Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Леляков, А. С. Карпенко, Динамика пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой нуль-струны, радиально коллапсирующей в плоскости, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 162–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:49:10

© 2017 г.

А. П. Леяков*, А. С. Карпенко*

ДИНАМИКА ПРОБНОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ, РАДИАЛЬНО КОЛЛАПСИРУЮЩЕЙ В ПЛОСКОСТИ

Рассмотрена динамика пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой (“размазанной”) нуль-струны, радиально коллапсирующей в плоскости. Анализ полученных решений позволяет предположить, что принципиально возможно существование ряда интересных с точки зрения космологии свойств газа нуль-струн, например таких, как ускоренное расширение или ускоренное сжатие, зернистая структура газа, появление устойчивых поляризованных состояний и доменной структуры.

Ключевые слова: нуль-струна, гравитационное поле, уравнения движения.

DOI: 10.4213/tmf8994

1. ВВЕДЕНИЕ

Космические струны, которые являются одномерными областями концентрации энергии, могут естественным образом возникать в результате спонтанного нарушения симметрии при фазовых переходах в процессе эволюции Вселенной [1]–[7]. В рамках различных моделей теории Великого объединения (ТВО) они проявляются как топологические дефекты и представляют собой устойчивые образования. В работе [8] было показано, что наличие таких объектов во Вселенной не противоречит наблюдениям микроволнового реликтового излучения. Также не исключается, что космические струны могли сохраниться до современной эпохи и их можно наблюдать [9], [10].

Космическую струну характеризуют следующие параметры: линейная плотность массы ρ_ℓ и радиус поперечного сечения r_s . Для струн, возникающих в моделях ТВО, эти параметры связаны с типичным масштабом масс теории m_{GUT} и константой Хиггса λ соотношениями

$$\frac{G}{c^2}\rho_\ell = \lambda^{-1}\left(\frac{m_{\text{GUT}}}{m_{\text{Pl}}}\right)^2, \quad r_s = l_{\text{Pl}}\left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m_{\text{GUT}}}\right),$$

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым. E-mail: lelyakov@crimea.edu

где m_{Pl} и l_{Pl} – соответственно масса Планка и длина Планка, G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Натяжение космической струны пропорционально линейной плотности массы ρ_ℓ и в соответствии с приведенными выше соотношениями измеряется отрицательными степенями массы Планка.

Для описания движения струн в случае, когда радиус r_s поперечного сечения струны много меньше характерного радиуса изгиба струны, используется приближение, в котором положение струны задается линией в D -мерном пространстве-времени. Тогда траекторией струны является двумерная мировая поверхность, математически задаваемая функциями $x^m(\tau, \sigma)$, $m = 0, 1, \dots, D-1$, где τ и σ – параметры на мировой поверхности струны, σ – пространственноподобный параметр, помечающий точки вдоль струны, τ – времениподобный параметр, являющийся собственным временем для наблюдателя, находящегося на струне в точке с координатой σ .

Обобщением действия точечной частицы на случай струны, предложенной Намбу и Гото, является действие, пропорциональное площади мировой поверхности, которую замечает струна во время своего движения:

$$S = -2\rho_\ell \int d\tau d\sigma \sqrt{-g},$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^m G_{mn}(x) \partial_\beta x^n$ – метрический тензор на мировой поверхности струны, $G_{mn}(x)$ – метрический тензор внешнего (фонового) пространства-времени; здесь m и n принимают значения $0, 1, \dots, D-1$, а α и β принимают значения $0, 1$.

Можно заметить, что действие Намбу–Гото нельзя применять, если отсутствует натяжение струны. Чтобы обойти эту трудность, в рассмотрение вводят вспомогательную функцию $E(\tau, \sigma)$, которая интерпретируется как двумерная листовая плотность. С помощью этой функции функционал действия для струны можно записать в виде [11]

$$S = \int d\tau d\sigma \left[\frac{g}{E(\tau, \sigma)} - \rho_\ell^2 E(\tau, \sigma) \right].$$

Отметим, что данное представление классически эквивалентно представлению Намбу–Гото. В этом легко убедиться, если воспользоваться уравнением движения для вспомогательного поля E , с помощью которого оно исключается из представления:

$$E = \rho_\ell^{-1} \sqrt{-g}.$$

Нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для струн Намбу–Гото [7], [11]–[14] (т. е. описывают предел, в котором скорость всех точек струны равна скорости света), а поскольку натяжение струны измеряется отрицательными степенями массы планка m_{Pl} , предел нулевого натяжения соответствует асимптотически большим масштабам энергии $E \gg m_{\text{Pl}}$ [12]. С этой точки зрения нуль-струны представляют собой высокотемпературную фазу теории струн [13], [14], другими словами, они могли образовываться на ранних этапах эволюции Вселенной и, таким образом, возможно, участвовали в процессах формирования структуры наблюдаемой Вселенной.

Так, например, в работе [15] было показано, что если рассматривать сеть (газ) нуль-струн как доминантный источник гравитации в D -мерных пространствах Фридмана–Робертсона–Уокера при $k = 0$, то можно описать механизм инфляции, характерный для этих пространств. Также может быть интересным возможное участие

газа реликтовых нуль-струн как одной из составляющих гравитационного вакуумного конденсата, наряду со струнами, монополями и мембранами, в формировании “темной” материи [16]–[18], существование которой во Вселенной можно считать установленным фактом.

Хотя объектом исследования в приведенных выше примерах является не уединенная нуль-струна, а сеть (газ) нуль-струн, свойства этого газа все еще остаются неясными. Одно из направлений в исследовании свойств газа нуль-струн состоит в изучении свойств гравитационного поля, которое порождается нуль-струной, движущейся по определенной траектории; также можно отметить задачи о движении пробных нуль-струн в гравитационном поле нуль-струны.

Настоящая работа посвящена исследованию движения пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой (“размазанной”) нуль-струны, которая в каждый момент времени находится в одной плоскости, имеет форму окружности и радиально коллапсирует в этой плоскости.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НУЛЬ-СТРУНЫ

В цилиндрической системе координат $x^0 = t$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$ квадратичную форму, которая описывает гравитационное поле замкнутой (“размазанной”) нуль-струны, радиально коллапсирующей в плоскости $z = 0$, можно представить в виде [19], [20]

$$dS^2 = e^{2\nu}((dt)^2 - (d\rho)^2) - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (1)$$

где

$$e^{2\nu(\eta, z)} = \frac{|\lambda_{,\eta}|}{\lambda^2(\eta)} \left(\frac{\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)}{(\lambda(\eta))^{1/(1-\chi)}} \right)^{2-\sqrt{4-2\chi}}, \quad (2)$$

$$B(\eta, z) = \left(\frac{\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)}{(\lambda(\eta))^{1/(1-\chi)}} \right)^{\sqrt{4-2\chi}}, \quad (3)$$

$$e^{2\mu(\eta, z)} = (f_{,z})^2 \left(\frac{\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)}{(\lambda(\eta))^{1/(1-\chi)}} \right)^{2-\sqrt{4-2\chi}} \quad (4)$$

и $\eta = t + \rho$, $\chi = 8\pi G$, где G – гравитационная постоянная. Функции $\lambda(\eta)$ и $\alpha(\eta)$ связаны соотношением

$$\lambda(\eta) = \frac{1 - \alpha(\eta)}{f_0}, \quad f_0 = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь и далее мы используем обозначения для производных вида

$$\lambda_{,\eta} = \frac{d\lambda(\eta)}{d\eta}, \quad f_{,z} = \frac{df(z)}{dz}. \quad (6)$$

Функции $\alpha(\eta)$ и $f(z)$ являются ограниченными и для всех значений $\eta \in (-\infty, +\infty)$ и $z \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \alpha(\eta) < 1, \quad 0 < f(z) < f_0, \quad (7)$$

причем [19]

$$\alpha(\eta)|_{\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)} \rightarrow 1, \quad \alpha(\eta)|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow 0,$$

соответственно,

$$\lambda(\eta)\big|_{\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)} \rightarrow 0, \quad \lambda(\eta)\big|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{f_0}, \quad (8)$$

$$f(z)\big|_{z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (+\Delta z, +\infty)} \rightarrow f_0, \quad f(z)\big|_{z \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Здесь $\Delta\eta$ и Δz – малые положительные константы, определяющие “толщину” “размазанной” нуль-струны, порождающей гравитационное поле ($\Delta\eta \ll 1$, $\Delta z \ll 1$).

Также в пределе сжатия в одномерный объект (нуль-струну) должны быть выполнены следующие условия при $\Delta\eta \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\left| \frac{\alpha, \eta}{\alpha(\eta)} \right|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad \left| \frac{f, z}{f(z)} \right|_{z \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\alpha, \eta}{\alpha(\eta)} \frac{f, z}{f(z)} \right|_{\eta \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Как пример можно привести такой выбор функций $\alpha(\eta)$ и $f(z)$, удовлетворяющих условиям (10):

$$\alpha(\eta) = \exp\left(-\frac{1}{\epsilon + (\xi\eta)^2}\right), \quad f(z) = f_0 \exp\left(-\mu\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{(\zeta z)^2}\right)\right)\right), \quad (11)$$

где константы ξ и ζ определяют размер (“толщину”) “размазанной” нуль-струны, порождающей гравитационное поле, соответственно по переменным η и z , а положительные константы ϵ и μ обеспечивают выполнение условий (10) при $\eta \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$: при $\Delta\eta \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ мы имеем

$$\xi, \zeta, \mu \rightarrow \infty, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Движение нуль-струны в псевдоримановом пространстве-времени определяется системой уравнений

$$x_{,\tau\tau}^m + \Gamma_{p\tau}^m x_{,\tau}^p x_{,\tau}^l = 0, \quad g_{mn} x_{,\tau}^m x_{,\tau}^n = 0, \quad g_{mn} x_{,\tau}^m x_{,\sigma}^n = 0, \quad (13)$$

где g_{mn} и Γ_{pq}^m – соответственно метрический тензор и символы Кристоффеля внешнего пространства-времени, $x_{,\tau}^m = \partial x^m / \partial \tau$, $x_{,\sigma}^n = \partial x^n / \partial \sigma$, индексы m, n, p и l принимают значения 0, 1, 2, 3, функции $x^m(\tau, \sigma)$ определяют траекторию движения нуль-струны.

В цилиндрической системе координат функции $x^m(\tau, \sigma)$, которые определяют рассматриваемую в настоящей работе “траекторию” движения (мировую поверхность) нуль-струны, порождающей гравитационное поле, имеют вид

$$t = \tau, \quad \rho = -\tau, \quad \theta = \sigma, \quad z = 0, \quad \tau \in (-\infty, 0], \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \quad (14)$$

Для квадратичной формы (1) уравнения движения пробной нуль-струны (уравнения (13)) можно представить в виде

$$\eta_{,\tau\tau} + 2\nu_{,\tau}\eta_{,\tau} = 0, \quad (15)$$

$$q_{,\tau\tau} + 2\nu_{,z}q_{,\tau}z_{,\tau} + 2e^{2(\mu-\nu)}\mu_{,\eta}(z_{,\tau})^2 + e^{-2\nu}B_{,\eta}(\theta_{,\tau})^2 = 0, \quad (16)$$

$$z_{,\tau\tau} + e^{2(\nu-\mu)}\nu_{,z}\eta_{,\tau}q_{,\tau} + 2\mu_{,\eta}\eta_{,\tau}z_{,\tau} - \frac{e^{-2\mu}}{2}B_{,z}(\theta_{,\tau})^2 + \mu_{,z}(z_{,\tau})^2 = 0, \quad (17)$$

$$\theta_{,\tau\tau} + \frac{B_{,\tau}}{B}\theta_{,\tau} = 0, \quad (18)$$

$$e^{2\nu}\eta_{,\tau}q_{,\tau} - B(\theta_{,\tau})^2 - e^{2\mu}(z_{,\tau})^2 = 0, \quad (19)$$

$$\frac{e^{2\nu}}{2}(\eta_{,\tau}q_{,\sigma} + \eta_{,\sigma}q_{,\tau}) - B\theta_{,\tau}\theta_{,\sigma} - e^{2\mu}z_{,\tau}z_{,\sigma} = 0, \quad (20)$$

где

$$q = t - \rho. \quad (21)$$

При интегрировании уравнения (15) необходимо рассмотреть два случая:

$$\eta_{,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta(\sigma) \quad (22)$$

и

$$\eta_{,\tau} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta(\tau, \sigma). \quad (23)$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\eta_{,\tau} = 0$

Для случая (22) уравнение (19) принимает вид

$$B(\theta_{,\tau})^2 + e^{2\mu}(z_{,\tau})^2 = 0. \quad (24)$$

Поскольку функции $B(\eta, z)$ и $e^{2\mu}(\eta, z)$ в данном уравнении положительны для всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$ и $z \in (-\infty, +\infty)$, из (24) следует, что

$$z_{,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z(\sigma), \quad \theta_{,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta(\sigma). \quad (25)$$

Для случая (22), (25) уравнения (15), (17), (18) выполняются тождественно, а уравнения (16) и (20) принимают вид

$$q_{,\tau\tau} = 0, \quad (26)$$

$$q_{,\tau}\eta_{,\sigma} = 0. \quad (27)$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим

$$q_{,\tau} = P_q(\sigma) \quad \Rightarrow \quad q(\tau, \sigma) = q_0(\sigma) + P_q(\sigma)\tau, \quad (28)$$

где q_0 и $P_q(\sigma)$ – “константы” интегрирования, причем

$$P_q(\sigma) \neq 0, \quad (29)$$

поскольку в противном случае, т. е. при $P_q(\sigma) = 0$, мы имеем $q = q_0(\sigma)$, что с учетом соотношений (22), (25) говорит о реализации статического решения для нуль-струны, а это невозможно.

Для случая (22) и (28) уравнение (27) принимает вид $\eta_{,\sigma}P_q(\sigma) = 0$, откуда, учитывая (29), мы получаем

$$\eta_{,\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \text{const}. \quad (30)$$

Из соотношений (25), (28) и (30) следует, что для случая (22) замкнутая пробная нуль-струна движется так же, как и нуль-струна, порождающая гравитационное

поле, т. е. радиально коллапсирует. При этом в каждый момент времени пробная замкнутая нуль-струна полностью локализована между плоскостями $z = z_1 = \text{const}$ и $z = z_2 = \text{const}$, где

$$z_1 = \min_{\sigma \in [0, 2\pi]} z(\sigma), \quad z_2 = \max_{\sigma \in [0, 2\pi]} z(\sigma),$$

и находится на поверхности цилиндра радиуса $\rho = -t + \text{const}$, $t \in (-\infty, 0]$. Если же в (25) $z(\sigma) = z_0 = \text{const}$, то этот случай будет описывать коллапс пробной нуль-струны, которая в каждый момент времени целиком лежит в плоскости $z = z_0$ и имеет форму окружности.

Можно отметить, что из приведенного решения следует принципиальная возможность существования состояния (фазы) газа нуль-струн, в котором замкнутые нуль-струны, имеющие форму окружности, находясь в параллельных плоскостях (эффект поляризации), одновременно радиально коллапсируют, не изменяя своей формы.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\eta_{,\tau} \neq 0$

Интегрируя уравнение (18), находим

$$\theta(\tau, \sigma) = \theta_0(\sigma) \pm P_\theta(\sigma) \int \frac{d\tau}{B}, \quad (31)$$

где функции $\theta_0(\sigma)$ и $P_\theta(\sigma)$ (“константы” интегрирования) определяют по переменной θ соответственно положение и скорости точек нуль-струны в начальный момент времени, выбор знака $\pm$ соответствует двум возможным направлениям вращения (по часовой или против часовой стрелке). Из равенства (31) следует, что если в начальный момент времени функция $P_\theta(\sigma) = 0$ (т. е. в начальный момент времени отсутствует вращение пробной нуль-струны), то и вся последующая динамика пробной замкнутой нуль-струны будет происходить без вращения, $\theta = \theta(\sigma)$. Если $P_\theta(\sigma) \neq 0$, то при своем движении пробная нуль-струна будет вращаться в плоскости, которая параллельна плоскости расположения нуль-струны, порождающей гравитационное поле, $\theta = \theta(\tau, \sigma)$.

В рамках предположения (23) мы провели анализ движения пробной замкнутой нуль-струны для двух случаев $P_\theta(\sigma) = 0$ и $P_\theta(\sigma) \neq 0$; соответственно имеем

$$\eta = \eta(\tau, \sigma), \quad \theta = \theta_0(\sigma), \quad (32)$$

$$\eta = \eta(\tau, \sigma), \quad \theta = \theta(\tau, \sigma). \quad (33)$$

Поскольку переменная η зависит от времениподобного параметра τ (изменяется с течением времени), данным двум случаям соответствует движение пробной нуль-струны “навстречу” нуль-струне, порождающей гравитационное поле. При таком движении значения переменной η только увеличиваются, поэтому

$$\eta_{,\tau} > 0. \quad (34)$$

Случай $\eta_{,\tau} < 0$ описывает движение пробной нуль-струны в ту же сторону, что и нуль-струна, порождающая гравитационное поле, но с большей скоростью (т. е. со скоростью больше скорости света), что невозможно.

Для случая (32) уравнение (19) принимает вид

$$e^{2\nu} \eta_{,\tau} q_{,\tau} = e^{2\mu} (z_{,\tau})^2, \quad (35)$$

откуда, учитывая (34) и положительную определенность метрических функций, мы получаем

$$q_{,\tau} \geq 0. \quad (36)$$

Если

$$q_{,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = q_0(\sigma), \quad (37)$$

где $q_0(\sigma)$ – “константа” интегрирования, то из уравнения (35) вытекает, что

$$z_{,\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0(\sigma), \quad (38)$$

где $z_0(\sigma)$ – “константа” интегрирования.

В случае, когда верны соотношения (32), (37) и (38), уравнения (16)–(19) движения пробной нуль-струны выполняются тождественно, а уравнение (20) принимает вид $\eta_{,\tau} q_{,\sigma} = 0$, откуда, учитывая равенства (21), (34), (37), мы получаем, что $q = t - \rho = q_0 = \text{const}$. Это равенство показывает, что для случая (32), (37) замкнутая пробная нуль-струна в каждый момент времени находится на поверхности цилиндра. При этом начальная форма пробной нуль-струны, определяемая функциями $z_0(\sigma)$ и $\theta_0(\sigma)$, остается неизменной. Если в начальный момент времени пробная нуль-струна целиком лежит в плоскости $z = z_0 = \text{const}$, то и вся последующая ее динамика проходит в этой плоскости. Единственно возможная форма струны есть окружность, и с течением времени радиус этой окружности только увеличивается, т. е. пробная замкнутая нуль-струна радиально расширяется в плоскости $z = z_0$.

Из приведенного решения также следует, что принципиально возможно состояние (фаза) газа нуль-струн, состоящего из двух подсистем, в каждой из которых замкнутые нуль-струны, имеющие форму окружности, находятся в параллельных плоскостях $z = \text{const}$ (эффект поляризации) и одновременно радиально расширяются в одной подсистеме и радиально коллапсируют в другой, не изменяя своей формы.

В случае, когда верны соотношения (32), (34), первый интеграл уравнения (15) принимает вид

$$\eta_{,\tau} = P_1(\sigma) e^{-2\nu}, \quad (39)$$

где $P_1(\sigma)$ – “константа” интегрирования, причем

$$P_1(\sigma) > 0. \quad (40)$$

Можно показать, что если

$$q_{,\tau} > 0 \quad (41)$$

(см. неравенство (36)), то мы получаем с учетом равенства (35) первые интегралы уравнений (16), (17):

$$|f_{,z} z_{,\tau}| = \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \frac{|\lambda_{,\eta}|}{\lambda^2(\eta)} \eta_{,\tau}, \quad (42)$$

$$q_{,\tau} = \left(\frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \right)^2 \frac{|\lambda_{,\eta}|}{\lambda^2(\eta)} \eta_{,\tau}, \quad (43)$$

где функция $P_2(\sigma)$ (“константа” интегрирования) определяет в начальный момент времени скорости точек пробной нуль-струны по переменной z , причем, как следует из соотношений (34), (40), (42), мы имеем $P_2(\sigma) > 0$. Из уравнений (42), (43) видно, что переменные η , q и z , определяющие положение пробной нуль-струны в каждый фиксированный момент времени, для случая (32), (41) перестают быть независимыми и связаны между собой.

В уравнениях (42), (43) согласно соотношениям (8), (9) вся область изменения переменных η и z ($\eta \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$) в зависимости от знака производных функций $\lambda(\eta)$ и $f(z)$ распадается на четыре области:

$$\text{Область I : } \eta \in (-\infty, 0), \quad z \in (0, +\infty), \quad f_{,z} > 0, \quad \lambda_{,\eta} > 0; \quad (44)$$

$$\text{Область II : } \eta \in (-\infty, 0), \quad z \in (-\infty, 0), \quad f_{,z} < 0, \quad \lambda_{,\eta} > 0; \quad (45)$$

$$\text{Область III : } \eta \in (0, +\infty), \quad z \in (0, +\infty), \quad f_{,z} > 0, \quad \lambda_{,\eta} < 0; \quad (46)$$

$$\text{Область IV : } \eta \in (0, +\infty), \quad z \in (-\infty, 0), \quad f_{,z} < 0, \quad \lambda_{,\eta} < 0. \quad (47)$$

Согласно (8), (9) функции $f(z)$ и $\lambda(\eta)$ на границах этих областей (т. е. при $z = 0$ и $\eta = 0$) имеют экстремум и, следовательно, выполнены точные равенства

$$f_{,z}|_{z=0} = 0, \quad \lambda_{,\eta}|_{\eta=0} = 0.$$

Тогда из выражения (42) следует, что границы областей I–IV непроницаемы для пробной нуль-струны и в каждой из областей при приближении пробной нуль-струны к границе (поверхности) $\eta = 0$ в зависимости от начальных условий может реализоваться только два сингулярных сценария:

- пробная нуль-струна на границе $\eta = 0$ сталкивается с нуль-струной, порождающей гравитационное поле;
- приближаясь к границе $\eta = 0$, пробная нуль-струна выталкивается гравитационным полем по переменной z на бесконечность.

Интегрируя уравнение (43) в областях I, II (при $\lambda_{,\eta} > 0$) и в областях III, IV (при $\lambda_{,\eta} < 0$), находим

$$q = q_{0j}(\sigma) + \beta_j \left(\frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \right)^2 \frac{1}{\lambda(\eta)}, \quad (48)$$

где $q_{0j}(\sigma)$ – “константы” интегрирования, индекс j принимает значения 0, 1 и обозначает при $j = 0$ решение уравнения (43) в областях I, II (при $\eta < 0$), а при $j = 1$ – решение уравнения (43) в областях III, IV (при $\eta > 0$), константы β_j принимают значения $\beta_0 = -1$ и $\beta_1 = 1$.

Решение уравнения (42) в каждой из областей с учетом того, что в каждой из них может быть реализовано два случая $z_{,\tau} > 0$ и $z_{,\tau} < 0$, можно представить в виде

$$f_L^i = U_L^i(\sigma) + \gamma_L^i \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \frac{1}{\lambda(\eta)}, \quad (49)$$

где функции $U_L^i(\sigma)$ – “константы” интегрирования, индекс $L = \text{I, II, III, IV}$ соответствует номеру области, в которой реализуется найденное решение, индекс $i = 0, 1$ обозначает при $i = 0$ случай $z_{,\tau} > 0$ (движение пробной нуль-струны в положительном направлении оси z), а при $i = 1$ – случай $z_{,\tau} < 0$ (движение пробной нуль-

струны в отрицательном направлении оси z), константы γ_L^i , принимают следующие значения:

$$\gamma_I^0 = \gamma_{II}^1 = \gamma_{III}^1 = \gamma_{IV}^0 = -1, \quad \gamma_I^1 = \gamma_{II}^0 = \gamma_{III}^0 = \gamma_{IV}^1 = 1. \quad (50)$$

Функции $U_L^i(\sigma)$ с учетом того, что границы (поверхности) $z = 0$ и $\eta = 0$ непроницаемы для пробной нуль-струны, имеют вид

$$\begin{aligned} U_I^0 &= U_{II}^1 = U_{III}^1 = U_{IV}^0 = f_0 \left(1 + \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \right), \\ U_I^1 &= U_{II}^0 = U_{III}^0 = U_{IV}^1 = -f_0 \frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Из формул (49) видно, что в процессе движения положение пробной нуль-струны на оси z (расстояние до плоскости $z = 0$, в которой находится нуль-струна, порождающая гравитационное поле) жестко связано с ее радиусом (зависит от значения переменной η).

Также, поскольку функция $f(z)$, стоящая в левой части равенств (49), ограничена, а функция $\lambda(\eta)$, стоящая в знаменателе правой части этих равенств, стремится к нулю при $\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)$, то для любого выбора “констант” интегрирования всегда существует только некоторая конечная (ограниченная) и симметричная по переменной η область, где справедливы равенства (49). Но тогда, поскольку никаких ограничений на координаты пробной нуль-струны нет (в общем случае $\eta \in (-\infty, +\infty)$), только те пробные нуль-струны, которые находятся в этой узкой области (зоне взаимодействия), “видимы”, т. е. взаимодействуют с нуль-струной, порождающей гравитационное поле.

Те нуль-струны, которые в данный момент времени находятся вне этой зоны, согласно выражению (49) остаются “невидимыми” для нуль-струны, порождающей гравитационное поле. В данном случае нельзя говорить, что такие струны не взаимодействуют, поскольку в ОТО отсутствие взаимодействия проявляется в сохранении без изменения траектории движения, а в нашем случае мы не можем ничего сказать о траектории движения пробной нуль-струны вне данной области. Однако нельзя исключать, что в некоторый момент времени такая “невидимая” нуль-струна может попасть в эту область, и тогда ее последующая динамика будет определена по крайней мере до того момента времени, когда пробная нуль-струна эту область покинет. Другими словами пробная нуль-струна, попадая в эту узкую область, уже имеет некоторую предысторию, а ее динамика в этой области зависит от размера, местоположения, а также от уже сформировавшегося к этому времени закона изменения ее положения вдоль оси z , например от того, движется струна в положительном или отрицательном направлении оси z ($z_{,\tau} > 0$ или $z_{,\tau} < 0$). Данная динамика определяется равенством (49).

В случае, когда верны соотношения (39), (48), (49), уравнение (20) в областях I–IV принимает вид

$$\left(q_{0j}(\sigma) + \beta_j f_0 \left(\frac{P_2(\sigma)}{P_1(\sigma)} \right)^2 \right)_{,\sigma} = 0. \quad (52)$$

Функции $P_1(\sigma)$ и $P_2(\sigma)$ совместно с функциями $q_{0j}(\sigma)$ определяют соответственно начальные импульсы точек пробной нуль-струны и ее начальную форму, которая

в общем случае может быть произвольной. Однако из равенств (48), (52) следует, что вблизи границы $\eta = 0$ пробная нуль-струна целиком лежит на поверхности цилиндра, радиус которого совпадает с радиусом нуль-струны, порождающей гравитационное поле. Функции $P_k(\sigma)$, $k = 1, 2$, определяют начальные импульсы точек пробной нуль-струны. Как следует из равенств (49), требование

$$P_k(\sigma) = P_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad (53)$$

описывает случай, в котором форма пробной нуль-струны при движении не изменяется (остается окружностью), а изменение радиуса и положение на оси z определяется видом функций $f(z)$ и $\lambda(\eta)$.

Можно заметить, что в случае (53) равенства (52) сводятся к

$$(q_{0j}(\sigma))_{,\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{0j}(\sigma) = q_{0j} = \text{const}. \quad (54)$$

Значение констант q_{0j} в соответствии с формулами (48) определяет поверхность (по переменной ρ), на которой “встречаются” при движении “навстречу друг другу” пробная нуль-струна и нуль-струна, порождающая гравитационное поле.

Используя формулу (2), представим уравнение (39) в виде

$$\eta_{,\tau} \frac{|\lambda_{,\eta}|(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z))^{2-\sqrt{4-2\chi}}}{(\lambda(\eta))^{2+(2-\sqrt{4-2\chi})/(1-\chi)}} = P_1(\sigma). \quad (55)$$

Поскольку при всех η и z справедливы оценки

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z) < 1, \quad \chi = 8\pi G \ll 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - \sqrt{4 - 2\chi} \approx 0,$$

уравнение (55) можно представить в виде

$$\eta_{,\tau} \frac{|\lambda_{,\eta}|}{\lambda^2(\eta)} = P_1(\sigma).$$

Интегрируя полученное уравнение, находим связь переменной η с параметрами τ и σ на мировой поверхности пробной нуль-струны: в областях I, II (при $\eta < 0$) имеем

$$\frac{1}{\lambda(\eta)} = \eta_0(\sigma) - P_1(\sigma)\tau; \quad (56)$$

в областях III, IV (при $\eta > 0$) имеем

$$\frac{1}{\lambda(\eta)} = \tilde{\eta}_0(\sigma) + P_1(\sigma)\tau. \quad (57)$$

Здесь “константы” интегрирования $\eta_0(\sigma)$ и $\tilde{\eta}_0(\sigma)$ определяют значение времениподобного параметра на границах областей (при $\eta = 0$), т. е. значение параметра τ , при котором при движении “навстречу” пробная нуль-струна и нуль-струна, порождающая гравитационное поле, оказываются на одной поверхности. Так, для случая (53), фиксируя в (56), (57)

$$\eta_0(\sigma) = \tilde{\eta}_0(\sigma) = f_0 = \text{const}, \quad (58)$$

получаем, что $\tau = 0$ при $\eta = 0$. При этом $\tau \in (-\infty, 0)$ в областях I, II (при $\eta < 0$) и $\tau \in (0, +\infty)$ в областях III, IV (при $\eta > 0$).

Для случая (53), (54), (58) переменные η и q , определяемые равенствами (48), (56), (57), являются функциями только времениподобного параметра τ и связаны с ним следующим образом:

$$\eta = \mp \Lambda(f_0(1 - e^{-1/\epsilon})^{-1} + P_1|\tau|), \quad (59)$$

$$q_j = q_{0j} + \beta_j f_0 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 + \frac{P_2^2}{P_1} \tau, \quad (60)$$

где выбор знака в (59) определяется областью, в которой находится пробная нуль-струна (знак минус берется при $\eta < 0$, знак плюс – при $\eta > 0$), функция Λ в правой части (59) определяется явным видом функции $\lambda(\eta)$.

5. ПРИМЕРЫ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В СЛУЧАЕ $P_\theta(\sigma) = 0$

В областях I–IV в соответствии с соотношениями (6), (11), (49)–(51), (59), (60) решение уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} \eta &= \mp \frac{1}{\xi} \sqrt{\ln^{-1} \left(1 - \frac{f_0}{f_0(1 - e^{-1/\epsilon})^{-1} + P_1|\tau|} \right)^{-1} - \epsilon}, \\ q &= q_0 \mp f_0 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^2 + \frac{P_2^2}{P_1} \tau; \end{aligned} \quad (61)$$

при этом для случая $z_{,\tau} > 0$

$$f_{i,IV}(z) = f_0 - P_2|\tau|, \quad f_{II,III}(z) = P_2|\tau|, \quad (62)$$

а для случая $z_{,\tau} < 0$

$$f_{II,III}(z) = f_0 - P_2|\tau|, \quad f_{I,IV}(z) = P_2|\tau|, \quad (63)$$

где латинский индекс показывает номер области, в которой реализуется данное решение. В равенствах (61) выбирается верхний знак для областей I и II (для $\tau \in (-\infty, 0)$) и нижний знак для областей III и IV (для $\tau \in (0, +\infty)$). Границы зоны взаимодействия для пробной нуль-струны определяются максимально и минимально возможными значениями правой части равенств (62) и (63) соответственно в областях I, II (крайняя левая граница зоны взаимодействия) и в областях III, IV (крайняя правая граница зоны взаимодействия), которые достигаются при

$$|\tau| \rightarrow \frac{f_0}{P_2}. \quad (64)$$

Можно показать, что для гравитационного поля, заданного равенствами (1)–(9), значение константы f_0 определяет кривизну K пространства в малой окрестности поверхности $\eta = 0$ (на которой находится нуль-струна, порождающая гравитационное поле), а именно

$$K|_{\eta=0, z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)} \approx -\frac{\chi}{f_0^2}. \quad (65)$$

Рис. 1. Графики функций $t(\tau)$, $\rho(\tau)$ и $z(\tau)$ в областях I–IV для $z_{,\tau} > 0$ и $z_{,\tau} < 0$.

Таким образом, из равенств (64), (65) следует, что чем больше значение константы f_0 (т.е. чем ближе к нулю кривизна пространства на поверхности $\eta = 0$ для $z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (+\Delta z, +\infty)$) и чем меньше значение константы P_2 (определяющей в начальный момент времени скорости точек пробной нуль-струны по переменной z), тем шире зона взаимодействия пробной нуль-струны. В предельном случае, т.е. при $f_0 \rightarrow \infty$ или при $P_2 \rightarrow 0$, зона взаимодействия пробной нуль-струны распространяется на все пространство.

На рис. 1 приведены графики функций $t(\tau)$, $\rho(\tau)$ и $z(\tau)$ в областях I–IV для $f_0 = P_1 = 100$, $P_2 = 1$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\xi = \zeta = 5$, $\mu = 5$, $q_0 = -10$ в случаях $z_{,\tau} > 0$ и $z_{,\tau} < 0$.

Из представленных рисунков следует, что динамика пробной нуль-струны, попавшей в зону взаимодействия, существенно зависит от размера струны (при $\eta < 0$ пробная нуль-струна находится вне области, ограниченной поверхностью $\eta = 0$, а при $\eta > 0$ – внутри этой области) и направления движения вдоль оси z (нуль-струна движется вдоль оси z по направлению к нуль-струне, порождающей гравитацию).

тационное поле, или от нее). Так, например, если при попадании в зону взаимодействия пробная нуль-струна движется вдоль оси z по направлению к нуль-струне, порождающей гравитационное поле, то, как бы далеко по оси z она ни находилась, за очень короткий промежуток времени пробная нуль-струна притягивается гравитационным полем (вдоль оси z) к плоскости $z = 0$. В случае $\eta < 0$ (см. рис. 1 в области I для $z_{,\tau} < 0$ и в области II для $z_{,\tau} > 0$) пробная нуль-струна сталкивается в плоскости $z = 0$ с нуль-струной, порождающей гравитационное поле, а в случае $\eta > 0$ (см. рис. 1 в области III для $z_{,\tau} < 0$ и в области IV для $z_{,\tau} > 0$) пробная нуль-струна покидает зону взаимодействия.

Если при попадании в зону взаимодействия пробная нуль-струна движется вдоль оси z , удаляясь от нуль-струны, порождающей гравитационное поле, то пробная нуль-струна всегда за очень короткий промежуток времени выталкивается гравитационным полем (по оси z) на бесконечность (при $\eta < 0$ см. рис. 1 в области I для $z_{,\tau} < 0$ и в области II для $z_{,\tau} > 0$; при $\eta > 0$ см. рис. 1 в области III для $z_{,\tau} < 0$ и в области IV для $z_{,\tau} > 0$).

Следует отметить, что, поскольку границы областей I–IV непроницаемы для пробной нуль-струны и поскольку рассматривается движение пробной нуль-струны навстречу нуль-струне, порождающей гравитационное поле, то траектории, приведенные на рис. 1 в области III для $z_{,\tau} < 0$ и в области IV для $z_{,\tau} > 0$, могут наблюдаться только для струн, которые попали в зону взаимодействия либо в начальный момент времени (момент образования), либо после столкновения с нуль-струной, порождающей гравитационное поле.

Из приведенных графиков, описывающих движение пробной нуль-струны, видно, что если начальные скорости пробной замкнутой нуль-струны в направлении оси z отличны от нуля ($P_2 \neq 0$), то, независимо от начальных условий, каждая пробная нуль-струна, попавшая в зону взаимодействия, за очень короткий промежуток времени либо выталкивается на бесконечность гравитационным полем нуль-струны, порождающей гравитационное поле (по оси z), либо за очень короткий промежуток времени, как бы далеко она ни была, притягивается гравитационным полем (по оси z) к плоскости, в которой находится нуль-струна, порождающая гравитационное поле. Поведение пробной нуль-струны зависит от ее положения относительно плоскости, в которой находится нуль-струна, порождающая гравитационное поле, и направления движения вдоль оси z .

На наш взгляд, наличие для каждой пробной нуль-струны, попавшей в зону взаимодействия, аномальных участков траектории, на которых пробная нуль-струна за очень короткий промежуток времени или (ускоренно) выталкивается на бесконечность, или притягивается из бесконечности, может косвенно свидетельствовать о том, что способность к инфляции (причем как к ускоренному расширению, так и к ускоренному сжатию) является внутренним свойством газа нуль-струн, однако это утверждение еще требует дополнительного исследования.

6. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В СЛУЧАЕ $P_\theta(\sigma) \neq 0$

Можно показать, что для случая (33) с учетом равенств (15), (18) уравнения (16), и (17) совпадают, а их первый интеграл описывается формулой (19), которая для функций (2)–(4) при выполнении равенства (31) принимает вид

$$\frac{|\lambda_{,\eta}|}{\lambda^2(\eta)} q_{,\tau} \eta_{,\tau} - (f_{,z} z_{,\tau})^2 = P_\theta^2(\sigma) \left(\frac{(\lambda(\eta))^{1/(1-\chi)}}{\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)} \right)^2. \quad (66)$$

Из соотношений (31), (41), (66) следует, что для случая (33) переменные q , η , z и θ , определяющие положение пробной нуль-струны в каждый момент времени, не являются независимыми и связаны между собой. При этом согласно условиям (34), (41) мы имеем $\eta_{,\tau} > 0$, $q_{,\tau} > 0$, и только на границах областей I–IV выполняются точные равенства $f_{,z}|_{z=0} = 0$, $\lambda_{,\eta}|_{\eta=0} = 0$. Таким образом, из уравнения (66) видно, что ненулевое начальное вращение пробной нуль-струны приводит к следующим эффектам:

- граница (поверхность) $z = 0$ становится прозрачной для пробной нуль-струны;
- с двух сторон от поверхности $\eta = 0$ образуется запрещенная область (щель), внутри которой пробная нуль-струна не может находиться, ширина этой запрещенной области (щели) по переменной η тем больше, чем больше значение $P_\theta(\sigma)$; таким образом, в отличие от случая (32), наличие начального вращения пробной нуль-струны приводит к тому, что ни при каких начальных условиях пробная нуль-струна не может столкнуться с нуль-струной, порождающей гравитационное поле;
- при приближении по переменной η к границе запрещенной области (щели) пробная нуль-струна вне зависимости от начальных условий всегда выталкивается гравитационным полем на бесконечность (по переменной z).

Используя формулы (2), (3), (39) и учитывая, что $\chi \ll 1$, мы можем представить равенство (31) в виде

$$\theta(\tau, \sigma) = \theta_0(\sigma) \pm \frac{P_\theta(\sigma)}{P_1(\sigma)} \int \frac{|\lambda_{,\eta}| d\eta}{(1 - \lambda(\eta)(f_0 - f(z)))^2}. \quad (67)$$

Согласно условиям (8), (9) при $\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)$, а также если взять $z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (+\Delta z, +\infty)$, т. е. вне “размазанной” нуль-струны, равенство (67) принимает вид

$$\theta(\tau, \sigma) = \theta_0(\sigma) \pm \frac{P_\theta(\sigma)}{P_1(\sigma)} \int |\lambda_{,\eta}| d\eta. \quad (68)$$

Вычислив интеграл в правой части равенства в областях I, II (при $\lambda_{,\eta} > 0$) и в областях III, IV (при $\lambda_{,\eta} < 0$), находим решение: в областях I, II (при $\eta < 0$)

$$\theta(\tau, \sigma) = \theta_0(\sigma) \pm \frac{P_\theta(\sigma)}{P_1(\sigma)} \lambda(\eta); \quad (69)$$

в областях III, IV

$$\theta(\tau, \sigma) = \theta_0(\sigma) \mp \frac{P_\theta(\sigma)}{P_1(\sigma)} \lambda(\eta). \quad (70)$$

Выражение (69) показывает, что при приближении (по переменной η) пробной нуль-струны к нуль-струне, порождающей гравитационное поле, вращение пробной нуль-струны усиливается, достигая максимума на границе запрещенной области (щели), а при удалении вращение пробной нуль-струны уменьшается (см. выражение (70)).

7. ВЫВОДЫ

Анализ решений уравнений движения пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой “размазанной” нуль-струны, радиально коллапсирующей в плоскости $z = 0$, показал следующее.

1. При движении пробной нуль-струны в одном направлении с нуль-струной, порождающей гравитационное поле, в каждый момент времени пробная нуль-струна целиком лежит в плоскости, параллельной плоскости, в которой находится нуль-струна, порождающая гравитационное поле (что можно интерпретировать как эффект поляризации).

2. При движении пробной нуль-струны “навстречу” нуль-струне, порождающей гравитационное поле, мы наблюдаем следующие эффекты.

- Если начальные импульсы точек пробной нуль-струны в направлении оси z равны нулю, то в каждый момент времени все точки замкнутой пробной нуль-струны находятся на одинаковом расстоянии от оси z , а начальная форма пробной нуль-струны при движении остается неизменной. Если, кроме этого, в начальный момент времени пробная нуль-струна целиком лежала в плоскости $z = z_0$, то и вся последующая ее динамика проходит в этой плоскости, единственно возможной формой струны является окружность и с течением времени радиус этой окружности только увеличивается (пробная нуль-струна радиально расширяется в плоскости $z = z_0$).

- Если начальные импульсы точек пробной нуль-струны в направлении оси z не равны нулю, то при движении радиус пробной нуль-струны жестко связан с ее положением относительно нуль-струны, порождающей гравитационное поле. Для любого выбора “констант” интегрирования существует только некоторая “узкая” область (зона взаимодействия), где выполнены все равенства, определяющие динамику пробной нуль-струны, при этом только те пробные нуль-струны, которые находятся в этой узкой области, “видимы”, т.е. взаимодействуют с нуль-струной, порождающей гравитационное поле. Это позволяет говорить, что возможна реализация “зернистой” структуры пространства, заполненного газом нуль-струн.

3. Наличие для каждой пробной нуль-струны, попавшей в зону взаимодействия, аномальных участков траектории, на которой пробная нуль-струна за очень короткий промежуток времени или выталкивается на бесконечность, или притягивается из бесконечности, может свидетельствовать, что способность к инфляции (причем как к ускоренному расширению, так и к ускоренному сжатию) является внутренним свойством газа нуль-струн, однако это утверждение требует дополнительного исследования.

4. Мы показали, что ненулевое начальное вращение пробной нуль-струны существенно влияет на ее динамику.

- Поверхность $z = 0$ становится прозрачной для пробной нуль-струны.

- С двух сторон от поверхности $\eta = 0$ образуется запрещенная область (щель), внутри которой пробная нуль-струна не может находиться, причем ширина этой запрещенной области (щели) определяется величиной начальных импульсов точек пробной нуль-струны по переменной θ .

- Ни при каких начальных условиях пробная нуль-струна не может столкнуться с нуль-струной, порождающей гравитационное поле.

- Пробная нуль-струна вне зависимости от начальных условий всегда только выталкивается гравитационным полем на бесконечность (по переменной z).

- При приближении (по переменной η) пробной нуль-струны к нуль-струне, порождающей гравитационное поле, вращение пробной нуль-струны усиливается, достигая максимума на границе запрещенной области (щели), а при удалении вращение пробной нуль-струны уменьшается.

5. В начальный момент времени отдельные области газа нуль-струн (элементами которого являются замкнутые нуль-струны, радиально коллапсирующие или радиально расширяющиеся в параллельных плоскостях) причинно не связаны, таким образом, из результатов нашей работы следует, что может образовываться доменная структура такого газа. Другими словами, на наш взгляд, вполне возможно существование большого числа ограниченных в пространстве областей, внутри которых нуль-струны одновременно или радиально расширяются, или радиально коллапсируют в параллельных плоскостях. Однако положение этих плоскостей для каждого такого домена является случайным и не коррелирует с положением в соседних доменах.

Список литературы

- [1] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [2] А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, М., 1990.
- [3] T. Vachaspati, A. Vilenkin, "Formation and evolution of cosmic strings", *Phys. Rev. D*, **30**:10 (1984), 2036–2045.
- [4] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic String and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [5] M. B. Hindmarsh, T. W. B. Kibble, "Cosmic strings", *Rep. Progr. Phys.*, **58**:5 (1995), 477–562.
- [6] D. P. Bennett, "High resolution simulations of cosmic string evolution: numerics and long string evolution", *The Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge, 3–7 July, 1989), eds. G. W. Gibbons, S. W. Hawking, T. Vachaspati, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [7] A. Schild, "Classical null strings", *Phys. Rev. D*, **16**:6 (1977), 1722–1726.
- [8] C. T. Hill, D. N. Schramm, J. N. Fry, "Cosmological structure formation from soft topological defects", *Comments Nucl. Part. Phys.*, **19**:1 (1989), 25–39.
- [9] М. В. Сажин, О. С. Хованская, М. Капаччиоли, Дж. Лонго, Х. М. Алкала, Р. Сильвотти, М. В. Павлов, "Поиск гравитационных линз вблизи внегалактического двойного источника CSL-1", *Письма в Астрон. журн.*, **31**:2 (2005), 83–90, [arXiv:astro-ph/0406516](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406516).
- [10] R. Schild, I. S. Masnyak, B. I. Hnatyk, V. I. Zhdanov, "Anomalous fluctuations in observations of Q0957+561 A,B: Smoking gun of a cosmic string?", *Astron. Astrophys.*, **422**:2 (2004), 477–482, [arXiv:astro-ph/0406434](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406434).
- [11] S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, "Variational principle and a perturbative solution of non-linear string equations in curved space", *Nucl. Phys. B*, **543**:1–2 (1999), 365–386.
- [12] I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, "Null super p -branes quantum theory in 4-dimensional space-time", *Fortschr. Phys.*, **41**:7 (1993), 619–676.
- [13] И. А. Бандос, А. А. Желтухин, "Hamiltonian mechanics and absence of critical dimensions for null membranes", *ЯФ*, **50**:3 (1989), 893–900.
- [14] А. А. Желтухин, "Гамильтонова структура антисимметричного действия струны", *Письма в ЖЭТФ*, **46**:6 (1987), 208–210.

- [15] S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, “Friedmann universes and exact solutions in string cosmology”, *Class. Quantum Grav.*, **12**:10 (1995), 2519–2524.
- [16] Y. Cui, D. E. Morrissey, “Nonthermal dark matter from cosmic strings”, *Phys. Rev. D*, **79**:8, 083532, 13 pp., arXiv:0805.1060.
- [17] K. A. Oliv, *TASI lectures on dark matter*, arXiv:astro-ph/0301505.
- [18] G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, “Particle dark matter: evidence, candidates and constraints”, *Phys. Rept.*, **405**:5–6 (2005), 279–390.
- [19] O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, “Scalar-field potential distribution for a closed ‘thick’ null string moving in the plane $z = 0$ ”, *Ukr. J. Phys.*, **59**:5 (2014), 547–554.
- [20] O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, “Dynamics of a non-rotating test null string in the gravitational field of a closed ‘thick’ null string radially expanding or collapsing in the plane $z = 0$ ”, *Ukr. J. Phys.*, **59**:11 (2014), 1114–1125.

Поступила в редакцию 10.06.2015,
после доработки 14.03.2016