde{\phi}(y)} \right)^m \left(\mu \int d^2 x \sqrt{g(x)} e^{2b\tilde{\phi}(x)} \right)^{(Q - \tilde{\alpha} - mb)/b}. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь введем параметр $\epsilon = \tilde{\alpha} - Q + mb$ и устремим его к нулю. Левая и правая части (27) имеют одинаковые члены, зависящие от координат, определенные в (6) и в (11) соответственно. Сокращая их, мы находим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\prod_{j=0}^m (\epsilon - jb) C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \right] = \frac{1}{2} b^m (m!) (-1)^m I_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (29)$$

что упрощается до

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)] = \frac{1}{2} I_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (30)$$

Проведя замену параметров $\alpha_1 \mapsto \alpha_1 + b$ и $m \mapsto m - 1$, получаем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)] = \frac{1}{2} I_{m-1}(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3) \quad (31)$$

и, поделив (31) на (30), имеем следующее уравнение:

$$\frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{I_{m-1}(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{I_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}. \quad (32)$$

С помощью (12) явная форма уравнения (32) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{C(\alpha_1 + b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \\ = - \frac{\gamma(-b^2) \gamma(b(2\alpha_1 + b)) \gamma(2b\alpha_1) \gamma(b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - b))}{\mu \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)) \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)) \gamma(b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2))}. \end{aligned} \quad (33)$$

Хотя это функциональное уравнение для структурной константы было получено ограничением $\tilde{\alpha} = Q - mb$, оно является пределом применения этой процедуры. Однако Тешнером было показано [12], что уравнение (33) выполняется для всего множества параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Мы надеемся, что это можно сделать независимо, выражая отношения структурных констант через функциональные интегралы и выполняя некоторые переопределения поля. Мы продолжаем работать над явным доказательством этого факта. В следующем разделе мы представим аргументы, наводящие на мысль, что истинность этого уравнения, полученного нашим методом, может быть доказана для всего пространства параметров при некоторых предположениях.

4. ВТОРОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение для единичного конформного веса

$$\alpha(Q - \alpha) = 1 \quad (34)$$

имеет два решения: $\alpha = b$ и $\alpha = 1/b$. Следовательно, оператор

$$U_{1/b} = \tilde{\mu} \int d^2x \sqrt{g(x)} e^{(2/b)\phi(x)} \quad (35)$$

с постоянным $\tilde{\mu}$, так же, как оператор (25), имеет нулевой конформный вес. Включение оператора экранирующего заряда (35) не меняет конформных свойств корреляционных функций, и мы используем это свойство, чтобы предложить второе уравнение для структурной константы.

Если мы начинаем с соотношения, аналогичного (21)¹⁾,

$$(\tilde{\alpha} - Q) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \frac{\tilde{\mu}}{b} \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{(2/b)\phi(x)} \right\rangle \quad (36)$$

и следуем алгоритму, описанному выше, мы получаем похожее на (24) уравнение

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^m \left(\tilde{\alpha} + \frac{j}{b} - Q \right) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \\ = \int \cdots \int d^2y_j \sqrt{g(y_j)} \left(\frac{\tilde{\mu}}{b} \right)^{m+1} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \prod_{j=0}^m e^{(2/b)\phi(y_j)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Второе функциональное уравнение, полученное при $\tilde{\alpha} = Q - m/b$, принимает вид, подобный (32):

$$\frac{C(\alpha_1 + 1/b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \frac{\tilde{I}_{m-1}(\alpha_1 + 1/b, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{I}_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}, \quad (38)$$

где $\tilde{I}_m$ также определяется через представление кулоновского газа для свободного поля:

$$\begin{aligned} \int [D\tilde{\phi}] e^{-S_0[\tilde{\phi}]} \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} (U_{1/b}[\tilde{\phi}])^m = \\ = |x_{12}|^{2\gamma_3} |x_{23}|^{2\gamma_1} |x_{31}|^{2\gamma_2} (-1)^m m! \tilde{I}_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned} \quad (39)$$

¹⁾ Обсуждение этого соотношения см. в разделе 5.

Таким образом, $\tilde{I}_m$ получается из (12) заменами $b \mapsto 1/b$, $\mu \mapsto \tilde{\mu}$. Уравнение (38) принимает вид

$$\frac{C(\alpha_1 + 1/b, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{\gamma(-b^{-2}) \gamma((2\alpha_1 + 1/b)/b) \gamma(2\alpha_1/b) \gamma((\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - 1/b)/b)}{\tilde{\mu} \gamma((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)/b) \gamma((\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)/b) \gamma((\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)/b)}. \quad (40)$$

Заметим, что уравнения (33) и (40) были получены в нашем алгоритме при $\tilde{\alpha} = Q - mb$ и $\tilde{\alpha} = Q - m/b$ соответственно. В то время как уравнение (33) было получено в работе [12] без каких-либо ограничений на параметры, уравнение (40) было предсказано исходя из дуальности между вырожденными полями. Это связано с тем, что определенные представления кулоновского газа, которые появляются при подсчете с использованием кросс-симметрии, не удовлетворяют кулоновскому газовому ограничению и не могут быть подсчитаны в принципе. Это было также замечено в работе [16]. Следовательно, второе функциональное уравнение в [12] примерное и выводится не однозначно. В нашем случае мы выводим эти уравнения над пространством параметров с ограничением, предполагая существование двойственного уравнения для экранирующего заряда (важного для нахождения фактического кулоновского интеграла). Заметим, что уравнения (33) и (40) являются двумя функциональными уравнениями, выполняющимися на бесконечном множестве гиперплоскостей в трехмерном комплексном пространстве, определенных уравнениями $\tilde{\alpha} = Q - mb$ и $\tilde{\alpha} = Q - n/b$, $m, n \geq 0$. Теперь полные функциональные уравнения (33) и (40) могут иметь только две функции $f_1(\tilde{\alpha} - Q)$ и $f_2(\tilde{\alpha} - Q)$ в качестве множителей в правых частях уравнений (33) и (40). Необходимо заметить, что если у трехточечной функции, т. е. при $\tilde{\alpha} - Q = c$ для некоторого ненулевого c , есть хотя бы один изолированный простой полюс, то при приравнении одной из констант α_i к нулю и сохранении $\alpha_1 + \alpha_2 = c$, с использованием одного из двух уравнений (33) или (40), становится ясно, что при взятии предела в предположении, что гладкий предел существует, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_3 \rightarrow 0, \tilde{\alpha} - Q = c} (\tilde{\alpha} - Q) \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle &= \\ &= \lim_{\alpha_3 \rightarrow 0, \tilde{\alpha} - Q = c} \mu b \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^3 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow c \left\langle \prod_{i=1}^2 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu b \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^2 e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Так как для первого из выписанных уравнений левая и правая части сингулярны (простой полюс в $\tilde{\alpha} - Q = c$), после взятия предела (так как $\tilde{\alpha} - Q$ остается постоянным и только α_3 приравнивается к нулю, можно считать, что мы берем гладкий предел) мы снова получаем сингулярные левую и правую части, так как $c \neq 0$. Это означает, что есть двухточечная функция или некоторое свойство с $\alpha_1 = \alpha_2 = c/2$ с бесконечным скалярным произведением. Так, конечно, не может быть. Следовательно, можно без каких-либо опасений предполагать, что трехточечная функция имеет

полюсы только в точках пространства параметров $\tilde{\alpha} - Q = -bn - m/b$, т. е. только в целых значениях экранирующего заряда (максимальная аналитичность). При этом дополнительном условии трехточечной функцией для теории Лиувилля может быть только формула ДОЗЗ (известная часть строится по вычетам из требования максимальной аналитичности, т. е. без каких-либо иных простых полюсов, кроме полюсов, описанных выше), умноженная на периодическую функцию $g(\tilde{\alpha} - Q)$ такую, что $g(-mb - n/b) = 1$ для целых неотрицательных m, n . Хорошо известно, что для иррационального b эта функция должна быть постоянной. С другой стороны, функции f_1, f_2 тогда равны $g(\tilde{\alpha} + b - Q)/g(\tilde{\alpha} - Q)$ и $g(\tilde{\alpha} + 1/b - Q)/g(\tilde{\alpha} - Q)$ соответственно, так как формула ДОЗЗ (или, что эквивалентно, вычеты) удовлетворяет оставшейся части. Как уже было замечено, для иррационального b эти функции также постоянны, а следовательно, разностные уравнения (33) и (40) могут быть аналитически продолжены на все пространство параметров. Эти два уравнения приводят к формуле ДОЗЗ (13) единственным образом [12].

На самом деле из свойств Υ -функции (14)

$$\Upsilon(x+b) = \gamma(bx)b^{1-2bx}\Upsilon(x), \quad \Upsilon\left(x + \frac{1}{b}\right) = \gamma\left(\frac{x}{b}\right)b^{2x/b-1}\Upsilon(x) \quad (42)$$

следует, что $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, определенные в (13), удовлетворяют и (33), и (40), если двойственные космологические константы связаны соотношением

$$\tilde{\mu} = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{b^{-2}}}{\pi\gamma(b^{-2})}. \quad (43)$$

Пусть $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – другое решение тех же уравнений для иррационального b . Отношение D/C тогда будет функцией с двумя непропорциональными периодами. Хорошо известно, что такая функция постоянна, а значит, $D = C$.

В следующем разделе мы обсудим аргументы, приводящие к отношению (36), а также проанализируем относительные масштабные свойства $\tilde{\mu}$ и μ , полученные напрямую из континуального интеграла, который оказывается согласованным с (43).

5. ИСТОЧНИК ВТОРОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (9), где $\tilde{\alpha} = Q - mb - 1/b$. В этом случае мы не можем вычислить интеграл свободного поля вдоль пути в правой части (9), так как $U_b[\tilde{\phi}]$ имеет нецелую степень. Целая степень $U_b[\tilde{\phi}]$ получается включением второго оператора экранирующего заряда, что формально дает

$$\int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{(2/b)\phi(x)} \right\rangle = \Gamma(-m) \frac{1}{2b} \int D[\tilde{\phi}] e^{-S_0[\tilde{\phi}]} \times \\ \times \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \tilde{\phi}(x_i)} \left(\int d^2y \sqrt{g(y)} e^{(2/b)\tilde{\phi}(y)} \right) \left(\mu \int d^2x \sqrt{g(x)} e^{2b\tilde{\phi}(x)} \right)^m, \quad (44)$$

где аргумент гамма-функции – отрицательное целое число, а континуальный интеграл по свободным полям дает лишь вычет коррелятора. Этот трюк наводит на мысль, что коррелятор имеет полюсы не только в $Q - \tilde{\alpha} = mb$, но и в $Q - \tilde{\alpha} = m/b$.

Исследуем соотношение (36) между

$$\int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{(2/b)\phi(x)} \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle,$$

которое было выдвинуто в разделе 4.

Уравнение Швингера–Дайсона, полученное из затравочного действия теории поля Лиувилля, так же как и (19), дает

$$(\tilde{\alpha} - Q_B) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu_B b \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle, \quad (45)$$

где индекс В обозначает затравочные параметры. Заметим, что $Q_B = 1/b$ и классическая конформная размерность $e^{2\alpha\phi(x)}$ равна αQ_B . Таким образом, в классическом случае есть только один экранирующий заряд, определенный в (25). Заменяя затравочное уравнение Швингера–Дайсона перенормированным, мы получаем

$$(\tilde{\alpha} - Q_R) \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu_R b \beta \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\beta\phi(x)} \right\rangle \quad (46)$$

с перенормированными параметрами Q_R , μ_R и β .

Принимая во внимание, что обе части уравнения (46) должны иметь одинаковые свойства относительно конформных преобразований, получаем следующее условие на перенормированные параметры [19]:

$$1 - Q_R \beta b + \beta^2 b^2 = 0. \quad (47)$$

Из уравнения следует, что имеются две возможности выбора параметра β : $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1/b^2$, которые дают один и тот же фоновый заряд $Q_R = b + 1/b$. Они соответствуют двум экспоненциальным операторам с единичным конформным весом. Затем из (46) мы получаем два возможных уравнения Швингера–Дайсона:

$$[\tilde{\alpha} - Q_R] \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu_1 b \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{2b\phi(x)} \right\rangle, \quad (48)$$

$$[\tilde{\alpha} - Q_R] \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} \right\rangle = \mu_2 \frac{1}{b} \int d^2x \sqrt{g(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n e^{2\alpha_i \phi(x_i)} e^{(2/b)\phi(x)} \right\rangle. \quad (49)$$

Первое уравнение совпадает с (19) при $\mu_1 = \mu$, а второе – с (36) при $\mu_2 = \tilde{\mu}$. Эти космологические константы перенормируются в соответствии с выбором β . Чтобы проанализировать масштабные свойства космологических констант, мы рассматриваем экспоненциальное взаимодействие $\mu_B e^{2\alpha\phi(x)}$ с регуляризацией $\mu_B e^{(2\alpha\phi(x) - 2\alpha^2 G(x,x))}$, где $G(x, x)$ – двухточечная функция Грина в совпадающих точках. Введя регулятор Λ для $G(x, x)$ с помощью соотношения

$$G(x, x) \sim \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Lambda^2}{\mu_B} \right]$$

и переопределив $\mu_B \rightarrow \Lambda^2 \mu_0$ с безразмерным параметром μ_0 , мы можем записать регуляризованную экспоненту в виде $\mu_0^{1+\alpha^2} \Lambda^2 e^{2\alpha\phi(x)}$. Теперь для $\alpha = b$ безразмерным масштабным параметром является $\mu_0^{1+b^2} \sim \mu$, в то время как для $\alpha = 1/b$ масштабный параметр – $\mu_0^{1+1/b^2} \sim \tilde{\mu}$.

Из этих соотношений следует $\tilde{\mu} \sim \mu^{1/b^2}$, что согласуется с (43).

Согласно Зибергу [20] вертексный оператор $e^{2\alpha\phi}$ с $2\operatorname{Re}\alpha > Q$ не может быть определен в теории поля Лиувилля. Следовательно, для данной константы b либо $e^{2b\phi(x)}$, либо $e^{(2/b)\phi(x)}$ нарушает границу Зиберга. К примеру, если $0 < b < 1$, граница Зиберга нарушается из-за оператора $e^{(2/b)\phi(x)}$, а если $b > 1$ – из-за $e^{2b\phi(x)}$. При $b = 1$ оба оператора экранирующего заряда, как и уравнения (48) и (49), согласуются. Таким образом, для данного b есть ровно один оператор экранирующего заряда.

Важно заметить, что уравнение Швингера–Дайсона получается из принципа действия Швингера [21] и интеграл вдоль пути является решением уравнения. Если рассматривать затравочное уравнение Швингера–Дайсона как фундаментальное уравнение для теории поля Лиувилля, его регуляризация дает два уравнения (48) и (49). Хотя левые части обоих уравнений представляют собой одну и ту же корреляционную функцию, два оператора экранирующего заряда в правых частях отличаются и только один из них удовлетворяет границе Зиберга для данного значения b . Вне зависимости от этого уравнения выполняются вместе, если понимать их как функциональные отношения между аналитически продолженными величинами ожидания.

Эти отношения наводят на мысль использовать двойную гамма-функцию Барнса для структурных констант.

В дальнейшем мы намерены изучить рассмотренные объекты с точки зрения, предложенной в работе [22]. А именно, использовать операторные уравнения движения для поля Лиувилля в присутствии двух экранирующих зарядов и показать, как эти заряды определяют двойственную структуру полюсов. Мы надеемся, что подход Швингера–Дайсона, обсуждавшийся в настоящей статье, может быть расширен и на теорию поля Лиувилля, в частности на теорию Тоды и другие смежные модели Весса–Зумино–Виттена.

Благодарности. Автор благодарен Г. Джорджадзе за сотрудничество на начальном этапе работы, а также Х. Дорну, С. Фреденхагену и Х. Николаи за полезные дискуссии и комментарии.

Список литературы

- [1] A. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [2] T. Curtright, C. Thorn, *Phys. Rev. Lett.*, **48**:19 (1982), 1309–1313; E. Braaten, T. Curtright, C. Thorn, *Phys. Lett. B*, **118**:1–3 (1982), 115–120; *Ann. Phys.*, **147**:2 (1983), 365–416.
- [3] J. L. Gervais, A. Neveu, *Nucl. Phys. B*, **199**:1 (1982), 59–76; **209**:1 (1982), 125–145; **238**:1 (1984), 125–141.
- [4] E. D’Hoker, R. Jackiw, *Phys. Rev. D*, **26**:12 (1982), 3517–3542.
- [5] H. J. Otto, G. Weigt, *Phys. Lett. B*, **159**:4–6 (1985), 341–344; *Z. Phys. C*, **31**:2 (1986), 219–228.
- [6] Y. Kazama, H. Nicolai, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:5 (1994), 667–710, arXiv: hep-th/9305023.

- [7] G. Jorjadze, G. Weigt, *Nucl. Phys. B*, **619** (2001), 232; arXiv: hep-th/0105306.
- [8] H. Dorn, H.-J. Otto, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 39–43, arXiv: hep-th/9206053; *Nucl. Phys. B*, **429**:2 (1994), 375–388, arXiv: hep-th/9403141.
- [9] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605, arXiv: hep-th/9506136.
- [10] M. Goulian, M. Li, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:16 (1991), 2051–2055.
- [11] Vl. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348; **251**:5–6 (1985), 691–734.
- [12] J. Teschner, *Phys. Lett. B*, **363**:1–2 (1995), 65–70, arXiv: hep-th/9507109.
- [13] L. O’Raifeartaigh, J. M. Pawłowski, V. V. Sreedhar, *Ann. Phys.*, **277**:1 (1999), 117–143, arXiv: hep-th/9811090; *Phys. Lett. B*, **481**:2–4 (2000), 436–444, arXiv: hep-th/0003247.
- [14] J. Teschner, *Class. Quant. Grav.*, **18**:23 (2001), R153–R222, arXiv: hep-th/0104158.
- [15] J. Teschner, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:supp02 (2004), 436–458, arXiv: hep-th/0303150.
- [16] Y. Nakayama, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:17–18 (2004), 2771–2930, arXiv: hep-th/0402009.
- [17] G. Jorjadze, G. Weigt, *Phys. Lett. B*, **581**:1–2 (2004), 133–140, arXiv: hep-th/0311202.
- [18] P. Dutta, K. A. Meissner, H. Nicolai, *Phys. Rev. D*, **87**:10 (2013), 105019, 11 pp., arXiv: 1303.3497.
- [19] E. D’Hoker, P. S. Kurzepa, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:18 (1990), 1411–1421.
- [20] N. Seiberg, “Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity”, *Common Trends in Mathematics and Quantum Field Theories* (Kyoto, Japan, May 10–16, 1990), Progress of Theoretical Physics Supplements, **102**, eds. T. Eguchi, T. Inami, T. Miwa, Yukawa Institute for Theoretical Physics, Tokyo, 1990, 319–349.
- [21] K. Fujikawa, H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, The International Series of Monographs on Physics, **122**, Oxford Sci. Publi., Oxford, 2013.
- [22] J. Schnittger, *TMΦ*, **104**:1 (1995), 158–191, arXiv: hep-th/9412176.

Поступила в редакцию 15.06.2015