Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гласко, Об одном свойстве оператора ренормализационной группы, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 71–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:40:20

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

На примере изотропного ферромагнетика показано, что оператор ренормализационной группы можно рассматривать как оператор эволюции системы спинов с ростом приведенной температуры, т.е. как упорядочивающий оператор системы.

Ключевые слова: ренормализационная группа, преобразование Каданова, критическая точка, ферромагнетик, оператор эволюции, упорядочивающий оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что ренормализационная группа (РГ) играет важную роль в теоретической физике [1]–[4]. В то же время до сих пор обсуждаются два принципиальных вопроса [3]: о связи понятий РГ в квантовой теории поля и в теории критических явлений и о физическом смысле РГ.

В настоящей работе предлагается возможная физическая интерпретация РГ в теории критических явлений.

В этой теории оператор РГ $\hat{R}_s$ рассматривается как некоторое преобразование симметрии для гамильтониана системы многих частиц [5], не имеющее непосредственного физического смысла, т.е. преобразование внутри множества моделей системы (от одного модельного гамильтониана к другому) [1], [3]. Связь этого преобразования с поведением системы в окрестности критической температуры T_c устанавливается с помощью известной асимптотической формулы [5], [6]

$$\hat{R}_s \mu(\tau) \approx \mu^* + A \tau s^{y_1} \mathbf{e}_1 + f(s), \quad s \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\tau = 1 - T/T_c$ – приведенная температура, μ – точка в пространстве параметров гамильтониана, представляющая состояние системы, μ^* – неподвижная точка ($\hat{R}_s \mu^* = \mu^*$), s^{y_1} – собственное значение линеаризованного оператора РГ, $\mathbf{e}_1$ – соответствующий собственный вектор, A – некоторая постоянная, $f(s)$ – бесконечно малая величина.

*Московский государственный технический университет, Москва, Россия

Эта формула выражает ряд предположений о свойствах плотности распределения системы и позволяет получить все законы критического поведения физических величин (в отсутствие магнитного поля) и законы подобия.

В этой работе РГ будет исследоваться на примере модели изотропного ферромагнетика (размерность пространства $d = 3$, число компонент параметра порядка $n = 3$). Будет показано, что если рассматривать ферромагнетик просто как систему независимо распределенных магнитных моментов (“классических спинов”), равных по модулю единице, то оператор РГ в пределе малых τ можно отождествить с оператором эволюции плотности вероятности этой системы с ростом τ , т.е. *упорядочивающим* оператором системы спинов. Более того, формула (1), по-существу, и выражает условие, чтобы оператор РГ был эволюционным оператором плотности. Таким образом, преобразование РГ трактуется уже не как преобразование внутри множества моделей, а как переход между физическими состояниями системы при разных значениях температуры.

2. МОДЕЛЬ

Будем рассматривать ферромагнетик как систему ячеечных спинов, причем последние определим как классические (неквантовые) векторы (магнитные моменты), по модулю равные единице. В качестве вектора состояния этой системы примем плотность вероятности $p(\sigma)$ того, что случайно выбранный спин системы равен σ . Таким образом, будем описывать множество ячеечных спинов как совокупность независимо распределенных по закону $p(\sigma)$ случайных величин. Пространственное распределение ориентаций спинов нас интересовать не будет (ср. с [7]).

Как известно, при температуре ниже точки Кюри ($\tau > 0$) ферромагнетик обладает отличной от нуля намагниченностью $\mathbf{m}$. При уменьшении температуры (с ростом τ) эта намагниченность монотонно растет по модулю, не меняясь по направлению, и достигает максимального значения при абсолютном нуле ($\tau = 1$). Примем направление вектора намагниченности $\mathbf{m}$ за направление оси z и будем описывать систему спинов в сферической системе координат. Найдем общий вид плотности вероятности $p(\sigma)$ при $0 \leq \tau \leq 1$. Так как все спины по модулю равны единице ($|\sigma| = \sigma = 1$), то

$$p(\sigma) = \delta(\sigma - 1)f(\varphi, \theta),$$

где θ – угол, составляемый спином σ с осью z , φ – полярный угол ориентации спина.

Понятно, что распределение спинов по направлениям аксиально-симметрично относительно оси z , поэтому

$$p(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma - 1) y(\sigma_z),$$

где σ_z – проекция спина на ось z , $\sigma_z = \cos \theta$. Плотность $y(\sigma_z)$ является функцией приведенной температуры.

Рассмотрим эволюцию системы спинов с ростом τ . При $\tau = 0$ спины ориентированы *абсолютно хаотически*:

$$y(\sigma_z) = y_0 = \frac{1}{2},$$

т.е. вероятность того, что произвольно выбранный спин имеет любую проекцию на ось z , одинакова. При этом

$$p(\sigma) = p_0(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\delta(\sigma - 1).$$

При $\tau = 1$ система спинов *абсолютно упорядочена*:

$$y(\sigma_z) = \delta(\sigma_z - 1),$$

т.е. все спины ориентированы в направлении оси z . При этом

$$p(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\delta(\sigma - 1)\delta(\sigma_z - 1).$$

С ростом τ от 0 до 1 мера упорядоченности системы [8] растет и система эволюционирует из состояния абсолютного хаоса в состояние абсолютного порядка,

$$p(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi}\delta(\sigma - 1)y(\sigma_z, \tau).$$

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Обозначим через $\hat{\mathcal{E}}_\tau$ эволюционный оператор плотности вероятности, определенный соотношением

$$\hat{\mathcal{E}}_\tau p(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\delta(\sigma - 1)\delta(\sigma_z - 1), \quad \tau > 0, \quad (2)$$

т.е. оператор, переводящий состояние системы в “момент” τ в конечное (абсолютно упорядоченное) состояние.

Переходя в равенстве (2) к пределу $\tau \rightarrow 0$, получим

$$\hat{\mathcal{E}}_0 p_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{\mathcal{E}}_\tau p(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\delta(\sigma - 1)\delta(\sigma_z - 1). \quad (3)$$

Эволюционный оператор $\hat{\mathcal{E}}_0$ переводит начальное состояние системы, т.е. абсолютный хаос, в конечное, т.е. абсолютный порядок. Другими словами, это оператор, *упорядочивающий* систему спинов.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАДАНОВА

Первым этапом при построении РГ в теории критических явлений служит преобразование Каданова $\hat{K}_s$ [5], обычно определяемое следующим образом. Разобьем ферромагнитный образец на кубические блоки, каждый из которых содержит s^3 кристаллических ячеек. Каждому такому (кадановскому) блоку припишем спин σ' , равный среднему значению спинов входящих в него ячеек σ_i ,

$$\sigma' = \frac{1}{s^3} \sum_{i=1}^{s^3} \sigma_i. \quad (4)$$

Гамильтониан полученной системы блочных спинов называется блочным гамильтонианом. Под преобразованием Каданова обычно понимается преобразование исходного (ячеечного) гамильтониана в блочный. Понятно, что это преобразование можно применять повторно (и неоднократно) уже к блочному гамильтониану.

Мы будем рассматривать оператор Каданова непосредственно как преобразование вектора состояния системы $p(\sigma)$, а не гамильтониана (функцией которого вектор состояния является),

$$p'(\sigma') = \hat{K}_s p(\sigma).$$

Рассмотрим состояние системы спинов $p(\tau, \sigma)$ в малой правосторонней окрестности критической точки и определим, как преобразуется состояние этой системы под действием оператора Каданова при очень больших s , т.е. чему равен предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{K}_s p(\tau, \sigma).$$

Очевидно, что при $s \rightarrow \infty$, т.е. когда размер кадановского блока неограниченно растет, блочные спины стремятся к среднему значению спина по системе, т.е. к намагниченности образца $\mathbf{m}(\tau)$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma'(s) = \mathbf{m}(\tau). \quad (5)$$

При малых положительных значениях τ намагниченность отлична от нуля и представляет собой вектор, направленный вдоль оси z , с модулем, зависящим от τ ,

$$\mathbf{m} = m(\tau) \mathbf{k}, \quad (6)$$

где $\mathbf{k}$ — орт оси z . Более конкретно, функция $m(\tau)$ является монотонно возрастающей функцией τ , причем

$$m(0) = 0, \quad m(1) = 1.$$

Из соотношений (5) и (6) ясно, что блочные спины

$$\sigma'(s) \rightarrow m(\tau) \mathbf{k} \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Таким образом,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{K}_s p(\tau, \sigma) = \delta(\sigma' - m(\tau) \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma' - m(\tau)) \delta(\sigma'_z - \sigma'), \quad \tau > 0. \quad (8)$$

Доказательство формулы (8) проведем на основании теоремы Чебышева. Случайные величины σ_i распределены независимо по одному закону $p(\sigma)$. Математическое ожидание величин σ_i равно среднему значению спина по системе, т.е. намагниченности,

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathbf{m}(\tau). \quad (9)$$

Дисперсия величин σ_i конечна,

$$D\sigma_i = 1 - m^2(\tau) < \infty. \quad (10)$$

Действительно,

$$D\sigma_i = \langle (\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle)^2 \rangle = \langle \sigma_i^2 \rangle - \langle \sigma_i \rangle^2.$$

Учитывая, что $\sigma_i^2 = \sigma^2 = 1$, и принимая во внимание равенство (9), получим отсюда (10). На основании известного следствия теоремы Чебышева [9] заключаем, что последовательность случайных величин $\sigma'(s)$ (4) сходится по вероятности к $\langle \sigma_i \rangle$, т.е.

$$\sigma'(s) \xrightarrow{p} \mathbf{m} \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty,$$

т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ вероятность

$$P(|\sigma' - \mathbf{m}| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty,$$

а вероятность

$$P(|\sigma' - \mathbf{m}| < \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Однако последнее означает, что

$$p'(\sigma') \rightarrow \delta(\sigma' - \mathbf{m}) \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Учитывая (6), приходим к равенству (8).

Смысл формулы (8) состоит в том, что *оператор Каданова при $s \rightarrow \infty$ преобразует систему единичных спинов, ориентированных почти хаотически, в систему спинов, равных по модулю $m(\tau)$ и ориентированных в направлении оси z* . Если бы система, получаемая в результате преобразования Каданова, состояла из единичных спинов, то оператор

$$\hat{K}_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \hat{K}_s$$

можно было бы отождествить с эволюционным оператором $\hat{\mathcal{E}}_\tau$, определенным формулой (2). Однако ввиду того что $m(\tau) < 1$ при $\tau < 1$, преобразование Каданова нельзя рассматривать как изменение физического состояния системы спинов в процессе эволюции и оно представляет собой лишь некоторое преобразование симметрии.

Понятно, что для того чтобы система, получаемая в результате преобразования, состояла из единичных спинов, действие оператора Каданова нужно дополнить умножением блочных спинов на некоторый коэффициент.

5. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА

Преобразование РГ [5] отличается от преобразования Каданова тем, что блочные спины умножаются на коэффициент $s^{|a|}$,

$$\sigma''(s) = s^{|a|} \sigma'(s). \quad (11)$$

Плотность вероятности при этом преобразуется по формуле

$$p''(\sigma'') = \hat{R}_s p(\sigma) = (\hat{K}_s p(\sigma))_{\sigma' \rightarrow s^{-|a|} \sigma''}.$$

Зафиксируем значение τ немногим больше нуля и рассмотрим, как действует оператор $\hat{R}_s$ на плотность $p(\tau)$ при $s \rightarrow \infty$.

В силу соотношения (7) и поскольку $s^{|a|} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, все перенормированные блочные спины (11) с ростом s ориентируются вдоль оси z и неограниченно растут по модулю,

$$\sigma''(s) \sim s^{|a|} m(\tau) \mathbf{k} \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где

$$s^{|a|} m(\tau) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty,$$

так как $m(\tau) \neq 0$ при $\tau > 0$.

Таким образом, предел $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{R}_s p(\tau, \sigma)$ не существует.

Полученный результат можно условно описать следующим образом. *В пределе $s \rightarrow \infty$ оператор $\hat{R}_s$ преобразует систему единичных спинов, ориентированных почти хаотически, в абсолютно упорядоченную систему спинов, бесконечных по модулю.* Последняя система не имеет физического смысла, поэтому оператор РГ, так же как и оператор Каданова, нельзя рассматривать в качестве эволюционного оператора. Он по-прежнему является лишь абстрактным преобразованием симметрии.

Очевидно, что для того чтобы система, получаемая в результате преобразования, состояла из единичных спинов и оператор РГ можно было бы отождествить с эволюционным оператором (2), следует ввести зависимость параметра РГ s от τ . Причем эта зависимость должна быть такой, чтобы рост множителя $s^{|a|}$ в формуле (12) компенсировался убыванием функции $m(\tau)$, т.е. при $s \rightarrow \infty$ необходимо положить

$$s^{|a|} \sim \frac{1}{m(\tau)}.$$

6. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ТЕОРИИ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

Законы критического поведения макроскопических средних (намагниченности, теплоемкости, корреляционной функции $G(0)$) с изменением τ и соответствующие им законы подобия получаются из асимптотической формулы (1) путем введения зависимости параметра РГ s от τ ,

$$s = s(\tau) = c\tau^{-\nu}, \quad (13)$$

где по определению $\nu = 1/y_1$. Здесь y_1 – параметр, входящий в формулу (1). Отметим, что этот шаг означает согласование действия оператора РГ с эволюцией плотности вероятности. В результате формула (1) преобразуется к виду

$$\widehat{R}_{s(\tau)}\mu(\tau) \approx \mu^* + Ac^{y_1}\mathbf{e}_1 + f(\tau), \quad \tau \rightarrow 0,$$

или

$$\widehat{R}_{s(\tau)}\mu(\tau) = \text{const} + f(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (14)$$

где $f(\tau)$ – некоторая бесконечно малая функция. Другими словами, существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \widehat{R}_{s(\tau)}\mu(\tau).$$

В терминах плотности распределения это требование означает, что существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \widehat{R}_{s(\tau)}p(\tau), \quad (15)$$

или

$$\widehat{R}_{s(\tau)}p(\tau) = \text{const} + f(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (16)$$

где $f(\tau)$ – некоторая бесконечно малая величина. Здесь мы предполагаем, что плотность распределения $p(\tau, \sigma)$ является непрерывной функцией параметров μ , как, например, плотность Гинзбурга–Ландау.

Именно формула (16) (или (14)) и позволяет получить все законы критического поведения физических величин в зависимости от τ и соответствующие законы подобия. Например, намагниченность при действии оператора РГ преобразуется по формуле

$$m(p(\tau)) = s^a m(\widehat{R}_s p(\tau)).$$

Меняя s по закону (13), получим

$$m(p(\tau)) = \tau^{-\nu a} c^a m(\widehat{R}_{s(\tau)} p(\tau)).$$

В силу формулы (16) при малых τ имеем

$$m(p(\tau)) = \tau^{-\nu a} c^a m(\text{const} + f(\tau)), \quad \tau \rightarrow 0,$$

или

$$m(p(\tau)) \sim C\tau^\beta, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (17)$$

где

$$\beta = -\nu a,$$

а C – некоторое число. Подчеркнем, что формула (17) ничего не говорит о значении C . Ее смысл состоит лишь в том, что $m(p(\tau)) = O(\tau^\beta)$ при $\tau \rightarrow 0$.

Исследуем действие оператора $\hat{R}_{s(\tau)}$ на плотность $p(\tau)$ в пределе малых τ , т.е. найдем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{R}_{s(\tau)} p(\tau).$$

В результате согласования (13) действия $\hat{R}_s$ с эволюцией плотности как блочные спины, так и множитель $s^{|a|}$ в формуле (11) являются функциями τ , т.е.

$$\sigma'' = c^{|a|} \tau^{-\nu|a|} \sigma'(\tau). \quad (18)$$

В силу соотношений (5) и (13) при малых τ и соответственно при больших s блочный спин совпадает с намагниченностью, поэтому на основании (17) и (6) получим

$$\sigma'(\tau) \sim C\tau^\beta \mathbf{k}, \quad \tau \rightarrow 0,$$

и

$$\sigma'' \rightarrow \alpha \mathbf{k}, \quad \tau \rightarrow 0,$$

где $\alpha = Cc^{|a|}$.

Таким образом,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{R}_{s(\tau)} p(\tau, \sigma) = \delta(\sigma'' - \alpha \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma'' - \alpha) \delta(\sigma_z'' - \sigma''). \quad (19)$$

Последнее означает, что оператор $P\Gamma \hat{R}_{s(\tau)}$ в пределе $\tau \rightarrow 0$ преобразует абсолютно хаотическое состояние системы единичных спинов в абсолютно упорядоченное состояние системы спинов, равных по модулю величине α .

Подчеркнем, что равенство (19) является *необходимым* условием для выполнения асимптотической формулы (1) (если, конечно, выполняется естественное предположение о непрерывной зависимости плотности p от параметров μ) и *необходимым и достаточным* условием для выполнения ее следствия (16), порождающего все законы критической зависимости от τ .

Выбирая в (13)

$$c = C^{-1/|a|}, \quad (20)$$

получим из (19), что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{R}_{s(\tau)} p(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma'' - 1) \delta(\sigma_z'' - 1). \quad (21)$$

Отметим, что это равенство, так же как и закон критического поведения (17), можно было бы получить из условия (15) еще проще. Действительно, это условие эквивалентно требованию существования предела

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma''(\tau) = \mathbf{k} c^{|a|} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-\nu|a|} m(\tau)$$

в соответствии с формулами (18) и (5). Но для этого достаточно, чтобы

$$m(\tau) = O(\tau^{\nu|a|}), \quad \tau \rightarrow 0,$$

т.е. чтобы выполнялось соотношение (17) с некоторым числом C . В этом случае

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma''(\tau) = C c^{|a|} \mathbf{k}.$$

Выбрав c в виде (20), получим (21).

Смысл равенства (21) состоит в том, что оператор $PG \hat{R}_{s(\tau)}$ в пределе $\tau \rightarrow 0$ преобразует систему единичных спинов из абсолютно хаотического в абсолютно упорядоченное состояние.

Переобозначив переменные σ'' на σ , получим из (21), что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{R}_{s(\tau)} p(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma - 1) \delta(\sigma_z - 1). \quad (22)$$

Сравнивая это равенство с формулой (3), видим, что оператор $PG \hat{R}_\infty$, определенный соотношением

$$\hat{R}_\infty p_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \hat{R}_{s(\tau)} p(\tau, \sigma),$$

есть не что иное, как эволюционный оператор $\hat{\mathcal{E}}_0$,

$$\hat{R}_\infty = \hat{\mathcal{E}}_0,$$

т.е. оператор, упорядочивающий систему спинов.

Из соотношения (22) следует, что

$$\hat{R}_{s(\tau)} p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \delta(\sigma - 1) \delta(\sigma_z - 1) + f(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (23)$$

где $f(\tau)$ — бесконечно малая величина. Поэтому в силу равенства (2) имеем

$$\hat{R}_{s(\tau)} p(\tau) = \hat{\mathcal{E}}_\tau p(\tau) + f(\tau), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Таким образом, оператор PG , зависящий от τ в соответствии с формулой (13), при малых τ совпадает (в смысле действия на вектор состояния системы спинов) с эволюционным оператором плотности вероятности (2).

7. ФИЗИЧЕСКОЕ ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим связь между принятой трактовкой РГ как преобразования внутри множества моделей данной физической системы и предлагаемой здесь интерпретацией оператора РГ как эволюционного оператора системы.

Оператор РГ меняет параметры модельного гамильтониана μ и таким образом преобразует один модельный гамильтониан в другой. Поэтому его естественно рассматривать как преобразование внутри множества различных моделей одной физической системы. Однако параметры гамильтониана являются функциями температуры, $\mu = \mu(\tau)$. РГ Каданова–Вильсона является однопараметрической полугруппой. Если ввести определенную зависимость ее параметра от τ , $s = s(\tau)$ (а такая зависимость всегда вводится при выводе законов критического поведения), то изменение параметров гамильтониана под действием оператора РГ $\mu(s(\tau))$ будет соответствовать изменению температуры. Тогда РГ-преобразование модельного гамильтониана естественно рассматривать уже не как преобразование между различными моделями системы, а как преобразование физического состояния системы с изменением температуры.

Отметим, что полученный результат может быть использован как руководящий принцип или критерий при конструировании модельного гамильтониана физической системы. Действительно, так как соотношение (23), по-существу, эквивалентно асимптотической формуле (1), то для того чтобы плотность вероятности, соответствующая конструируемому гамильтониану, порождала законы критического поведения и законы подобия, нужно, чтобы она удовлетворяла уравнению (23).

Список литературы

- [1] Д. В. Ширков. ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 218.
- [2] В. Ф. Ковалев, Д. В. Ширков. ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 66.
- [3] D. V. Shirkov, V. F. Kovalev. Phys. Rep. 2001. V. 352. № 4–6. P. 219.
- [4] D. O'Connor, C. R. Stephens. Phys. Rep. 2001. V. 352. № 4–6. P. 215.
- [5] Ш. Ма. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.
- [6] К. Вильсон, Дж. Когут. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. М.: Мир, 1975.
- [7] В. Ж. Сакбаев. Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 434.
- [8] А. В. Гласко. Мера упорядоченности в статистических системах. Матем. заметки (в печати).
- [9] И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1982.

Поступила в редакцию 11.XI.2002 г.,
после доработки 21.II.2003 г.