Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Мотовилов, Альтернативное доказательство априорной $tg \Theta$ -теоремы, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 1, 101–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:46:47

© 2016 г.

А. К. Мотовилов*

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АПРИОРНОЙ $\operatorname{tg} \Theta$ -ТЕОРЕМЫ

Пусть A – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Предположим, что спектр A состоит из двух изолированных компонент σ_0 и σ_1 , причем множество σ_0 лежит в конечной лакуне множества σ_1 . Известно, что если V – ограниченное аддитивное самосопряженное возмущение A , внедиагональное по отношению к разбиению $\operatorname{spec}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, то при $\|V\| < \sqrt{2}d$, где $d = \operatorname{dist}(\sigma_0, \sigma_1)$, спектр возмущенного оператора $L = A + V$ состоит из двух изолированных частей ω_0 и ω_1 , представляющих собой результат возмущения спектральных множеств σ_0 и σ_1 соответственно. Более того, для разности спектральных проекторов $E_A(\sigma_0)$ и $E_L(\omega_0)$, отвечающих спектральным множествам σ_0 и ω_0 операторов A и L , имеет место точная оценка $\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\| \leq \sin(\arctg \frac{\|V\|}{d})$. В настоящей работе мы даем новое доказательство этой оценки для случая, когда $\|V\| < d$.

Ключевые слова: задача возмущений спектральных подпространств, операторное уравнение Риккати, $\operatorname{tg} \Theta$ -теорема.

DOI: 10.4213/tmf8993

Посвящается памяти Станислава Петровича Меркурьева

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из фундаментальных задач теории возмущений линейных операторов является исследование изменения инвариантного и, в частности, спектрального подпространства такого оператора под действием аддитивного возмущения (см., например, [1]–[3]). В теории возмущений самосопряженных операторов классические тригонометрические оценки для поворота спектральных подпространств были установлены Дэвисом и Каханом [2]. Ознакомиться с историей предмета и найти обзоры

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG). Работа поддержана также Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.38.241.2015).

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: motovilv@theor.jinr.ru

других известных оценок изменения спектральных подпространств в самосопряженной задаче возмущений можно, например, в работах [4]–[6].

Интерес автора к теории возмущений инвариантных подпространств возник благодаря серии работ, выполненных при самом непосредственном участии С. П. Меркурьева и посвященных построению трехчастичных гамильтонианов с парными взаимодействиями, зависящими от двухчастичных энергий (см., например, статьи [7], [8] и приведенную там литературу). Попытки [9], [10] ответить на вопрос [11] о возможности замены в двухчастичном уравнении Шредингера парного зависящего от энергии потенциала спектрально-эквивалентным (т. е. сохраняющим спектр и собственные функции) не зависящим от энергии потенциалом привели к необходимости исследовать разрешимость некоторого операторного уравнения Риккати. В сущности, упомянутый вопрос об эквивалентной замене зависящего от энергии потенциала на потенциал, от энергии не зависящий, связан с более общим вопросом о факторизации операторнозначных функций комплексной переменной и о существовании операторных корней у таких функций (см. [12]–[14]). Оператор Шредингера с потенциалом, зависящим от энергии резольвентным образом, представляет собой пример операторнозначной функции, построение операторных корней для которой с неизбежностью связано с поиском граф-представлений для инвариантных подпространств некоторой блочно-операторной (2×2) -матрицы (см. [9], [12], [14]–[16]). В свою очередь, вопрос о существовании граф-представлений приводит к изучению взаимной геометрии возмущенных и невозмущенных инвариантных подпространств и, в частности, к исследованию спектральных свойств операторных углов между этими подпространствами (см. [17] и цитируемую там литературу).

В настоящей работе мы рассматриваем частный случай самосопряженной задачи о возмущениях спектральных подпространств. А именно, мы предполагаем, что спектр $\text{spes}(A)$ исходного самосопряженного оператора A , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, состоит из двух непересекающихся частей σ_0 и σ_1 таких, что первая из этих частей лежит в конечной лакуне второй¹⁾. Для удобства ссылок мы записываем наше предположение относительно взаимного положения спектральных компонент σ_0 и σ_1 в следующем виде:

$$\text{spes}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad \overline{\text{conv}(\sigma_0)} \cap \bar{\sigma}_1 = \emptyset \quad \text{и} \quad \sigma_0 \subset \text{conv}(\sigma_1), \quad (1.1)$$

где символ conv обозначает выпуклую оболочку, а черта сверху – замыкание.

Что касается (аддитивного) возмущения V , то мы будем считать его ограниченным самосопряженным оператором на пространстве $\mathfrak{H}$. Кроме того, подразумевается, что это возмущение внедиагонально по отношению к разбиению $\text{spes}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, т. е. V антикоммутирует с разностью $E_A(\sigma_0) - E_A(\sigma_1)$ спектральных проекторов $E_A(\sigma_0)$ и $E_A(\sigma_1)$ оператора A , отвечающих спектральным множествам σ_0 и σ_1 соответственно.

Пусть $d := \text{dist}(\sigma_0, \sigma_1)$ – расстояние между спектральными компонентами σ_0 и σ_1 . Для спектрального положения (1.1) в работе [18] (см. также [15]) было установлено, что лакуны между σ_0 и σ_1 под действием внедиагонального самосопряженного

¹⁾Напомним, что конечной лакуной замкнутого множества $\sigma \subset \mathbb{R}$ называется открытый ограниченный интервал на $\mathbb{R}$, который не пересекается с σ , но оба его конца принадлежат σ .

возмущения V заведомо не закрываются, если его норма удовлетворяет условию

$$\|V\| < \sqrt{2}d \quad (1.2)$$

и, более того, это условие является оптимальным. Если выполнено условие (1.2), то спектр возмущенного оператора $L = A + V$ состоит из двух изолированных частей $\omega_0 \subset \Delta$ и $\omega_1 \subset \mathbb{R} \setminus \Delta$. Здесь и далее через Δ мы обозначаем ровно ту конечную лауну множества σ_1 , в которой заключено σ_0 .

Оптимальная оценка изменения спектральных подпространств самосопряженного оператора в спектральном положении (1.1) под действием внедиагональных возмущений была поэтапно установлена в работах [19] (для случая $\|V\| < d$) и [20] (при $d \leq \|V\| < \sqrt{2}d$). Эта оценка, даваемая в терминах нормы разности соответствующих невозмущенного и возмущенного спектральных проекторов $E_A(\sigma_0)$ и $E_L(\omega_0)$, приводится в следующем утверждении (ср. [19], теорема 2 и [20], теорема 1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть спектр A состоит из двух изолированных компонент σ_0 и σ_1 , удовлетворяющих условиям (1.1). Примем, что V – ограниченный самосопряженный оператор на $\mathfrak{H}$, внедиагональный по отношению к разбиению $\operatorname{spec}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, и положим $L = A + V$, $\operatorname{Dom}(L) = \operatorname{Dom}(A)$. Кроме того, предположим, что норма V подчиняется неравенству (1.2), и пусть $\omega_0 = \operatorname{spec}(L) \cap \Delta$. Тогда выполняется оценка

$$\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\| \leq \sin \left(\arctg \frac{\|V\|}{d} \right). \quad (1.3)$$

Напомним, что если P и Q – ортогональные проекторы в некотором гильбертовом пространстве, то величина

$$\Theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) := \arcsin |P - Q|, \quad (1.4)$$

где $|P - Q| = \sqrt{(P - Q)^2}$ – модуль $P - Q$, называется *операторным углом* между подпространствами $\mathfrak{P} = \operatorname{Ran}(P)$ и $\mathfrak{Q} = \operatorname{Ran}(Q)$. Содержательное обсуждение термина *операторный угол* и необходимые ссылки можно найти, в частности, в разделе 2 недавней работы [21]. В свою очередь, норма операторного угла $\Theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ задает максимальный угол $\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ между $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ (см. [5]), а именно $\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = \arcsin \|P - Q\|$.

Ввиду (1.4) оценка (1.3) равносильна оценке

$$\operatorname{tg} \Theta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{L}_0) \leq \frac{\|V\|}{d} \quad (1.5)$$

тангенса операторного угла $\Theta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{L}_0)$ между невозмущенным $\mathfrak{A}_0 = \operatorname{Ran}(E_A(\sigma_0))$ и возмущенным $\mathfrak{L}_0 = \operatorname{Ran}(E_L(\omega_0))$ спектральными подпространствами. В отличие от $\operatorname{tg} \Theta$ -теоремы Дэвиса–Кахана (теоремы 6.3 в [2]) и ее расширений в работах [18] и [22], оценка (1.3) включает расстояние лишь между невозмущенными спектральными компонентами σ_0 и σ_1 . Именно поэтому в работах [19] и [20] она называется априорной $\operatorname{tg} \Theta$ -теоремой.

В основе доказательства теоремы 1 при $\|V\| < d$, данного в [19], лежит исследование местоположения спектра произведения $J'J$ самосопряженных инволюций $J = E_A(\sigma_0) - E_A(\sigma_1)$ и $J' = E_L(\omega_0) - E_L(\omega_1)$. Это доказательство не только подразумевает переформулирование задачи возмущений спектральных подпространств на язык пар инволюций, оно требует также знания некоторых свойств полярного разложения максимальных аккретивных операторов.

Целью настоящей работы является доказательство оценки (1.3) при $\|V\| < d$, не зависящее от подхода, предложенного в [19]. Представляется, что доказательство, которое мы даем ниже в разделе 3, является существенно более простым и прямым, нежели доказательство в [19]. Наше новое доказательство основывается на вполне стандартной редукции [16] рассматриваемой задачи возмущений инвариантных подпространств к исследованию операторного уравнения Риккати

$$XA_0 - A_1X + XBX = B^*, \quad (1.6)$$

где $A_0 = A|_{\mathfrak{A}_0}$ и $A_1 = A|_{\mathfrak{A}_1}$ – части оператора A в его спектральных подпространствах $\mathfrak{A}_0 = \text{Ran}(E_A(\sigma_0))$ и $\mathfrak{A}_1 = \text{Ran}(E_A(\sigma_1))$, а $B = V|_{\mathfrak{A}_1}$. Как установлено в [18], возмущенное спектральное подпространство $\mathfrak{L}_0 = \text{Ran}(E_L(\omega_0))$ является графиком некоторого решения $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ уравнения (1.6). Последнее означает (см., например, [17]), что

$$\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\| = \sin(\arctg \|X\|). \quad (1.7)$$

Поэтому, находя оценку для нормы решения X , мы одновременно находим оценку и для нормы разности спектральных проекторов $E_L(\omega_0)$ и $E_A(\sigma_0)$.

В наших выкладках мы опираемся на тождества, установленные в лемме 2.2 работы [20] для собственных значений и собственных векторов модуля $|X| = \sqrt{X^*X}$ оператора X . Отталкиваясь от этих тождеств (а точнее, от тождеств (2.6) и (2.7), представляемых ниже), мы получаем более детальную, чем (1.3), оценку (3.2) для $\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\|$, включающую наряду с $\|V\|$ и d также и длину $|\Delta|$ лакуны Δ . Оценка (3.2) воспроизводит основное утверждение теоремы 5.3 из работы [19]. Собственно доказательство этой оценки, альтернативное ее доказательству в [19], мы и рассматриваем как центральный результат настоящей работы. Как было указано в [19], оценка (1.3) оказывается простым следствием более детальной оценки (3.2).

Работа имеет следующую структуру. Наряду с уже упомянутыми тождествами (2.6) и (2.7) для собственных значений и собственных векторов модуля решения уравнения Риккати (1.6) раздел 2 содержит ряд других известных результатов, касающихся местоположения спектра возмущенного оператора $L = A + V$ и разрешимости уравнения (1.6) при выполнении более слабого, чем (1.2), но и более детального условия $\|V\| < \sqrt{d|\Delta|}$. Основной результат работы – новое доказательство оценки для поворота спектрального подпространства $\mathfrak{A}_0 = \text{Ran}(E_A(\sigma_0))$ под действием внедиагонального возмущения V , подчиняющегося условию $\|V\| < \sqrt{d(|\Delta| - d)}$, – представлен в разделе 3 (см. теорему 3). Раздел 3 завершается доказательством теоремы 1.

Под подпространством здесь понимается замкнутое линейное подмножество гильбертова пространства. Обозначение $\mathcal{B}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ используется для банахова пространства ограниченных линейных операторов из гильбертова пространства $\mathfrak{M}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{N}$. Ортогональная сумма двух гильбертовых пространств (или ортогональных подпространств) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ обозначается через $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$. График $\mathcal{G}(K) := \{y \in \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} \mid y = x \oplus Kx, x \in \mathfrak{M}\}$ оператора $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ называется граф-подпространством, ассоциированным с K . При этом сам оператор K называется угловым оператором, ассоциированным с упорядоченной парой $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K})$ подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K} = \mathcal{G}(K)$. Обозначения $\text{Dom}(Z)$ и $\text{Ran}(Z)$ используются соответственно для области определения и области значений линейного оператора Z .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Удобно использовать блочно-матричное представление рассматриваемых нами операторов, поэтому мы делаем следующее предположение (это предположение не касается взаимного положения спектров операторов A_0 и A_1).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ – взаимно дополнительные ортогональные подпространства сепарабельного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$. Предположим, что A – самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, допускающий блочно-диагональное представление

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \text{Dom}(A) = \mathfrak{A}_0 \oplus \text{Dom}(A_1), \quad (2.1)$$

где A_0 – ограниченный самосопряженный оператор на $\mathfrak{A}_0$, а A_1 – возможно, неограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{A}_1$. Пусть V – ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, внедиагональный по отношению к разбиению $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, т. е.

$$V = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $0 \neq B \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_0)$, и пусть $L = A + V$, $\text{Dom}(L) = \text{Dom}(A)$, и, следовательно,

$$L = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ B^* & A_1 \end{pmatrix}, \quad \text{Dom}(L) = \mathfrak{A}_0 \oplus \text{Dom}(A_1). \quad (2.3)$$

В условиях предположения 1 оператор $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ называется решением операторного уравнения Риккати (1.6), если

$$\text{Ran}(X) \subset \text{Dom}(A_1) \quad (2.4)$$

и равенство (1.6) выполняется как операторное тождество (см., например, определение 3.1 в [16]). Очевидно, решение X , если оно существует, может быть лишь ненулевым, $X \neq 0$; действительно, из $X = 0$ следовало бы, что $B = 0$, что противоречит предположению. В дальнейшем через U мы будем обозначать частичную

изометрию в полярном разложении $X = U|X|$ оператора X . Принимаем соглашение, что действие U тривиально распространяется также и на ядро $\text{Ker}(X) = \text{Ker}(|X|)$:

$$U|_{\text{Ker}(X)} = 0.$$

В таком случае оператор U однозначно определен на всем подпространстве $\mathfrak{A}_0$ (см., например, [23], теорема 8.1.2). При этом

$$U \text{ является изометрией на } \text{Ran}(|X|) = \text{Ran}(X^*). \quad (2.5)$$

Нам понадобятся два тождества для собственных векторов и собственных значений (если таковые существуют) модуля $|X|$. Первое из этих тождеств установлено в лемме 2.2 работы [20]. Второе тождество тривиально следует из других тождеств, также доказанных в лемме 2.2 работы [20].

ЛЕММА 1 [20]. *Пусть справедливо предположение 1. Предположим также, что уравнение Риккати (1.6) имеет решение $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$, причем модуль $|X|$ этого решения обладает некоторым собственным числом $\lambda \geq 0$. Пусть u , $u \neq 0$, – собственный вектор, отвечающий этому собственному числу, т.е. $|X|u = \lambda u$. Если U – изометрия из полярного представления $X = U|X|$ решения X , то $Uu \in \text{Dom}(A_1)$ и выполняются два следующих тождества:*

$$\begin{aligned} \lambda(\|A_1 U u\|^2 + \|B U u\|^2 - \|A_0 u\|^2 - \|B^* u\|^2) = \\ = -(1 - \lambda^2)(\langle A_0 u, B U u \rangle + \langle B^* u, A_1 U u \rangle), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\langle A_0 u, B U u \rangle + \langle B^* u, A_1 U u \rangle = -\lambda(\|A_1 U u\|^2 + \|B U u\|^2 - \|A_0 u\|^2), \quad (2.7)$$

где

$$\Lambda_0 := (I + |X|^2)^{1/2}(A_0 + BX)(I + |X|^2)^{-1/2} \quad (2.8)$$

является ограниченным самосопряженным оператором на $\mathfrak{A}_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тождество (2.6) представляет собой тождество (2.7) работы [20]. Тождество (2.7) получается как результат комбинации двух других тождеств из леммы 2.2 в работе [20] (см. [20], тождества (2.8) и (2.9)).

Ниже мы будем обсуждать лишь спектральную ситуацию (1.1), причем нам понадобится более детальное ее описание.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть справедливо предположение 1. Пусть $\sigma_0 = \text{спес}(A_0)$ и $\sigma_1 = \text{спес}(A_1)$. Будем считать, что открытый интервал $\Delta = (\gamma_\ell, \gamma_r) \subset \mathbb{R}$, где $\gamma_\ell < \gamma_r$, является конечной лакуной множества σ_1 и $\sigma_0 \subset \Delta$. Пусть $d = \text{dist}(\sigma_0, \sigma_1)$.*

Приведем известные результаты, касающиеся местоположения спектра оператора $L = A + V$ и разрешимости ассоциированного уравнения Риккати (1.6) в спектральной ситуации (1.1). Все эти результаты были установлены в работе [18] в рамках подхода, альтернативного методам и технике, использовавшимся позднее в [19].

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливо предположение 2. Примем также, что

$$\|V\| < \sqrt{d|\Delta|}. \quad (2.9)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Спектр операторной матрицы L состоит из двух непересекающихся частей $\omega_0 \subset \Delta$ и $\omega_1 \subset \mathbb{R} \setminus \Delta$. При этом

$$\min(\omega_0) \geq \gamma_\ell + (d - r_V), \quad \max(\omega_0) \leq \gamma_r - (d - r_V), \quad (2.10)$$

где

$$r_V := \|V\| \text{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2\|V\|}{|\Delta| - d} \right) < d. \quad (2.11)$$

2. У уравнения Риккати (1.6) существует, и притом единственное, решение $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$, обладающее свойствами

$$\text{spec}(A_0 + BX) = \omega_0, \quad \text{spec}(A_1 - B^*X^*) = \omega_1. \quad (2.12)$$

При этом спектральные подпространства $\mathfrak{L}_0 = \text{Ran}(E_L(\omega_0))$ и $\mathfrak{L}_1 = \text{Ran}(E_L(\omega_1))$ являются граф-подпространствами, $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{G}(X)$ и $\mathfrak{L}_1 = \mathcal{G}(-X^*)$, ассоциированными с операторами X и $-X^*$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формулировки п. 1, 2 теоремы 2 заимствованы из теоремы 2.4 работы [20]. Утверждение 1 является следствием теоремы 3.2 из работы [18]. Утверждение 2 представляет собой комбинацию утверждений из теоремы 2.3 работы [18] и результатов, касающихся существования и единственности решения операторного уравнения Риккати (1.6), установленных в теореме 1 (i) работы [18].

3. ОЦЕНКА ДЛЯ ПОВОРОТА СПЕКТРАЛЬНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА И ЕЕ НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Точная априорная оценка нормы операторного угла между невозмущенным и возмущенным спектральными подпространствами $\mathfrak{A}_0 = \text{Ran}(E_A(\sigma_0))$ и $\mathfrak{L}_0 = \text{Ran}(E_L(\omega_0))$, включающая не только расстояние d , но и еще один параметр – длину $|\Delta|$ спектральной лакуны Δ , была впервые установлена в работе [19] (см. теорему 5.3 указанной работы). Это было сделано при условии

$$\|V\| < \sqrt{d(|\Delta| - d)}, \quad (3.1)$$

более жестком, нежели условие (2.9) в теореме 2. Формулировка интересующего нас основного утверждения теоремы 5.3 из работы [19], переписанная в терминах нормы разности $E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)$ спектральных проекторов $E_A(\sigma_0)$ и $E_L(\omega_0)$, имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 3 [19]. Пусть справедливо предположение 2. Кроме того, предположим, что выполнено условие (3.1). Тогда

$$\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\| \leq \sin \left(\frac{1}{2} \arctg \varkappa(|\Delta|, d, \|V\|) \right) \quad \left(< \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad (3.2)$$

где $\omega_0 = \text{спес}(L) \cap \Delta$, а величина $\varkappa(D, d, v)$ определяется при

$$D > 0, \quad 0 < d \leq \frac{D}{2}, \quad 0 \leq v < \sqrt{d(D-d)} \quad (3.3)$$

равенствами

$$\varkappa(D, d, v) := \begin{cases} \frac{2v}{d}, & \text{если } v \leq \frac{1}{2}\sqrt{d(D-d)}, \\ \frac{vD + \sqrt{d(D-d)}\sqrt{(D-2d)^2 + 4v^2}}{2(d(D-d) - v^2)}, & \text{если } v > \frac{1}{2}\sqrt{d(D-d)}. \end{cases}$$

Как уже отмечалось в разделе 1, наша главная задача – представить доказательство теоремы 3, которое не зависит от подхода, использовавшегося в работе [19], и является более простым, чем доказательство в [19].

Мы докажем оценку (3.2) сначала в специальном случае, когда модуль $|X|$ углового оператора $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ из граф-представления $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{G}(X)$ имеет собственное число, равное норме X . Доказательство проводится путем непосредственной оценки этого собственного числа. Общий случай легко сводится к указанному специальному случаю путем применения вполне стандартной предельной процедуры, включающей проецирование на элементы последовательности расширяющихся конечномерных подпространств в $\mathfrak{A}_0$ (см. доказательство теоремы 4.1 в [20]; ср. с доказательством теоремы 4.2 в [24]). Ввиду ее стандартности эту часть доказательства мы опускаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При доказательстве мы будем считать без ограничения общности, что интервал Δ располагается симметрично относительно точки 0, т.е. $\gamma_r = -\gamma_\ell = \gamma$. Действительно, если это не так, то всегда можно сделать замену A_0 и A_1 соответственно на $A'_0 = A_0 - cI$ и $A'_1 = A_1 - cI$, где $c = (\gamma_\ell + \gamma_r)/2$ – центр интервала Δ . Очевидно, что после такой замены оператор X остается решением уравнения Риккати (1.6). Отметим также, что предположения $\sigma_0 \subset \Delta = (-\gamma, \gamma)$ и $d = \text{dist}(\sigma_0, \sigma_1) > 0$ означают, что $\sigma_0 \subset [-a, a]$, где $a = \gamma - d$. При этом

$$\|A_0\| = a, \quad (3.4)$$

$\gamma = a + d$, а условие (3.1) переписывается в виде

$$\|V\| < \sqrt{d(2a + d)}. \quad (3.5)$$

Пусть X – то (единственное) решение уравнения Риккати (1.6), о котором говорится в п. 2 теоремы 2. Согласно принятым условиям $V \neq 0$ (см. предположение 1) и, следовательно, $X \neq 0$. Предположим, что модуль $|X|$ оператора X имеет собственное число μ , совпадающее с его нормой, т.е.

$$\mu = |||X||| = \|X\| > 0, \quad (3.6)$$

и пусть u , $\|u\| = 1$, – собственный вектор $|X|$, отвечающий этому собственному числу, $|X|u = \mu u$. Поскольку $\mu \neq 0$ и $u = (1/\mu)|X|u$, заключаем, что $u \in \text{Ran}(|X|)$,

и согласно (2.5) получаем

$$\|Uu\| = \|u\| = 1, \quad (3.7)$$

где U – изометрия из полярного представления $X = U|X|$. Благодаря лемме 1 мы также знаем, что $Uu \in \text{Dom}(A_1)$ и выполняются тождества

$$\begin{aligned} \mu(\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - \|A_0u\|^2 - \|B^*u\|^2) = \\ = -(1 - \mu^2)(\langle A_0u, BUu \rangle + \langle B^*u, A_1Uu \rangle), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\langle A_0u, BUu \rangle + \langle B^*u, A_1Uu \rangle = -\mu(\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - \|A_0u\|^2), \quad (3.9)$$

где Λ_0 – ограниченный самосопряженный оператор на $\mathfrak{A}_0$, выражающийся через A_0 , B и X соотношением (2.8).

Из подобия (2.8) вытекает, что $\text{спес}(\Lambda_0) = \text{спес}(A_0 + BX)$. Поэтому на основании утверждения 2 теоремы 2 заключаем, что $\text{спес}(\Lambda_0) = \omega_0$. Из утверждения 1 теоремы 2 тогда следует $\|\Lambda_0u\| \leq \gamma - (d - r_V) < \gamma$, т. е.

$$\|\Lambda_0u\| < a + d. \quad (3.10)$$

Примем во внимание, что спектр A_1 лежит вне интервала $\Delta = (-a - d, a + d)$, и тем самым из (3.7) следует

$$\|A_1Uu\| \geq a + d. \quad (3.11)$$

Ввиду (3.10) и (3.11) находим

$$\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - \|\Lambda_0u\|^2 > (a + d)^2 + \|BUu\|^2 - (a + d)^2 \geq 0.$$

Поэтому соотношения (3.6) и (3.9) требуют выполнения строгого неравенства

$$\langle A_0u, BUu \rangle + \langle B^*u, A_1Uu \rangle < 0. \quad (3.12)$$

С другой стороны, из (3.4) и (3.5) находим

$$\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - \|A_0u\|^2 - \|B^*u\|^2 \geq (a + d)^2 - a^2 - \|B\|^2 = d(2a + d) - v^2 > 0, \quad (3.13)$$

где для сокращения записи использовано обозначение

$$v = \|B\| \quad (= \|V\|).$$

На основании (3.12) и (3.13) из тождества (3.8) следует, что

$$\mu < 1. \quad (3.14)$$

Учитывая (3.13) и (3.14), мы можем переписать (3.8) в виде

$$\frac{\mu}{1 - \mu^2} = - \frac{\langle A_0u, BUu \rangle + \langle B^*u, A_1Uu \rangle}{\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - \|A_0u\|^2 - \|B^*u\|^2} \quad (> 0)$$

и затем заключить, что

$$\frac{\mu}{1 - \mu^2} \leq \frac{a\|BUu\| + v\|A_1Uu\|}{\|A_1Uu\|^2 + \|BUu\|^2 - a^2 - v^2}. \quad (3.15)$$

Пусть $x = \|A_1Uu\|$, $y = \|BUu\|$. Ввиду (3.11) имеем $x \in [a + d, \infty)$. В то же время $y \in [0, v]$. Это значит, что заведомо выполнена оценка

$$\frac{\mu}{1 - \mu^2} \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} \varphi(x, y), \quad (3.16)$$

где $\Omega = [a + d, \infty) \times [0, v]$ и

$$\varphi(x, y) := \frac{vx + ay}{x^2 + y^2 - a^2 - v^2}. \quad (3.17)$$

Элементарные вычисления показывают, что наибольшее значение функции φ на множестве Ω достигается на участке границы этого множества, отвечающем $x = a + d$ и $y \in [0, v]$. А именно, если $0 < v \leq \sqrt{da/2}$, то максимум φ на Ω достигается точкой $x = a + d$, $y = v$. Если же $\sqrt{da/2} < v < \sqrt{d(2a + d)}$, то своего максимума на Ω функция φ достигает при $x = a + d$ и

$$y = \frac{a[d(2a + d) - v^2]}{v(a + d) + a\sqrt{d(2a + d)}(a^2 + v^2)} \quad (< v).$$

Путем подстановки соответствующей точки максимума в (3.17) находим

$$\sup_{(x,y) \in \Omega} \varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{v}{d}, & \text{если } v \leq \sqrt{\frac{1}{2}da}, \\ \frac{1}{2} \frac{v(a + d) + \sqrt{d(2a + d)}\sqrt{a^2 + v^2}}{d(2a + d) - v^2}, & \text{если } v > \sqrt{d(2a + d)}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Отмечая, что

$$\frac{\mu}{1 - \mu^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2 \arctg \mu),$$

и учитывая равенства $\mu = \|X\|$, $v = \|V\|$ и $a = |\Delta|/2 - d$, находим, что соотношения (3.14), (3.16) и (3.18) влекут оценку

$$\|X\| \leq \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \kappa(|\Delta|, d, \|V\|) \right). \quad (3.19)$$

В силу утверждения 2 теоремы 2 спектральное подпространство $\mathfrak{L}_0 = \operatorname{Ran}(E_L(\omega_0))$ является графиком оператора X . Поэтому норма разности ортогональных проекторов $E_A(\sigma_0)$ и $E_L(\omega_0)$ выражается через $\|X\|$ согласно равенству (1.7) (см., например, следствие 3.4 в [17]). Ввиду (1.7) неравенство (3.19) равносильно оценке (3.2). Таким образом, для случая, когда модуль $|X|$ имеет собственное число, совпадающее с его нормой, теорема доказана.

В случае, когда $|X|$ не имеет собственного числа, равного $\|X\|$, доказательство сводится к уже рассмотренному случаю путем почти буквального повторения рассуждений, использовавшихся в работе [20] для обоснования соответствующей оценки для $\|E_A(\sigma_0) - E_L(\omega_0)\|$ при $\sqrt{d(|\Delta| - d)} \leq \|V\| < \sqrt{d|\Delta|}$ (см. теорему 4.1 в [20]). Сделав эту отсылку к [20], полагаем доказательство теоремы завершенным.

Осталось напомнить (см. доказательство теоремы 2 в [19]), что утверждение теоремы 1 при $\|V\| < d$ является элементарным следствием более детальной оценки (3.2). Для полноты изложения мы все же дадим необходимые пояснения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 при $\|V\| < d$. Поскольку $|\Delta| \geq 2d$, при условии $\|V\| < d$ автоматически выполнено неравенство $\|V\| < \sqrt{d(|\Delta| - d)}$. Следовательно, согласно теореме 3 мы имеем оценку (3.2). Отметим, что при фиксированных значениях $\|V\|$ и d , удовлетворяющих неравенству $\|V\| < d$, величина $\varkappa(D, d, \|V\|)$ является невозрастающей функцией переменной $D \in [2d, \infty)$. Свое максимальное значение она приобретает при $D = 2d$, и это значение равно

$$\max_{D: D \geq 2d} \varkappa(D, d, \|V\|) = \varkappa(2d, d, \|V\|) = \frac{2\|V\|d}{d^2 - \|V\|^2} = \text{tg} \left(2 \arctg \frac{\|V\|}{d} \right).$$

Таким образом, (3.2) влечет (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оптимальность оценок (1.3) при $\|V\| < d$ и (3.2) при $\|V\| < \sqrt{d(|\Delta| - d)}$ подтверждается соответствующими конкретными матричными примерами (см. пример 5.5 и замечание 5.6 в [19] и пример 4.4 и замечание 4.5 в [20]).

Список литературы

- [1] R. Bhatia, C. Davis, A. McIntosh, *Linear Algebra Appl.*, **52–53** (1983), 45–67.
- [2] C. Davis, W.M. Kahan, *SIAM J. Numer. Anal.*, **7** (1970), 1–46.
- [3] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [4] S. Albeverio, A.K. Motovilov, *Bounds on variation of the spectrum and spectral subspaces of a few-body Hamiltonian*, [arXiv: 1410.3231](https://arxiv.org/abs/1410.3231).
- [5] S. Albeverio, A.K. Motovilov, *Compl. Anal. Oper. Theory*, **7:4** (2013), 1389–1416.
- [6] A. Seelmann, *Perturbation Theory for Spectral Subspaces*, Ph.D. thesis, Johannes Gutenberg University, Mainz, 2014, <http://ubm.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2014/3862/>.
- [7] Ю.А. Куперин, К.А. Макаров, С.П. Меркурьев, А.К. Мотовилов, *ЯФ*, **48** (1988), 358–370.
- [8] Y. A. Kuperin, K. A. Makarov, S. P. Merkuriev, A. K. Motovilov, B. S. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **31:7** (1990), 1681–1690.
- [9] A. K. Motovilov, *J. Math. Phys.*, **36:12** (1995), 6647–6664.
- [10] A. K. Motovilov, *J. Math. Phys.*, **32:12** (1991), 3509–3518.
- [11] B. H. J. McKellar, C. M. McKay, *Australian J. Phys.*, **36:5** (1983), 607–616.
- [12] R. Mennicken, A. A. Shkalikov, *Math. Nachr.*, **179** (1996), 259–273.
- [13] А.С. Маркус, В.И. Мацаев, *Функц. анализ и его прил.*, **9:1** (1975), 76–77.
- [14] H. Langer, A. Markus, V. Matsaev, C. Tretter, *Linear Algebra Appl.*, **330:1–3** (2001), 89–112.

- [15] C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008.
- [16] S. Albeverio, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, *Canad. J. Math.*, **55**:3 (2003), 449–503.
- [17] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, “Existence and uniqueness of solutions to the operator Riccati equation. A geometric approach”, *Advances in Differential Equations and Mathematical Physics* (University of Alabama, Birmingham, AL, USA, March 26–30, 2002), Contemporary Mathematics, **327**, eds. Yu. Karpeshina, G. Stolz, R. Weikard, Y. Zeng, AMS, Providence, RI, 2003, 181–198.
- [18] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, *Integral Equations Operator Theory*, **51**:1 (2005), 121–140.
- [19] A. K. Motovilov, A. V. Selin, *Integral Equations Operator Theory*, **56**:4 (2006), 511–542.
- [20] S. Albeverio, A. K. Motovilov, *Integral Equations Operator Theory*, **73**:3 (2012), 413–430.
- [21] A. Seelman, *Integral Equations Operator Theory*, **79**:4 (2014), 579–597.
- [22] Y. Nakatsukasa, *Linear Algebra Appl.*, **436**:5 (2012), 1528–1534.
- [23] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Леннингр. ун-та, Л., 1980.
- [24] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, “A generalization of the $\tan 2\Theta$ theorem”, *Current Trends in Operator Theory and Its Applications* (Virginia Tech, Blacksburg, VA, USA, August 6–9, 2002), Operator Theory: Advances and Applications, **149**, eds. J. A. Ball, W. J. Helton, M. Klaus, L. Rodman, Birkhäuser, Basel, 2004, 349–372.