Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Соловьев, Релятивистская кварковая модель мезонов, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 225–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:42:27

© 1998 г.

Л. Д. Соловьев*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ

Для описания мезонов, состоящих из кварка и антикварка с произвольными массами, предложена релятивистская квантовая модель, в которой кварки описываются уравнениями Дирака, а вклад глюонного поля учитывается в приближении прямолинейной струны. Модель хорошо описывает спектр мезонов и позволяет определить массы s -, c - и b -кварков и релятивистские волновые функции составных мезонов.

ВВЕДЕНИЕ

Наши основные представления о мезонах вытекают из простой кварковой модели, в которой кварк и антикварк, имеющие конституэнтные массы, связаны некоторым потенциалом. Однако понятие конституэнтной массы является сложным с точки зрения квантовой хромодинамики, поскольку эта масса описывает часть вклада глюонного поля (другая его часть проявляется в виде потенциала). Даже в этом случае движение кварков должно быть релятивистским, поскольку энергии возбуждений мезонов сравнимы с энергией основного состояния, что затрудняет количественное описание мезонов с помощью понятия потенциала [1].

В данной работе предложена релятивистская кварковая модель мезонов, которая может быть непосредственным следствием квантовой хромодинамики (отдельные результаты опубликованы в [2, 3]). В этой модели кварки описываются релятивистскими уравнениями для частиц со спином $1/2$, в которые входят токовые массы кварков. Понятие потенциала не вводится. Вместо него учитывается весь вклад глюонного поля как вклад релятивистской прямолинейной струны со взаимодействием Намбу–Гото.

Представление о том, что глюонное поле между кварком и антикварком, находящимися на достаточно большом расстоянии друг от друга, стягивается в тонкую трубку, описываемую струной Намбу–Гото, является весьма распространенным. Вычисления на решетке подтверждают этот механизм конфайнмента [4]. Мы предполагаем далее, что для мезонов, имеющих при данном спине и четности низшие массы, существенной является только простейшая конфигурация этой струны – прямолинейная. Прямолинейная струна может быть проквантована в обычном пространстве без нарушения релятивистской инвариантности [5, 6]. Сложные конфигурации струны, допускающие ре-

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: solovievl@mx.hep.su

лятивистское квантование, могут описывать более массивные мезонные состояния, называемые дочерними [7].

Таким образом, в классический лагранжиан нашей модели входят лагранжиан прямолинейной струны Намбу–Гото и лагранжианы Березина–Маринова [8], описывающие массивные кварки со спином $1/2$, движущиеся со скоростями концов струны ортогонально струне. Если пренебречь спинами кварков, то эта модель внутренне непротиворечива [9]. При учете спинов вводятся спиновые связи (необходимые для релятивистского описания спинов), которые должны сохраняться. Сохранение спиновых связей соответствует спиновой суперсимметрии уравнения Дирака [8, 10, 11]. Поэтому в лагранжиан модели входит еще один член, называемый лагранжианом взаимодействия, который обеспечивает сохранение спиновых связей и непротиворечивость модели в классическом приближении.

Квантование модели, как всегда, является отдельным постулатом и вводит дополнительные квантовые члены (обращающиеся в нуль в классическом приближении) с феноменологическими параметрами. Эти параметры, а также параметр универсального натяжения струны и массы кварков образуют набор свободных параметров модели.

При этом спектр модели хорошо описывает мезоны, состоящие из легких или тяжелых кварков и лежащие на главных реджевских траекториях и ближайших к ним траекториях, отличающихся пространственной или зарядовой четностью. Это позволяет определить все параметры модели, в том числе массы кварков $m_s = 224 \pm 7$ МэВ, $m_c = 1413 \pm 9$ МэВ и $m_b = 4710 \pm 26$ МэВ.

Легкие u - и d -кварки дают в формулы спектра пренебрежимо малый вклад, поэтому их массы не могут быть определены с помощью одной этой модели. Однако, зная m_s и используя формулы киральной SU_3 -симметрии в линейном приближении, получаем $m_u = 6.2 \pm 0.2$ МэВ и $m_d = 11.1 \pm 0.4$ МэВ.

Модель позволяет получить релятивистские волновые функции составных мезонов. Можно также вычислить вклад энергии кварков и энергии струны (глюонов) в массу каждого мезона. Для пиона, например, вклад легких, но ультрарелятивистских кварков (скорость $0.93c$) в его массу составляет 29%. Для ρ -мезона – это 12%, для φ -мезона вклад кварков составляет 60%, для J/ψ – 95% и для Υ – (97 ÷ 98)%.

Для мезонов, состоящих из тяжелых кварков и имеющих малые спины, струнный механизм конфайнмента действует недалеко от своего порога и дает относительно меньший вклад, чем в присутствии хотя бы одного легкого кварка. Поэтому детальная структура таких мезонов может заметно зависеть от небольших неструнных поправок, которые в этой работе мы учитываем самым простым образом. Задача данной работы – выяснить, дает ли универсальный струнный механизм существенный вклад и в этом случае, а также определить массы тяжелых кварков, которые в пределах указанных ошибок не зависят от небольших неструнных поправок.

Мезоны с нулевыми спинами (псевдоскаляры и скаляры) описываются моделью наравне с другими мезонами. Релятивистские кварки в них создают ненулевой средний орбитальный момент, который компенсируется собственными спинами кварков.

В разделе 5 спектр модели сравнивается с экспериментальными данными [12]. Указа-

ны недостающие данные для дальнейшей проверки модели и сделан ряд предсказаний.

В заключении приведены основные выводы, а также кратко обсуждаются дочерние траектории и возможные кандидаты на роль мезонов, не состоящих из кварка и антикварка.

Идея описания адронов с помощью струны с кварками на концах использовалась многими авторами [13–27]. Однако непротиворечивое введение спинов кварков в соответствии с работой [8], каноническое квантование, определение релятивистской волновой функции мезонов и сравнение с экспериментом для всех главных траекторий проделаны, по-видимому, впервые.

1. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЛАГРАНЖИАН

Выберем классический лагранжиан модели в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{стр}} + \sum \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (1)$$

где $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ – лагранжиан Намбу–Гото прямолинейной струны, $\mathcal{L}_i$ – классический лагранжиан релятивистской частицы со спином $1/2$ [8], имеющей скорость i -го конца струны, ортогональную направлению струны, и $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ – зависящий от спиновых переменных член, обеспечивающий сохранение спиновых связей. Здесь и в дальнейшем $\sum$ обозначает суммирование по $i = 1, 2$.

Для записи $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ введем обозначения переменных прямолинейной струны. Ее координаты в 4-мерном пространстве-времени даются выражением

$$x^\mu(\tau, \sigma) = r^\mu(\tau) + f(\tau, \sigma)q^\mu(\tau),$$

где τ и σ – релятивистски-инвариантные параметры эволюции и положения. Производная по τ обозначается точкой. Введем переменные

$$\begin{aligned} n &= \frac{q}{(-q^2)^{1/2}}, & b &= (-\dot{n}^2)^{1/2}, & v^1 &= \frac{\dot{n}}{b}, \\ \dot{r}_\perp^\mu &= (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu + v^{1\mu} v^{1\nu}) \dot{r}_\nu, \\ l &= \frac{(\dot{r}_\perp^2)^{1/2}}{b}, & v^0 &= \frac{\dot{r}_\perp}{bl}. \end{aligned}$$

Смысл этих переменных очевиден. Будем отсчитывать положение точек на струне от ее мгновенного центра вращения

$$y = (-q^2)^{1/2} f - z, \quad z = \frac{\dot{r} v^1}{b}.$$

Тогда (штрих обозначает производную по σ)

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2)^{1/2} d\sigma = -ab \int_{y_1}^{y_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy.$$

Классический релятивистский лагранжиан i -го кварка задается выражением [8]

$$\mathcal{L}_i = -m_i (\dot{x}_{iq}^2)^{1/2} - i((\dot{x}_{iq}^2)^{-1/2} \dot{x}_{iq} \xi_i - \xi_i^5) b \lambda_i - \frac{i}{2} (\xi_i \dot{\xi}_i - \xi_i^5 \dot{\xi}_i^5), \quad (2)$$

где m_i – масса покоя кварка; ξ_i^M , $M = \mu, 5$, и λ_i – антикоммутирующие между собой при фиксированном i спинорные переменные. С другими переменными (в том числе со спинорными переменными другого кварка) они коммутируют. Скорость i -го кварка совпадает со скоростью соответствующего конца струны, ортогональной направлению струны

$$\dot{x}_{iq} = b(lv^0 + y_i v^1).$$

Переменные λ_i являются вспомогательными множителями Лагранжа. Коэффициенты при них должны обращаться в нуль для физических состояний и определяют спинорные связи. Выберем λ_i так, чтобы

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \xi_2^M = \lambda_2 \xi_1^M = 0. \quad (3)$$

Алгебра Грассмана с такими свойствами может быть без труда реализована с помощью матриц достаточно большой размерности.

Для записи последнего члена в лагранжиане (1) введем в дополнение к трем ортонормированным векторам v^0 , v^1 и $v^3 \equiv n$ четвертый вектор

$$v_\mu^2 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} v^{0\nu} v^{3\rho} v^{1\sigma} \quad (\epsilon_{0123} = 1). \quad (4)$$

С помощью этих векторов определим инвариантные спинорные переменные $u_i^a = v^a \xi_i$, $a = 0, 1, 2, 3$, $u_i^5 = \xi_i^5$. Тогда член $\mathcal{L}_{\text{вз}}$, обеспечивающий сохранение спинорных связей в (2), принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -b \left(i \sum u_i^1 u_i^3 - \tilde{K}^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2 \right),$$

где

$$\tilde{K} = l \tilde{G}_l - \tilde{G},$$

индекс l обозначает производную по l и

$$\tilde{G}(l) = a \int_{y_1}^{y_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy + \sum m_i (l^2 - y_i^2)^{1/2}.$$

Из экстремума лагранжиана по y_i следует, что

$$y_i = (-1)^i l_i + k_i \lambda_i + r_i u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2, \quad (5)$$

$$l_i = \left(l^2 + \frac{\nu_i^2}{4} \right)^{1/2} - \nu_i/2, \quad \nu_i = \frac{m_i}{a}, \quad (6)$$

где k_i и r_i — известные выражения. При подстановке экстремального значения y_i (5) в лагранжиан члены с k_i и r_i обращаются в нуль, и возникает классический лагранжиан мезона

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -bF(l, u, \lambda) - \frac{i}{2} \sum \xi_{iM} \dot{\xi}_i^M, \\ F &= G(l) + i \sum F_{ia}(l) u_i^a \lambda_i + i \sum u_i^1 u_i^3 - K^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}K &= lG_l - G, \\ G(l) &= a \int_{-l_1}^{l_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy + \sum m_i (l^2 - l_i^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Величины l_i даются формулами (6) и

$$F_{i0} = l(\nu_i l_i)^{-1/2}, \quad F_{i1} = (-1)^i \left(\frac{l_i}{\nu_i} \right)^{1/2}, \quad F_{i2} = F_{i3} = 0, \quad F_{i5} = -1. \quad (8)$$

2. СВЯЗИ И ГАМИЛЬТониАН

Импульсы, канонически-сопряженные координатам r и q , равны

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (9)$$

Сохраняющийся благодаря трансляционной инвариантности импульс p является полным импульсом мезона, $m = \sqrt{p^2}$ — масса мезона. Сохраняются также полный угловой момент

$$M^{\mu\nu} = r^{[\mu} p^{\nu]} + q^{[\mu} \pi^{\nu]} - i \sum \xi_i^\mu \xi_i^\nu \quad (10)$$

и полный собственный угловой момент (полный спин) мезона

$$J_\mu = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma}}{2m} = L_\mu + S_\mu, \quad (11)$$

где

$$L_\mu = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu q^\rho \pi^\sigma}{m} \quad (12)$$

— орбитальный спин и

$$S_\mu = \sum \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu \xi_i^\rho \xi_i^\sigma}{2im} \quad (13)$$

— собственно кварковый спин мезона.

Лагранжиан (7) описывает протяженную релятивистскую систему. Для релятивистского описания, как обычно, введены лишние с физической точки зрения переменные, которые исключаются вследствие репараметризационной симметрии лагранжиана. Лагранжиан (7) инвариантен относительно преобразований, зависящих от трех

функций τ . Поэтому координаты и импульсы (9) подчиняются трем (помимо спиновых) уравнениям (связям), которые записываются в виде равенства нулю трех функций (также называемых связями) [11]

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= pq, & \varphi_2 &= \pi q, \\ \varphi_3 &= \sqrt{q^2 \pi_1^2} - l F_l(l, u, \lambda) + F(l, u, \lambda),\end{aligned}$$

где l – функция p , u и λ , определяемая равенством

$$F_l(l, u, \lambda) = \sqrt{p_1^2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}p_1 &= p + l^{-1} \sum (F_{(0i)} u_i^2 + F_{(2i)} u_i^0) v^2, \\ \pi_1^\mu &= \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{pp_1} \right) \left\{ \pi_\nu - (-q^2)^{-1/2} \sum \left[(F_{(0i)} u_i^1 + F_{(1i)} u_i^0) v_\nu^0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-F_{(1i)} u_i^2 + F_{(2i)} u_i^1) v_\nu^2 \right] \right\}.\end{aligned}$$

Индекс (ai) обозначает производную по u_i^a . В эти выражения входят скорости v , которые нужно выразить через импульсы и координаты с помощью равенств

$$v^0 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2}}, \quad v^1 = \frac{\pi_1}{\sqrt{-\pi_1^2}}$$

и определения v^2 (4). Прделав эти вычисления, получаем

$$\varphi_3 = \sqrt{-J^2} - K(l(m)) + i \sum F_{ia}(l(m)) c_i^a \lambda_i, \quad (14)$$

где J – спин мезона, $l(m)$ – функция m , задаваемая соотношением

$$\begin{aligned}G_l(l) &= m, \\ c_i^a &= n^a \xi_i, \quad a = 0, 1, \quad c_i^5 = \xi_i^5, \\ n^0 &= \frac{p}{m}, \quad n^1 = \frac{\pi_\perp}{\sqrt{-\pi_\perp^2}}, \\ \pi_{\perp\mu} &= (g_{\mu\nu} - n_\mu^0 n_\nu^0 + n_\mu^3 n_\nu^3) \pi^\nu, \quad n_\mu^3 = (g_{\mu\nu} - n_\mu^0 n_\nu^0) n^\nu.\end{aligned}$$

Канонический гамильтониан, соответствующий нашему релятивистскому лагранжиану, равен нулю, поэтому гамильтониан системы есть линейная комбинация ее связей [28], т. е.

$$H = \sum_{i=1}^3 d_i \varphi_i, \quad (15)$$

где параметры d_i произвольны ($d_3 = b$). Динамика системы определяется уравнением движения

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial \tau} + \{Z, H\}, \quad (16)$$

где Z – любая из динамических переменных, скобками Пуассона

$$\{p^\mu, r^\nu\} = \{\pi^\mu, q^\nu\} = g^{\mu\nu}, \quad \{\xi_i^M, \xi_i^N\} = ig^{MN} \quad (17)$$

(остальные скобки равны нулю, матрица g^{MN} диагональна, $g^{55} = -1$) и связями

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (18)$$

которые полагаются равными нулю, после того как вычислены скобки в (16). Начальные данные удовлетворяют связям.

Связи φ_i сохраняются, что следует из симметрии лагранжиана.

Однако из формул (14), (15) и произвольности λ_i (с учетом условий (3)) вытекают дополнительные спинные связи

$$\varphi_{3+i} = F_{ia} c_i^a = 0, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Для сохранения этих связей должны обращаться в нуль их скобки Пуассона с гамильтонианом (15). Это действительно имеет место. Их скобки с $\varphi_{1,2}$ равны нулю из симметрии лагранжиана, скобки с $\sqrt{-J^2} - K(l(m))$ равны нулю, поскольку равны нулю скобки J с каждым релятивистским скаляром. Нетрудно проверить, что для $a, b = 0, 1, 3, 5$ выполняется равенство

$$\{c_i^a, c_i^b\} = ig_{ab}, \quad g_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1),$$

поэтому $\{\varphi_{3+i}, d_3 i \varphi_{3+i} \lambda_i\} = -g^{ab} F_{ia} F_{ib} d_3 \lambda_i$, и необходимым условием сохранения являются равенства

$$g^{ab} F_{ia} F_{ib} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Коэффициенты F_{ia} (8) им удовлетворяют. Наконец,

$$\{\varphi_{3+i}, d_3 i \varphi_{3+j} \lambda_j\} = 0, \quad i \neq j,$$

в силу (17) (и (3)), если бы в (19) входили члены с $a = 3$.

Таким образом, гамильтониан (15) и связи (18), (19) можно переписать в виде

$$H = \sum_{i=1}^5 h_i \phi_i, \quad \phi_i = F_{ia} c_i^a, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

$$\phi_3 = \sqrt{-J^2} - K(l(m)), \quad G_l(l) = m, \quad (21)$$

$$\phi_4 = pq, \quad \phi_5 = \pi q. \quad (22)$$

В заключение этого раздела заметим, что $m_i F_{i0} = m_i l (\nu_i l_i)^{-1/2}$ есть энергия i -го кварка в системе покоя мезона и

$$v_i = \frac{l_i}{l} \quad (23)$$

— величина его скорости (в единицах c). Масса мезона в (21) может быть представлена как сумма вкладов струны и кварков,

$$m = E_0 + \sum E_i, \\ E_0 = al \int_{-l_1}^{l_2} (l^2 - y^2)^{-1/2} dy, \quad E_i = m_i l (\nu_i l_i)^{-1/2}.$$

В этих формулах $l = l(m)$ есть функция из (21).

3. ПЕРЕХОД К НЕЗАВИСИМЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Удобно уменьшить произвол в гамильтониане (20), введя калибровочные условия

$$p\pi = 0, \quad \pi^2 = -1 \quad (24)$$

и новые независимые переменные $k^{(a)}, L^{(a)}, \xi_i^{(M)}, p, z$. Из сохранения калибровочных условий следует, что $h_{4,5} = 0$. Первоначальные переменные π, q, ξ_i^M, p, r при выполнении условий (22), (24) выражаются через новые с помощью тетрады векторов $e_\alpha(p)$, $\alpha = 0, a$, $a = 1, 2, 3$, причем

$$e_0 = \frac{p}{m}, \quad e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (25)$$

Прежде всего разложим по тетраде четырехмерные спины (11)–(13)

$$A = A^{(a)} e_a, \quad A = L, J, S, \quad (26)$$

и будем рассматривать три компоненты орбитального спина $L^{(a)}$ как независимые переменные. Тогда формулы связи первоначальных и новых переменных приобретают вид

$$\pi = k^{(a)} e_a, \quad q = \epsilon_{abc} k^{(a)} L^{(b)} e_c, \\ \xi_i^\mu = \xi_i^{(\alpha)} e_\alpha^\mu, \quad \xi_i^5 = \xi_i^{(5)}, \\ z^\mu = r^\mu + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_a^\nu \frac{\partial e_{b\nu}}{\partial p_\mu} J^{(c)} + \frac{i}{p^2} \sum (p \xi_i) \xi_i^\mu$$

и

$$J^{(a)} = L^{(a)} + \sum S_i^{(a)}, \quad S_i^{(a)} = \frac{\epsilon_{abc} \xi_i^{(b)} \xi_i^{(c)}}{2i}. \quad (27)$$

Для нахождения скобок Пуассона независимых переменных проще всего воспользоваться методом симплектической формы и ее редукции при наложении условий (22), (24) [6, 29]. В результате получаем, что

$$\{p^\mu, z^\nu\} = g^{\mu\nu}, \\ \{L^{(a)}, L^{(b)}\} = \epsilon_{abc} L^{(c)}, \quad \{L^{(a)}, k^{(b)}\} = \epsilon_{abc} k^{(c)}, \\ \{\xi_i^{(M)}, \xi_i^{(N)}\} = i g^{MN}$$

(остальные скобки равны нулю). Справедливы также равенства

$$\{J^{(a)}, Z^{(b)}\} = \epsilon_{abc} Z^{(c)}, \quad \{L^{(a)}, S_i^{(b)}\} = 0,$$

где $Z = J, L, S_i, k, q$ или ξ_i . Для величин с индексом (a) будем использовать обозначения трехмерных векторов

$$(Z^{(a)}) = \vec{Z}.$$

Введенные переменные не являются полностью независимыми:

$$\vec{k}^2 = 1, \quad \vec{k} \vec{L} = 0. \quad (28)$$

Однако эта зависимость обычным образом учитывается введением переменных сферической системы координат.

Оставшиеся связи в новых переменных записываются в виде

$$\phi_i = F_{i0} \xi_i^{(0)} - F_{i1} \vec{k} \vec{\xi} - \xi_i^{(5)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

$$\phi_3 = \sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)), \quad G_l(l) = m. \quad (30)$$

Коэффициенты $F_{ia}(l(m))$ определены формулами (6), (8).

4. КВАНТОВАНИЕ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Каноническое квантование проводится заменой независимых переменных на операторы, их скобок Пуассона на коммутаторы (антикоммутаторы для нечетных переменных) и наложением операторных связей на волновые функции:

$$[p^\mu, z^\nu]_- = i g^{\mu\nu}, \quad [L^{(a)}, L^{(b)}]_- = i \epsilon_{abc} L^{(c)}, \quad [L^{(a)}, k^{(b)}]_- = i \epsilon_{abc} k^{(c)}$$

и

$$[\xi_i^{(M)}, \xi_i^{(N)}]_+ = -g^{MN} \quad (31)$$

(остальные коммутаторы равны нулю),

$$\phi_i \Psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Соотношения (27), (28) выполняются и для операторов. При этом

$$[J^{(a)}, Z^{(b)}]_- = i \epsilon_{abc} Z^{(c)}, \quad Z = J, L, S_i, k, \xi_i.$$

Квантовая теория является релятивистски-инвариантной, поскольку операторы импульса и углового момента (10), (26), (27) удовлетворяют алгебре Пуанкаре. Теория не зависит от выбора тетрады (25), поскольку она инвариантна относительно поворотов в пространстве индексов (a) , генераторами которых являются величины $J^{(a)}$.

Два первых уравнения (32) с операторами (29) являются уравнениями Дирака для кварков, и мы не будем рассматривать для них каких-либо дополнительных квантовых

поправок. Для третьего же уравнения такие поправки следует рассмотреть. В самом деле, классический лагранжиан естественно было считать четным элементом алгебры Грассмана каждого спина. Этим же свойством обладает и связь (30). Теперь это ограничение отпадает. Кроме того, в теорию могут входить операторы, которые в классическом приближении при выполнении связей (29) обращались в нуль.

Для квантовой системы с двумя спинами $1/2$, орбитальным спином и фиксированным полным спином и импульсом имеются четыре ротационно-инвариантных набора состояний (два для нулевого полного спина). Следовательно, существуют четыре проектора на эти состояния. Поскольку сумма проекторов равна единичному оператору, то должны существовать, помимо единичного, еще три оператора, коммутирующих с операторами Дирака. Такими операторами являются

$$\begin{aligned} O^0 &= 1, \quad O^n = o_1^n o_2^n, \quad n = 1, 2, 3, \\ o_i^1 &= -2\sqrt{2}\xi_i^{(0)}\xi_i^{(5)}(\vec{\xi}_i\vec{k}), \\ o_i^2 &= \sqrt{2}(\vec{J}^2)^{-1/2}\xi^{(a)}(\delta_{ab} - k^{(a)}k^{(b)})J^{(b)}, \\ o_i^3 &= \sqrt{2}(\vec{J}^2)^{-1/2}\vec{\xi}_i(\vec{k} \times \vec{J}). \end{aligned}$$

При нулевом полном спине $o_i^2 = o_i^3 = O^2 = O^3 = 0$. Поскольку оператор $\xi_i^{(5)}$, подчиняющийся условию (31), можно выбрать в виде $\xi_i^{(5)} = -2i\sqrt{2}\xi^{(0)}\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)}$, то операторы o_i^n удовлетворяют алгебре матриц Паули (при ненулевом полном спине):

$$o_i^n o_i^m = \delta_{nm} + i\epsilon_{nmt} o_i^t. \quad (33)$$

Поэтому операторы O^n коммутируют между собой, имеют единичные квадраты и удовлетворяют условию $O^n O^m = \delta_{nm} - (\epsilon_{nmt})^2 O^t$.

В качестве ϕ_3 будем рассматривать оператор

$$\phi_3 = \sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)) - \sum_n b_n O^n, \quad (34)$$

$n = 0, 1, 2, 3$, где b_n — параметры (за исключением случая смешивания в следующем разделе).

Выберем представление, в котором p^μ и $k^{(a)}$ диагональны. Операторы ξ , удовлетворяющие условию (31), реализуются γ -матрицами Дирака [8]. При этом для античастиц их надо использовать в зарядово-сопряженном представлении. Пусть антикварком является вторая частица, тогда

$$\begin{aligned} \xi_1^{(\mu)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5\gamma^\mu \otimes I, & \xi_1^{(5)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5 \otimes I, \\ \xi_2^{(\mu)} &= \xi_1^{(\mu)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{5c}\gamma^{\mu c}, & \xi_2^{(5)} &= \xi_1^{(5)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{5c}, \end{aligned}$$

где индекс c обозначает зарядовое сопряжение, которое для матрицы $O = O_1 \otimes O_2$ определяется формулами

$$O^c = O_2^c \otimes O_1^c, \quad O_i^c = C O_i C^{-1},$$

где C – матрица зарядового сопряжения:

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}, \quad C\gamma^5 C^{-1} = \gamma^{5T}, \quad C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C.$$

В дальнейшем будем использовать представление

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция $\Psi_{\alpha\beta}$ является биспинором. Воспользуемся для нее матричной записью, когда транспонированная матрица второй частицы действует на нее справа. Тогда первые два уравнения (32) имеют вид

$$(F_{10}\gamma^0 - F_{11}\vec{\gamma}\vec{k} - 1)\Psi = 0, \quad (35)$$

$$\Psi(F_{20}\gamma^0 - F_{21}\vec{\gamma}\vec{k} + 1) = 0. \quad (36)$$

Матрицу Ψ можно записать через спиноры: $\Psi = u(1)\bar{v}(2)$, $\bar{v} = u^T C$.

Нормированное условием

$$\int \text{Sp}(\Psi^\dagger \Psi) d\vec{k} = 1$$

решение уравнений (35), (36) имеет вид

$$\Psi = N \begin{pmatrix} -b_2\varphi\vec{\sigma}\vec{k} & \varphi \\ b_1b_2\vec{\sigma}\vec{k}\varphi\vec{\sigma}\vec{k} & -b_1\vec{\sigma}\vec{k}\varphi \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где φ – двумерная матрица,

$$\varphi = \varphi(1)\chi^T(2), \quad \chi = -i\sigma_2\varphi,$$

$$b_i = \frac{l_i}{l + \sqrt{\nu_i l_i}}, \quad N = ((1 + b_1^2)(1 + b_2^2))^{-1/2}.$$

Оператор полного спина мезона (27) имеет вид

$$\vec{L} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \otimes I + I \otimes \frac{1}{2}\vec{\Sigma}^c, \quad (38)$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma}^c = \begin{pmatrix} \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 \end{pmatrix} = -\vec{\Sigma}^*. \quad (39)$$

Выберем в качестве φ собственные функции операторов $\vec{j}^2$, $j^{(3)}$, $\vec{L}^2$, $\vec{s}^2$ (строчными буквами обозначены двумерные блоки (38), (39)):

$$\varphi = \varphi_{jMlS}(\vec{k}),$$

$$\vec{j}^2\varphi = j(j+1)\varphi, \quad j^{(3)}\varphi = M\varphi,$$

$$\vec{L}^2\varphi = l(l+1)\varphi, \quad \vec{s}^{(2)}\varphi = S(S+1)\varphi,$$

где j, l – целые неотрицательные числа, $S = 0, 1$ и $l = j \pm S, j$. При выводе этих формул можно сначала положить $\varphi = \varphi' i \sigma_2$. Тогда оператор спина для φ' имеет обычный вид, и φ'_{jMLS} находится с помощью обычных коэффициентов Клебша–Гордана. После этого получаем, что $\varphi_{jMLS} = \varphi'_{jMLS} i \sigma_2$.

Таким образом, для каждого j имеем четыре независимые функции Ψ_{jMLS} . Рассмотрим также следующие линейные комбинации этих функций:

$$\varphi_0 = \varphi_{jMj0}, \quad \varphi_1 = \varphi_{jMj1}, \quad (40)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j+1} \varphi_{jM,j-1,1} + \sqrt{j} \varphi_{jM,j+1,1} \right), \quad (41)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \varphi_{jM,j-1,1} - \sqrt{j+1} \varphi_{jM,j+1,1} \right). \quad (42)$$

Используя свойства сферических функций, можно показать, что

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_0 &= \varphi_0 \vec{\sigma} \vec{k} = \varphi_3, & \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_3 &= \varphi_3 \vec{\sigma} \vec{k} = \varphi_0, \\ \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_1 &= -\varphi_1 \vec{\sigma} \vec{k} = -\varphi_2, & \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_2 &= -\varphi_2 \vec{\sigma} \vec{k} = -\varphi_1. \end{aligned}$$

Подставляя функции (40)–(42) в (37), получаем четыре независимые волновые функции Ψ_n , являющиеся собственными функциями операторов полного спина и его проекции:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Psi_n &= j(j+1) \Psi_n, & J^{(3)} \Psi_n &= M \Psi_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \\ \Psi_0 &= \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_3 & \varphi_0 \\ b_1 b_2 \varphi_0 & -b_1 \varphi_3 \end{pmatrix}, & \Psi_1 &= \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_2 & \varphi_1 \\ -b_1 b_2 \varphi_1 & b_1 \varphi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_1 & \varphi_2 \\ -b_1 b_2 \varphi_2 & b_1 \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_0 & \varphi_3 \\ b_1 b_2 \varphi_3 & -b_1 \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Пространственная четность этих функций

$$P \Psi(\vec{k}) = \gamma^0 \Psi(-\vec{k}) \gamma^0$$

определяется выражениями

$$P \Psi_{jMLS} = -(-1)^l \Psi_{jMLS}, \quad P \Psi_{0,1} = -(-1)^j \Psi_{0,1}, \quad P \Psi_{2,3} = (-1)^j \Psi_{2,3}. \quad (45)$$

Зарядово-сопряженная волновая функция

$$\Psi^c(\vec{k}) = C \Psi^T(-\vec{k}) C^T$$

при $m_1 = m_2$ удовлетворяет уравнениям Дирака (35), (36), при этом

$$\Psi_{jMLS}^c = (-1)^{l+S} \Psi_{jMLS}, \quad \Psi_{0,2,3}^c = (-1)^j \Psi_{0,2,3}, \quad \Psi_1^c = -(-1)^j \Psi_1. \quad (46)$$

Оператор (34) спектра мезонов ϕ_3 P - и C -четен, поэтому мезоны характеризуются спин-четностью j^{PC} в соответствии с формулами (45), (46). Мезоны, не имеющие определенной C - или G -четности, рассматриваются в следующем разделе.

Скорость легких кварков в мезонах (23) близка к единице. Такие мезоны нельзя описывать с помощью сохраняющихся орбитального и собственного спинного моментов. Так, пионы 0^{-+} или $a_0(980)0^{++}$, состоящие из легких кварков, имеют волновые функции Ψ_0 и Ψ_3 (43), (44) с $b_i \cong 0$ и $j = 0$:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_{0011} & \varphi_{0000} \\ \varphi_{0000} & \varphi_{0011} \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_{0000} & \varphi_{0011} \\ \varphi_{0011} & \varphi_{0000} \end{pmatrix},$$

для которых средние значения квадратов орбитального и собственного спинов следующие: $\overline{\vec{L}^2} = 1$, $\overline{\vec{S}^2} = 1$ (вместо нулей в случае нерелятивистской кварковой модели), при этом $\overline{\vec{L}\vec{S}} = -1$.

Для состояний 1^{--} имеем

$$\begin{aligned} \Psi_2: \quad \overline{\vec{L}^2} &= 2, & \overline{\vec{S}^2} &= 2, & \overline{\vec{L}\vec{S}} &= -1, \\ \Psi_3: \quad \overline{\vec{L}^2} &= 3, & \overline{\vec{S}^2} &= 1, & \overline{\vec{L}\vec{S}} &= -1, \end{aligned}$$

в то время как для ρ -мезона в нерелятивистской модели $\vec{L}^2 = 0$, $\vec{S}^2 = 2$, $\vec{L}\vec{S} = 0$. Таким образом, структура мезонов в данной модели существенно отличается от нерелятивистского случая. Если в нерелятивистской модели пиона кварки в среднем покоятся относительно друг друга, а их спины направлены в противоположные стороны, то здесь релятивистские кварки вращаются относительно некоторого центра, создавая в среднем единичный орбитальный момент. Их спины в среднем направлены в одну сторону, противоположную направлению среднего орбитального момента. У ρ -мезона нерелятивистской модели кварки также покоятся, а их спины направлены в одну сторону. В данной модели кварки в состоянии Ψ_2 создают средний орбитальный момент $\sqrt{2}$, а спины кварков направлены в среднем в одну сторону под углом 120° к среднему орбитальному моменту.

Для тяжелых кварков, когда сумма их масс близка к массе мезона, $b_i \cong 0$,

$$\Psi_{jMS} \cong \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{jMS} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и мы получаем волновые функции нерелятивистской теории.

5. СПЕКТР МАСС И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Массовый спектр состояний определяется третьим уравнением (32). В операторе ϕ_3 (34) в используемом представлении надо положить

$$O^n = o^n \otimes o^{nc}$$

и

$$o^1 = \vec{\Sigma} \vec{k}, \quad o^2 = (\vec{J}^2)^{-1/2} \gamma^0 \vec{\Sigma}_k \vec{J}, \quad o^3 = (\vec{J}^2)^{-1/2} \gamma^0 \vec{\Sigma}(\vec{k} \times \vec{J}). \quad (47)$$

Действие этих операторов на волновые функции (43), (44) следует из свойств сферических функций

$$\begin{cases} o^1 \Psi_0 = -\Psi_0 o^{1cT} = \Psi_3, & o^1 \Psi_1 = \Psi_1 o^{1cT} = -\Psi_2, \\ o^2 \Psi_0 = -\Psi_0 o^{2cT} = \Psi_1, & o^2 \Psi_2 = \Psi_2 o^{2cT} = \Psi_3, \\ o^3 \Psi_0 = -\Psi_0 o^{3cT} = i\Psi_2, & o^3 \Psi_1 = \Psi_1 o^{3cT} = -i\Psi_3 \end{cases} \quad (48)$$

(остальные соотношения получаются из условия (33)). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} O^1 \Psi_{0,3} &= -\Psi_{0,3}, & O^1 \Psi_{1,2} &= \Psi_{1,2}, \\ O^2 \Psi_{0,1} &= -\Psi_{0,1}, & O^2 \Psi_{2,3} &= \Psi_{2,3}, \\ O^3 \Psi_{0,2} &= -\Psi_{0,2}, & O^3 \Psi_{1,3} &= \Psi_{1,3}. \end{aligned}$$

Спектральное уравнение (32) запишем в виде

$$\left(\sqrt{\vec{J}^2} - K - \sum_n a_n P_n \right) \Psi = 0, \quad (49)$$

где P_n — проектор на состояние Ψ_n :

$$\begin{aligned} P_n \Psi_m &= \delta_{mn} \Psi_n, \\ P_0 &= \frac{1}{4}(1 - O^1 - O^2 - O^3), & P_1 &= \frac{1}{4}(1 + O^1 - O^2 + O^3), \\ P_2 &= \frac{1}{4}(1 + O^1 + O^2 - O^3), & P_3 &= \frac{1}{4}(1 - O^1 + O^2 + O^3). \end{aligned}$$

Заметим, что состояния $\Psi_{2,3}$ при $j \neq 0$ не различаются пространственной и зарядовой четностью (при $j = 0$ $\Psi_2 = 0$). Их выбор определяется выбором проекторов P_n . С помощью операторов (47) можно построить другой набор проекторов, которые выделяют вместо $\Psi_{2,3}$ волновые функции $\Psi_{\mp} \equiv \Psi_{jM,j\mp 1,1}$, связанные с ними формулами (41), (42). Поскольку

$$\begin{aligned} o_{12}^2 &= o_1^2 + o_2^2 = o^2 \otimes I + I \otimes o^{2c}, \\ o_{12}^2 \Psi_{0,1} &= 0, & o_{12}^2 \Psi_{2,3} &= 2\Psi_{3,2}, \end{aligned}$$

то для этого достаточно заменить в (49) оператор $a_2 P_2 + a_3 P_3$ на оператор $a_- P_- + a_+ P_+$, где

$$P_{\mp} = \frac{\pm 1}{4(2j+1)} \left(2\sqrt{\vec{J}^2} o_{12}^2 + O^1 - O^3 \pm (2j+1)(1 + O^2) \right).$$

В общем случае можно добавить в уравнение (49) член bo_{12}^2 с параметром b , смешивающий состояния Ψ_2 и Ψ_3 . Однако появление такого линейного по каждому из кварков

члена в волновом уравнении не представляется естественным, и мы не будем этого делать.

Другое дело – смешивание странных, очарованных и прелестных мезонов, не имеющих зарядовой четности, в состояниях Ψ_0 и Ψ_1 , при $j \neq 0$ отличающихся только зарядовой четностью. Смешивание этих состояний осуществляет оператор

$$\Delta = \frac{1}{2}(o_1^1 o_2^3 - o_1^3 o_2^1) = \frac{1}{2}(o^1 \otimes o^{3c} - o^3 \otimes o^{1c}),$$

являющийся квадратичным по кваркам, эрмитовым и пространственно-четным. Из (48) следует, что $\Delta \Psi_0 = i \Psi_1$, $\Delta i \Psi_1 = \Psi_0$, $\Delta \Psi_{2,3} = 0$. Поэтому спектральное уравнение имеет вид

$$\left(\sqrt{j^2} - K - \sum_n a_n P_n - b \Delta \right) \Psi = 0,$$

где $b = 0$ для $q_1 \bar{q}_2$ -, $s \bar{s}$ -, $c \bar{c}$ - и $b \bar{b}$ -мезонов (здесь и в дальнейшем $q_1, q_2 = u$ или d). Это уравнение диагонализуются подстановкой

$$\Phi_0 = (\cos \alpha) \Psi_0 + (\sin \alpha) i \Psi_1, \quad (50)$$

$$\Phi_1 = -(\sin \alpha) \Psi_0 + (\cos \alpha) i \Psi_1. \quad (51)$$

Спектральные условия для этих состояний имеют вид

$$\Phi_0 : \sqrt{j(j+1)} - K - a_0 - d = 0,$$

$$\Phi_1 : \sqrt{j(j+1)} - K - a_1 + d = 0,$$

$$d = b \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \left(a_0 - a_1 \pm \sqrt{(a_0 - a_1)^2 + 4b^2} \right),$$

где верхний знак выбирается при отрицательном $a_0 - a_1$, нижний – при положительном.

Таким образом, для каждого состояния Ψ_n (Φ_n) мы получаем свою реджевскую траекторию (т.е. зависимость спина j от квадрата массы мезона m^2), которая определяется функцией K и феноменологическим параметром a_n :

$$\sqrt{j(j+1)} = K + a_n, \quad (52)$$

где для случая смешивания a_0 заменяется на $a_0 - d$ и a_1 – на $a_1 + d$,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2a} \left(\mu m - \sum m_i^2 t_i \right), \\ m &= \mu \sum (\operatorname{arctg} t_i + t_i^{-1}), \\ t_i &= \left[\left(\frac{\mu^2}{m_i^2} + \frac{1}{4} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

здесь обозначено $\mu = al$. Заданная параметрически функция $K(m, a, m_1, m_2)$ зависит от массы мезона m , универсального параметра натяжения струны a и масс кварков m_1 и m_2 , составляющих мезон.

Для малых масс кварков $m_i \ll m$ имеем

$$K = \frac{m^2}{2\pi a} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \sum \left(\frac{\pi m_i}{m} \right)^{3/2} + O \left(\left(\frac{\pi m_i}{m} \right)^{5/2} \right) \right). \quad (53)$$

Для тяжелых кварков, когда $D = m - m_1 - m_2 \ll m_i$, получаем

$$K = \frac{1}{a} \left(\frac{2}{3} D \right)^{3/2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} \left(1 + O \left(\frac{D}{m_i} \right) \right).$$

Таким образом, одна простая формула (52) описывает четыре реджевские траектории для каждой пары кварк–антикварк. Если пренебречь разностью масс u - и d -кварков (и не рассматривать t -кварк), то получаем 40 траекторий мезонов. Если ограничиться величинами спинов не более чем четыре, то имеем 180 различных мезонов. Кратко рассмотрим те из них, которые лучше известны экспериментально [12].

Векторные траектории. Начнем с мезонов, описываемых волновой функцией Ψ_2 . Для этих мезонов $P = C = (-1)^j$ (как обычно, C относится к нейтральным мезонам), спин-четность низших состояний равна 1^{--} . На этих траекториях лежит наибольшее число мезонов, надежно установленных экспериментально. Это позволяет определить основные параметры модели a , m_1 и m_2 и параметр a_2 .

Массы u - и d -кварков слишком малы, чтобы их можно было определить без учета электромагнитного взаимодействия (как видно из (53), даже для ρ -мезона они дают вклад в функцию K менее 0.5%). Поэтому для их оценки использовалась формула линейного приближения киральной $SU(3)$ -модели [1], когда $m_u/m_d = 0.55$, $m_s/m_d = 20.1$.

Сравнение формулы (52) с экспериментом [12] для этих траекторий было проделано В.В. Брызгаловым и В.В. Ежелой. Поскольку модель не учитывает электромагнитного взаимодействия, значения экспериментальных ошибок в массах мезонов m были увеличены на 1% от m .

Результаты этого сравнения и найденные параметры представлены в табл. 1. В этой таблице указаны массы мезонов и параметры векторных траекторий (массы выражены в МэВ); m_π – экспериментальная масса, Δ – экспериментальная ошибка +1% m_π , m_T – теоретическая масса.

Таблица 1

Частица	m_Δ	Δ	m_T	$\epsilon = \frac{m_\Delta - m_T}{\Delta}$
$\rho(770)$	768.5	8.3	773	-0.54
$a_2(1320)$	1318.1	13.9	1320	-0.14
$\rho_3(1690)$	1691	21.9	1692	-0.03
$a_4(2040)$	2037	46.4	1994	0.93
$\rho_5(2350)$	2330	58.3	2255	1.29
$a_6(2450)$	2450	154	2488	-0.25
$K^*(892)$	891.59	9.2	895	-0.43
$K_2^*(1430)$	1425.4	15.6	1419	0.42
$K_3^*(1780)$	1770	27.7	1781	-0.40
$K_4^*(2045)$	2045	29.4	2077	-1.08
$\varphi(1020)$	1019.413	10.2	1016	0.34
$f_2'(1525)$	1525	20.2	1517	0.37
$\varphi_3(1850)$	1854	25.5	1870	-0.62
$D^*(2010)$	2006.7	20.6	1996	0.54
$D_2^*(2460)$	2458.9	26.5	2442	0.64
$J/\psi(1S)$	3096.88	31.0	3171	-2.39
$\chi_{c2}(1P)$	3556.17	35.7	3520	1.01
B^*	5324.8	55.3	5266	1.05
$\Upsilon(1S)$	9460.37	94.8	9650	-2.00
$\chi_{b2}(1P)$	9913.2	99.7	9892	0.21
$\Sigma\epsilon = 18.9, N - n = 15, \chi^2 = 1.26$				
$a = 0.176 \pm 0.002 \text{ ГэВ}^2, a_2 = 0.88 \pm 0.01,$ $m_s = 224 \pm 7, m_c = 1413 \pm 9, m_b = 4710 \pm 26,$ $m_u = 6.2 \pm 0.2, m_d = 11.1 \pm 0.4$				
Вариант 2: $a_2(c\bar{c}) = 0.95, a_2(q\bar{b}) = a_2(b\bar{b}) = 0.4,$ $m_b = 4550 \pm 100$				

Константа a_2 для этих траекторий оказалась не зависящей от масс кварков. Согласие модели с экспериментом лежит в пределах 1%, за исключением масс J/ψ - и Υ -мезонов, где отклонение составляет 2.3 и 2%, соответственно.

Это отклонение может быть уменьшено до 1% за счет введения различных констант a_2 для разных кварков и увеличения за счет этого χ^2 . Соответствующие значения параметров также приведены в табл. 1 (вариант 2). В этом варианте масса b -кварка меньше, чем в предыдущем. В дальнейшем приводятся предсказания для обоих вариантов.

Используя найденные параметры, можно вычислить массы других состояний на этих траекториях. Пример такого вычисления для векторных траекторий представлен в табл. 2¹⁾. Модель предсказывает спины и четности $D_s^*(2112)$ и $D_{sJ}(2573)$.

¹⁾Вопросительные знаки здесь и далее означают отсутствие данных, а тире далее – вырождение по массе.

Таблица 2

Кварковый состав, j^P	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента, j^P
$c\bar{s}$, 1^-	2108	$D_s^*(2112), ?^?$
$c\bar{s}$, 2^+	2536	$D_{sJ}(2573), ?^?$

Псевдоскалярные траектории. Волновая функция Ψ_0 , $P = -C = -(-1)^j$, спин-четность низших состояний 0^{-+} . На этих траекториях лежат псевдоскалярные мезоны, массы которых особенно чувствительны к феноменологическим параметрам a_0 , т.к. в формуле (52) $j = 0$. Оценка этих параметров из масс π - и $\eta_c(1S)$ -мезонов и некоторые предсказания для псевдоскалярных траекторий (q_1 и q_2 равны или u , или d) представлены в табл. 3.

Таблица 3

Кварковый состав	j^{PC}	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1\bar{q}_2$	1^{++}	1257	$b_1(1235), 1^{+-}$
	2^{-+}	1651	$\pi_2(1670), 2^{-+}$
	3^{+-}	1960	?
	4^{-+}	2230	?
$c\bar{c}$	1^{+-}	3520	?
	2^{-+}	3790	?
$a_0(q_1\bar{q}_2) = -(1.5 \pm 0.1)10^{-2}$, $a_0(c, \bar{c}) = -0.159$			

Константа a_0 очень мала для легких кварков (малость массы пиона) и растет для тяжелых. Три известных мезона $-\pi, b_1$ и π_2 лежат на одной траектории, что подтверждает однотипность их кварковой структуры, описываемой волновой функцией Ψ_0 при $j = 0, 1$ и 2 , соответственно.

Таблица 4

0^{-+}	$\eta', q\bar{q}$	$\eta, s\bar{s}$	$\eta, q\bar{q}$	$\eta', s\bar{s}$	Данные эксперимента
1^{+-}	1575	1470	1360	1630	?
2^{-+}	1900	1840	1730	1970	?
3^{+-}	2180	2130	2030	2230	?
a_0	-0.83	-0.035	-0.27	-0.46	

Менее определенна ситуация с η - и $\eta'(958)$ -мезонами. В табл. 4 представлены массы их партнеров по реджевским траекториям для разных возможностей их кваркового состава. К этой таблице можно добавить следующее “спекулятивное” обсуждение.

Существует механизм, связанный с малой массой u - и d -кварков, благодаря которому одно из их нейтральных связанных состояний получает значительную энергетическую добавку по сравнению с другим (пионом). Если так возникает $q\bar{q}$ -мезон $\eta'(958)$, отличающийся от π^0 добавлением ~ 800 МэВ энергии, то $\eta - s\bar{s}$ -мезон, для которого в силу

приближенной $SU(3)$ -симметрии тот же механизм мог бы привести к возникновению его партнера $s\bar{s}, 0^{-+}$ -мезона $\eta'(\sim 1350)$ с массой порядка 1300 МэВ ($\eta(1295), 0^{-+}, ?$). Если же партнером π^0 по механизму утяжеления является $q\bar{q}$ -мезон η , то для этого потребовалось бы добавить ~ 400 МэВ энергии. При этом $\eta'(958)$ был бы $s\bar{s}$ -мезоном, и его утяжеленный партнер $\eta'(\sim 1360)$ ($s\bar{s}, 0^{-+}$) имел бы массу того же порядка, что и в предыдущем случае.

Дочерние состояния, возникающие при учете высших мод струны, сдвинуты по квадрату массы на величину $4\pi a$ [7] (без учета кварков). При этом $\pi_1(1300)$ мог бы быть дочерним состоянием пиона, а $\eta(1440)$ – дочерним состоянием η .

Во всяком случае, было бы важно для выяснения природы мезонов η и $\eta'(958)$ получить экспериментальную информацию о нейтральных мезонах 1^{+-} в интервале масс 1300–1700 МэВ, 2^{-+} – в интервале 1700–2000 МэВ и 3^{+-} – в интервале 2000–2300 МэВ.

Псевдовекторные траектории. Волновая функция Ψ_1 , $P=C=-(-1)^j$, спин-четность низших состояний 1^{++} . Экспериментальные данные об этих мезонах довольно скудны. Поэтому предположим, что

$$a_1 = a_0. \quad (54)$$

Соответствующие предсказания собраны в табл. 5. Там же приведена для дальнейшего использования константа $a_1(b\bar{b})$, полученная из массы $\chi_{b1}(1P), 1^{++}$. Для $a_0(s\bar{s})$ использована константа из табл. 4, соответствующая $\eta, s\bar{s}$. Константа, соответствующая $\eta', s\bar{s}$, приводит к массе 1^{++} -состояния 1630 МэВ, что хуже соответствует эксперименту.

Таблица 5

Кварковый состав	j^{PC}	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1\bar{q}_2$	1^{++}	1260	$a_1(1260), f_1(1285), 1^{++}$
	2^{--}	1650	?
$s\bar{s}$	1^{++}	1470	$f_1(1420)$ или $f_1(1510), 1^{++}$
	2^{--}	1840	?
$c\bar{c}$	1^{++}	3520	$\chi_{c1}(1P), 3520, 1^{++}$
	2^{--}	3730	?
$a_1(s\bar{s}) = a_0(\eta, s\bar{s}), a_1(b\bar{b}) = -0.14(-1.93, \text{вариант } 2)$			

Гипотеза (54) выполняется для $q_1\bar{q}_2$ -, $s\bar{s}$ - и $c\bar{c}$ -мезонов. Если она выполняется и для $b\bar{b}$, то, зная константу $a_1(b\bar{b})$, можно вычислить массу псевдоскалярного $b\bar{b}$ -мезона $\eta_b(1S), 0^{-+}$: $m(\eta_b(1S), 0^{-+}) = 9515 \pm 55$ МэВ (или 9650 ± 100 МэВ для варианта 2).

Смешивание траекторий. Не имеющие зарядовой четности мезоны с ненатуральной спин-четностью $0^{-}, 1^{+}, 2^{-}, \dots$ лежат на смешанных траекториях Φ_0 и Φ_1 (50), (51).

Как и ранее, определим константу a_0 из масс псевдоскалярных мезонов K, D, D_s, B и B_s^0 . Константы a_1 и d определяются из масс мезонов с высшими спинами. Результаты

собраны в табл. 6, где даны предсказания и параметры для странных, очарованных и прелестных мезонов с ненатуральной спин-четностью.

Таблица 6

Кварковый состав	j^P	Теоретическая масса, МэВ		Данные эксперимента	
		траект. Φ_0	траект. Φ_1	траект. Φ_0	траект. Φ_1
$s\bar{q}$	1^+	<u>1430</u>	<u>1310</u>	$\frac{K_1(1400)}{K_2(1820)}$	$\frac{K_1(1270)}{K_2(1770)}$
	2^-	1800	1700	$\frac{K_2(1820)}{K_2(1770)}$	$\frac{K_2(1820)}{K_2(1770)}$
	3^+	2080	2010	?	?
$c\bar{q}$ (I) (II)	1^+	<u>2420</u>	2480	$\frac{D_1(2420)}{?}$	?
	1^+	2470	<u>2420</u>	?	$\frac{D_1(2420)}{?}$
	2^-	2740	2790	?	?
	(I) 2^-	2740	2790	?	?
	(II) 2^-	2790	2750	?	?
$c\bar{s}$	1^+	2580	—	$D_{s1}(2536)$	—
$b\bar{q}$	1^+	5800	—	?	—
		5640 (вар.2)	—	?	—
$b\bar{s}$	1^+	5870	—	?	—
		5710 (вар.2)	—	?	—
$a_0(s\bar{q}) = -0.10, a_1(s\bar{q}) = 0, d(s\bar{q}) = 0.1,$ $a_0(c\bar{q}) = -0.33, a_1(c\bar{q}) = 0(\text{гипотеза}), \text{ (I) } d(c\bar{q}) = 0.25, \text{ (II) } d(c\bar{q}) = 0.09,$ $a_0(c\bar{s}) = -0.30, a_0(b\bar{q}) = -0.56, a_0(b\bar{s}) = -0.51,$ $d(c\bar{s}) = d(b\bar{q}) = d(b\bar{s}) = 0(\text{гипотеза})$					

Экспериментальные данные здесь также довольно скудны. Модель же содержит дополнительный параметр смешивания. Для $s\bar{q}$ -мезонов данные, подчеркнутые в табл. 6, по существу, использованы для определения констант a_1 и d . Предсказаниями являются массы для $s\bar{q}$ -мезонов 2^- . Одна из этих масс не очень хорошо соответствует эксперименту ($K_2(1770)$ тяжелее предсказания на 4%).

Для $c\bar{q}$ -мезонов пришлось предположить, что $a_1(c\bar{q}) = 0$. Основанием для этого явилось то, что соответствующая константа для $s\bar{q}$ оказалась равной нулю. Далее, пришлось рассмотреть две возможности соотношения $D_1(2420)$ к траекториям, что дает различные значения параметра смешивания. Предсказания же масс практически не зависят от значений этого параметра.

Для $c\bar{s}$ -, 1^+ -мезона смешиванием практически можно пренебречь.

Для $b\bar{q}$ - и $b\bar{s}$ -мезонов предсказания также сделаны без учета смешивания. Они чувствительны к величине массы b -кварка.

Скалярные траектории. Волновая функция Ψ_3 , $P = C = (-1)^j$, спин-четность низших состояний 0^{++} . Константы траекторий особо чувствительны к массам скалярных мезонов. Беря для них массы $a_0(980)(q_1\bar{q}_2)$, $K_0^*(1430)(s\bar{q})$, $f_0(980)(s\bar{s})$, $\chi_{c0}(1P)(c\bar{c})$

и $\chi_{b0}(1P)(b\bar{b})$, получаем константы траекторий и предсказания, собранные в табл. 7. Согласие с экспериментом удовлетворительное.

Таблица 7

Кварковый состав	$j^{PC}(j^P)$	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1\bar{q}_2$	1^{--}	1590	$\rho(1700), \omega(1600)$
	2^{++}	1920	?
	3^{--}	2190	?
$s\bar{q}$	1^-	1730	$K^*(1680)$
	2^+	2150	?
$s\bar{s}$	1^{--}	1650	$\phi(1680)$
	2^{++}	2000	$f_2(2010)$
$c\bar{c}$	1^{--}	3780	$\psi(3770)$
	2^{++}	4025	?
$b\bar{b}$	1^{--}	10110	$\Upsilon(2S), 10023.3$
		10070 (вар.2)	
		10282	$\chi_{b2}(2P), 10268.5$
	2^{++}	10210 (вар.2)	
$a_3(q_1\bar{q}_2) = 0.875, a_3(s\bar{q}) = -1.58, a_3(s\bar{s}) = -0.52,$ $a_3(c_1\bar{c}) = -1.23, a_3(b\bar{b}) = -1.40$ (−3.14, вариант 2)			

Предположение о том, что $f_0(1370)$ или $f_0(1500)$ является $0^{++}s\bar{s}$ -состоянием, хуже согласуется с экспериментом. Если это глюболы, описываемые двойной прямолинейной струной, то они лежат на траекториях

$$\sqrt{j(j+1)} = \frac{m_2}{4\pi a} + a_g.$$

Глюболы 2^{++} имеют массу 2700 и 2770 МэВ, соответственно.

Таблица 8

Частица, состав	ω , МэВ	d , ГэВ ^{−1}	v_1, c	v_2, c	E_1 , МэВ	E_2 , МэВ	E_0 , МэВ
$\pi, u\bar{d}$	3950	0.46	0.93	0.87	17	24	99
$\eta, s\bar{s}$	1890	0.38	0.36	0.36	240	240	67
$\eta_c(1S), c\bar{c}$	640	0.58	0.19	0.19	1440	1440	102
$K, u\bar{s}$	1450	0.97	0.97	0.44	28	250	220
$D, u\bar{c}$	710	1.6	0.99	0.17	39	1430	390
$B, u\bar{b}$	520	2.1	0.99	0.07	46	4720	510
$\varphi, s\bar{s}$	630	2.1	0.67	0.67	304	304	410
$J/\psi(1S), c\bar{c}$	420	1.3	0.27	0.27	1470	1470	230
$\Upsilon(1S), b\bar{b}$	290	0.89	0.13	0.13	4750	4750	160
$\Upsilon(1S)$ (вар. 2)	235	1.4	0.16	0.16	4610	4610	240
$\rho, u\bar{d}$	715	2.7	0.99	0.98	39	53	680
$K^*, u\bar{s}$	670	2.4	0.99	0.66	40	300	550
$D^*, u\bar{c}$	570	2.1	0.99	0.21	44	1440	520
$B^*, u\bar{b}$	530	2.0	0.99	0.07	46	4720	560

Наконец, приведем значения основных величин, характеризующих движение кварков и глюонной струны внутри покоящихся псевдоскалярных и векторных мезонов (табл. 8). В этой таблице $\omega = l^{-1}$ – частота классического вращения струны, $d = l_1 + l_2$ – классическое расстояние между кварками, v_i – скорость i -го кварка, E_i – его энергия, E_0 – энергия глюонной струны. Частицы в табл. 8 сгруппированы по близким значениям глюонной энергии E_0 . Эта энергия велика в ρ , K^* , D^* , B и B^* , где она составляет 500–700 МэВ. Она меньше в $\eta_c(1S)$, $J/\psi(1S)$ и $\Upsilon(1S)$ (порядка 100–200 МэВ) и минимальна по абсолютной величине в η , $s\bar{s}$ и π (меньше 100 МэВ). Все кварки в мезонах, за исключением b , релятивистские. Скорость b -кварка близка к 0.1с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении мезонных траекторий мы пренебрегали электромагнитным взаимодействием и разностью масс u - и d -кварков, поэтому, например, частицы ρ и ω считались одним и тем же состоянием $q_1\bar{q}_2$, 1^{--} . Точно так же не различались a_1 и f_1 , a_2 и f_2 , b_1 и h_1 и т.д. В этом приближении в рамках единой модели с помощью 16 констант (4 основных и 12 феноменологических) удалось описать примерно 46 различных мезонов. Описание менее точно для мезонов с малыми спинами, состоящих из тяжелого кварка и антикварка, где вклад струнного механизма относительно мал. Возможно, модель описывает еще три известных мезона: $\eta'(958)$, $D_1(2420)^0$ и $\chi_{b1}(1P)$. Для проверки этой возможности не хватает данных: нужны массы η -частицы 1^{+-} , еще одной частицы $D1^+$ или $D2^-$ и $\eta_b 0^{-+}$.

Многие состояния (около 17) могут быть дочерними состояниями, т.е. соответствовать высшим модам (колебаниям) струны. Важно исследовать эти моды с тяжелыми кварками на концах.

Наконец, ряд состояний: $f_0(1370)0^+(0^{++})$, $f_0(1500)0^+(0^{++})$, $f_J(1710)0^+$ (четный $^{++}$), $f_1(1420)0^+(1^{++})$ (или $f_1(1510)0^+(1^{++})$), $f_2(2300)0^+(2^{++})$, $f_2(2340)0^+(2^{++})$, возможно, не являются кварк-антикварковыми, а представляют собой глюболы или $q\bar{q}q\bar{q}$ -состояния.

Найденные релятивистские волновые функции составных мезонов могут быть использованы для расчета их электрослабых свойств в стандартной модели.

Главный же вывод, по-видимому, состоит в том, что струна дает основной вклад в описание конфайнмента всех кварков независимо от их масс. Если это так, то с помощью струны можно строить релятивистскую модель адронов, учитывая неструнные детали взаимодействия кварков известными приближенными методами, что должно сократить число феноменологических констант, введенных в данной работе.

Автор благодарен В. В. Брызгалову и В. В. Ежеле за сотрудничество и Л. Г. Ландсбергу и А. В. Разумову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein.* Dynamics of the Standard Model. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [2] *L. D. Soloviev.* String model of confinement. In: 10th Int. Conf. "Problems of Quantum Field Theory". JINR E-2-96-369. Dubna: JINR, 1996.
- [3] *L. D. Soloviev.* Quark masses in a relativistic confinement model. Preprint IHEP 97-7. Protvino: IHEP, 1997.
- [4] *P. Hasenfranz.* In: Proc. of the XXIII Int. Conf. on High Energy Physics. Ed. S.C. Loken. Singapore: World Scientific, 1987; *M. Fukugita.* Lattice gauge theory using parallel processors. Ed. X. Li, Z. Qiu and H. Ren. NY: Gordon and Breach, 1987; *P. M. Zerwas.* In: Proc. of the XXIV Int. Conf. on High Energy Physics. Ed. R. Kotthaus and J.H. Kuhn. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [5] *Г. П. Пронько, А. В. Разумов.* ТМФ. 1983. Т. 56. С. 192.
- [6] *В. И. Бородулин, О. Л. Зорин, Г. П. Пронько, А. В. Разумов, Л. Д. Соловьев.* ТМФ. 1985. Т. 65. С. 119.
- [7] *G. P. Pron'ko.* Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. № 3. P. 355.
- [8] *F. A. Berezin, M. S. Marinov.* Ann. Phys. 1977. V. 104. P. 336.
- [9] *Л. Д. Соловьев.* ТМФ. 1996. Т. 106. С. 209.
- [10] *L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, P. Howe.* Phys. Lett. B. 1976. V. 64. № 4. P. 435.
- [11] *Л. Д. Соловьев.* Квантование релятивистского ротатора с массами и спинами. Препринт ИФВЭ 96-67. Протвино: ИФВЭ, 1996.
- [12] *R. M. Barnett et al.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 1.
- [13] *H. B. Nielsen, P. Olesen.* Nucl. Phys. B. 1973. V. 61. P. 45.
- [14] *A. Chodos, C. B. Thorn.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. P. 509.
- [15] *G. 't Hooft.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 75. P. 461.
- [16] *D. Förster.* Nucl. Phys. B. 1974. V. 81. P. 84.
- [17] *P. Frampton.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 583.
- [18] *I. Bars.* Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 1521.
- [19] *I. Bars, A. Hanson.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 1744.
- [20] *R. C. Giles, S.-H. H. Tye.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 1079.
- [21] *K. Kikkawa, M. Sato.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 1309; *K. Kikkawa, T. Kotani, M. Sato.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 2606.
- [22] *M. Ida.* Progr. Theor. Phys. 1978. V. 59. P. 1661.
- [23] *K. Johnson, C. Nohl.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 291.
- [24] *F. Lizzi, C. Rosenzweig.* Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 1685.
- [25] *И. Ю. Кобзарев, Б. В. Мартеньянов, М. Г. Щепкин.* ЯФ. 1986. Т. 44. С. 475; *И. Ю. Кобзарев, Л. А. Кондратюк, Б. В. Мартеньянов, М. Г. Щепкин.* ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1552.
- [26] *А. В. Батунин, О. Л. Зорин.* Массивная прямолинейная струна как модель тяжелого кваркония. Препринт ИФВЭ 89-87. Серпухов: ИФВЭ, 1989.
- [27] *B. M. Barbashov.* Classical dynamics of rotating relativistic string with massive ends: the Regge trajectories and quark masses. In: Proc. of the Conf. "Strong Interactions at Long Distances". Ed. L. Jenkovsky. Palm Harbor: Hadronic Press, 1995. P. 257.
- [28] *П. А. М. Дирак.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [29] *A. V. Razumov.* Dependent coordinates in classical mechanics. Preprint IHEP 84-86. Serpukhov: IHEP, 1984.

Поступила в редакцию 8.XII.1997 г.