Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Перескоков, Квазиклассическая асимптотика спектра двумерного оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 74–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9001>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:41:30

© 2016 г.

А. В. Перескоков^{*†}

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

Рассматривается задача на собственные значения для двумерного оператора Хартри с малым параметром перед нелинейностью. Найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров, которые образуются в окрестности уровней энергии невозмущенного оператора. Вблизи окружности, где локализовано решение, построено асимптотическое разложение.

Ключевые слова: самосогласованное поле, спектральный кластер, асимптотические собственные значения и собственные функции, логарифмическая особенность.

DOI: 10.4213/tmf9001

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left(\mathbf{H} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \ln |q - q'| |\psi(q')|^2 dq' \right) \psi = \lambda \psi, \quad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (2)$$

где оператор

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ (задание 1.756.2014/К).

^{*}Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва, Россия.
E-mail: pereskokov62@mail.ru

[†]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики – Московский институт электроники и математики, Москва, Россия

есть гамильтониан двумерного осциллятора, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле, содержащее интегральную нелинейность типа Хартри, играет фундаментальную роль в квантовой теории, в нелинейной оптике, в молекулярной биологии [1]–[6].

Имеется большое число работ (см., например, [7]–[15]), посвященных теории квазиклассического приближения для уравнения Хартри, а также нахождению асимптотических решений уравнений типа Хартри, локализованных вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве. Особенностью задачи (1), (2) является то, что она относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}$ равны единице. Кроме того, потенциал самодействия в (1) имеет логарифмическую особенность. Поэтому лучевой метод [16], а также теория комплексного ростка Маслова [17] неприменимы. Для построения асимптотических решений воспользуемся тем, что в полярных координатах уравнение (1) допускает разделение переменных.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеют вид

$$\lambda(0) = n + 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим случай, когда число n , задающее невозмущенное собственное значение, велико (для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε^{-1}). Сформулируем основной результат настоящей работы.

Для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ найдено собственное значение возмущенного оператора

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln n - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi n}} \delta_k + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\delta_0 = 1/4$, а при $k \geq 1$ числа δ_k задаются формулой

$$\begin{aligned} \delta_k = & \frac{1}{4} + \frac{1}{k! 2^{2k+1}} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j} j! (C_k^j)^2 \frac{(2k-2j-2)!}{(k-j-1)!} \times \\ & \times \left\{ (-1)^{k-j-1} + \frac{(2j+2)! (2k-2j-2)!}{k! 2^{2k} (j+1)! (k-j-1)!} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, при $k = 1, 2, 3, 4$ числа δ_k равны

$$\delta_1 = \frac{7}{16}, \quad \delta_2 = \frac{145}{256}, \quad \delta_3 = \frac{687}{1024}, \quad \delta_4 = \frac{49881}{65536}.$$

Эти числа даже при небольших значениях k хорошо описываются с помощью асимптотической формулы

$$\delta_k \sim \frac{2}{\pi^{3/2}} \sqrt{k + \frac{1}{2}}, \quad k \rightarrow \infty,$$

которая уже при $k = 0$ позволяет вычислить δ_0 с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0.004.

В настоящей статье доказано, что асимптотика (3) описывает спектр оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, а соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружностей. Отметим, что

ранее в работе [18] была получена формула для асимптотики спектра трехмерного оператора Хартри с кулоновским взаимодействием вблизи верхних границ спектральных кластеров.

Произведем сравнение формулы (3) с формулами для асимптотики спектра двумерного оператора типа Хартри в случае гладкого ядра самодействия. В статье [19] была рассмотрена следующая задача на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left(\mathbf{H}_0 + \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} W(|x - x'|^2) |v(x')|^2 dx' \right) v = Ev, \quad \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

параметр $\varepsilon > 0$ мал, а $W(\tau) = w_0 + w_1\tau + w_2\tau^2$ — произвольный многочлен второй степени с вещественными коэффициентами, у которого $w_2 > 0$. Асимптотические собственные значения задачи (5) вблизи верхних границ спектральных кластеров при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют вид

$$E = E_{n,k} = (n+1)\varepsilon + (w_0 + 2n\varepsilon w_1 + 9n^2\varepsilon^2 w_2)\varepsilon^2 + \left(2w_1 + 2n\varepsilon w_2 \left(9 - 2\sqrt{6} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь число $n \in \mathbb{N}$ имеет порядок ε^{-1} и определяет собственное значение $(n+1)\varepsilon$ невозмущенного оператора $\mathbf{H}_0$. Отметим, что серия (6) описывает расщепление спектра оператора типа Хартри и содержит члены до третьего порядка по ε включительно.

Аналогичная формула справедлива и вблизи нижних границ спектральных кластеров: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$E = E_{n,k} = (n+1)\varepsilon + (w_0 + 2n\varepsilon w_1 + 6n^2\varepsilon^2 w_2)\varepsilon^2 + (2w_1 + 2n\varepsilon w_2(2k+7))\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Произведем замену переменных

$$x = \sqrt{\varepsilon}q, \quad v = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad E = \lambda\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon. \quad (8)$$

Тогда задача (1), (2) принимает вид (5), в котором

$$W(\tau) = -\frac{\ln \tau}{2}. \quad (9)$$

Соответственно формулу (3) можно переписать как

$$E = E_{n,k} = (n+1)\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \ln(n\varepsilon) - \frac{2\varepsilon^{5/2}}{\sqrt{\pi n\varepsilon}} \delta_k + O(\varepsilon^3), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Сравнивая это равенство с (6) и (7), видим, что расщепление спектра в (10) происходит в члене порядка $\varepsilon^{5/2}$, а не порядка ε^3 , причем зависимость поправки от числа k в случае негладкого потенциала самодействия становится нелинейной.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Перейдем к полярным координатам $q_1 = \rho \cos \varphi$, $q_2 = \rho \sin \varphi$ и будем искать решение задачи (1), (2) в виде $\psi = g(\rho, \varepsilon)e^{\pm im\varphi}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Учитывая, что [20]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln(\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)) d\varphi' = \begin{cases} 4\pi \ln \rho, & 0 < \rho' < \rho, \\ 4\pi \ln \rho', & \rho' > \rho, \end{cases}$$

получаем задачу на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}_+^1)$:

$$\left\{ \mathbf{H}_\rho - 2\pi\varepsilon \left[\ln \rho \int_0^\rho g^2(\rho', \varepsilon) \rho' d\rho' + \int_\rho^\infty \ln \rho' g^2(\rho', \varepsilon) \rho' d\rho' \right] - \lambda \right\} g(\rho, \varepsilon) = 0, \\ \int_0^\infty g^2(\rho, \varepsilon) \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}.$$

Здесь оператор $\mathbf{H}_\rho$ имеет вид

$$\mathbf{H}_\rho = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + \frac{\rho^2}{2}.$$

Будем искать $g = g(\rho, \varepsilon)$ и $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ в виде асимптотических разложений по степеням ε :

$$g \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j g_j(\rho), \quad \lambda \sim \sum_{j=0}^{\infty} (2\pi\varepsilon)^j \lambda_j. \quad (11)$$

Два первых члена этих разложений удовлетворяют следующим задачам:

$$(\mathbf{H}_\rho - \lambda_0)g_0 = 0, \quad (12)$$

$$\int_0^\infty g_0^2(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}; \quad (13)$$

$$(\mathbf{H}_\rho - \lambda_0)g_1 = F_1(\rho)g_0, \quad (14)$$

$$\int_0^\infty g_1(\rho)g_0(\rho)\rho d\rho = 0, \quad (15)$$

где

$$F_1(\rho) = 2\pi \left[\ln \rho \int_0^\rho g_0^2(\rho') \rho' d\rho' + \int_\rho^\infty \ln \rho' g_0^2(\rho') \rho' d\rho' + \lambda_1 \right].$$

Решение задачи (12), (13) хорошо известно (см., например, монографию [21]). Оно выражается через полиномы Лагерра [22]. Для каждого значения $\lambda_0 = \lambda_0^{(n)} = n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и для

$$m = n - 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, [n/2], \quad (16)$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, имеем

$$g_0(\rho) = g_0^{(n,k)}(\rho) = \frac{\sqrt{k!}}{\sqrt{\pi(n-k)!}} \rho^{n-2k} e^{-\rho^2/2} L_k^{n-2k}(\rho^2).$$

Как известно [22], второе линейно независимое решение $G(\rho)$ уравнения (12) выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода $\Psi(a, b, z)$:

$$G(\rho) = \rho^{n-2k} e^{\rho^2/2} \Psi(n-k+1, n-2k+1, -\rho^2).$$

Используя функции $G(\rho)$ и $g_0(\rho)$, общее решение неоднородного уравнения (14) можно записать в квадратурах. Условием разрешимости задачи (14), (15) служит равенство

$$\int_0^\infty F_1(\rho) g_0^2(\rho) \rho \, d\rho = 0.$$

Справедлива

ЛЕММА 1. Число

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n,k)} = -2\pi \int_0^\infty \left[\ln \rho \int_0^\rho g_0^2(\rho') \rho' \, d\rho' + \int_\rho^\infty \ln \rho' g_0^2(\rho') \rho' \, d\rho' \right] g_0^2(\rho) \rho \, d\rho, \quad (17)$$

а также принадлежащая пространству $L^2(\mathbb{R}_+^1)$ функция

$$\begin{aligned} g_1(\rho) = & \sqrt{\pi k! (n-k)!} (-1)^{n-2k+1} \left[g_0(\rho) \int_0^\rho F_1(\rho') g_0(\rho') G(\rho') \rho' \, d\rho' + \right. \\ & \left. + G(\rho) \int_\rho^\infty F_1(\rho') g_0^2(\rho') \rho' \, d\rho' \right] - c_1 g_0(\rho), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 = & 2\pi^{3/2} \sqrt{k! (n-k)!} (-1)^{n-2k+1} \int_0^\infty \left[g_0(\rho) \int_0^\rho F_1(\rho') g_0(\rho') G(\rho') \rho' \, d\rho' + \right. \\ & \left. + G(\rho) \int_\rho^\infty F_1(\rho') g_0^2(\rho') \rho' \, d\rho' \right] g_0(\rho) \rho \, d\rho, \end{aligned}$$

являются решением задачи (14), (15).

Рассмотрим далее небольшие значения числа k . Как будет показано ниже, именно такие значения k отвечают верхним границам спектральных кластеров.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$ и число n имеет порядок ε^{-1} . Тогда число

$$\lambda_{n,k} = n + 1 + 2\pi\varepsilon \lambda_1^{(n,k)}$$

и функция

$$\psi_{n,k} = (g_0(\rho) + \varepsilon g_1(\rho)) e^{\pm i(n-2k)\varphi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи (1), (2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Более точно, при $\lambda = \lambda_{n,k}$ функция $\psi_{n,k}$ удовлетворяет уравнению (1) с точностью $O(n^{-3})$ с оценкой невязки в норме $L^2(\mathbb{R}^2)$, а также условию нормировки (2) с точностью $O(n^{-3})$.

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВБЛИЗИ ОКРУЖНОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОПРАВOK

Пользуясь заменой (8), приведем задачу (1), (2) к стандартному для теории квазиклассических приближений виду (5), в котором ядро самодействия задается формулой (9). Найдем асимптотику собственных функций невозмущенной задачи

$$v_{m,k} = \frac{\sqrt{k!}}{\sqrt{\pi\varepsilon(m+k)!}} \left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^m e^{-r^2/2\varepsilon} L_k^m \left(\frac{r^2}{\varepsilon} \right) e^{\pm im\varphi}, \quad (18)$$

где $m = n - 2k$, $r = |x|$, вблизи окружности $\Gamma_a = \{(r, \varphi) \mid r = a\}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$. Здесь $a = \sqrt{\varepsilon m}$.

Введем новую переменную

$$s = \sqrt{2m} \left(\frac{r}{a} - 1 \right). \quad (19)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. При $m \rightarrow \infty$ и небольших $k = 0, 1, 2, \dots$ функции $v_{m,k}$ с точностью $O(m^{-\infty})$ сосредоточены вблизи окружности Γ_a , и в этой области справедлива асимптотика

$$v_{m,k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\varepsilon m k!} \pi^{3/4} 2^{(2k+1)/4}} e^{\pm i m \varphi} e^{-s^2/2} \times \\ \times [H_k(s) + O(m^{-1/2}(|s|^3 + 1)H_k(s)) + O(m^{-1/2}(s^2 + 1)H'_k(s))]. \quad (20)$$

Здесь $H_k(s)$ – полином Эрмита, $s^6 \ll m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения асимптотики полинома Лагерра воспользуемся интегральными представлениями [23]

$$L_m^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega|=\beta} \frac{e^{-x\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{m+1}\omega^{k+1}} d\omega, \quad H_k(x) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{e^{2xz-z^2}}{z^{k+1}} dz. \quad (21)$$

Здесь $\beta < 1$, контуры интегрирования ориентированы против часовой стрелки. В первом интеграле в (21) произведем замену $\omega = \sqrt{2}z/\sqrt{m}$. Разлагая далее функции по формуле Тейлора, имеем

$$L_m^k\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega|=\beta} \frac{e^{-[m+\sqrt{2ms+s^2/2}]\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{m+1}\omega^{k+1}} d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{m}{2}\right)^{k/2} \oint_{|z|=\sqrt{m}\beta/\sqrt{2}} \frac{e^{-2sz-z^2}}{z^{k+1}} \left[1 + O\left(\frac{s^2 z}{\sqrt{m}}\right) + O\left(\frac{z^2 s}{\sqrt{m}}\right) + O\left(\frac{s^3}{\sqrt{m}}\right)\right] dz = \\ = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{m}{2}\right)^{k/2} \left[H_k(s) + O\left(\frac{|s|^3 + 1}{\sqrt{m}} H_k(s)\right) + O\left(\frac{s^2 + 1}{\sqrt{m}} H'_k(s)\right) \right].$$

Здесь $s^6 \ll m$.

Чтобы получить формулу (20), остается в окрестности точки $r = a$ разложить по формуле Тейлора функцию

$$\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m e^{-r^2/2\varepsilon} = m^{m/2} e^{-m/2} e^{-s^2/2} \left(1 + O\left(\frac{s^3}{\sqrt{m}}\right)\right)$$

и применить к входящему в формулу (18) факториалу формулу Стирлинга. Теорема доказана.

Аналогично можно показать, что асимптотические собственные функции возмущенной задачи при m порядка ε^{-1} и $k = 0, 1, 2, \dots$ также сосредоточены вблизи окружности Γ_a . Именно эта область (например, при доказательстве теоремы 1) дает основной вклад при вычислении норм, квантовых средних, а также определяет

характер расщепления спектра. Далее мы построим справедливое в этой области асимптотическое разложение решения задачи (5), (9).

После разделения переменных $v = u(r, \varepsilon)e^{\pm im\varphi}$ получаем задачу на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}_+^1)$:

$$\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) + \frac{r^2}{2} - \right. \\ \left. - 2\pi\varepsilon^2 \left[\ln r \int_0^r u^2(r', \varepsilon) r' dr' + \int_r^\infty \ln r' u^2(r', \varepsilon) r' dr' \right] - E \right\} u(r, \varepsilon) = 0, \quad (22)$$

$$\int_0^\infty u^2(r, \varepsilon) r dr = \frac{1}{2\pi}. \quad (23)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ для m порядка ε^{-1} и $k = 0, 1, 2, \dots$ асимптотическое разложение решения задачи на собственные значения будем искать в виде

$$E = \varepsilon(n+1) + 2\pi\varepsilon^2 \left(E_0 + \frac{E_1}{\sqrt{m}} \right) + O\left(\frac{1}{m^3} \right), \quad (24)$$

$$u = \sqrt[4]{m} \left(u_0(s) + \frac{u_1(s)}{\sqrt{m}} + \frac{u_2(s)}{m} + \frac{u_3(s)}{m^{3/2}} + O\left(\frac{u_4(s)}{m^2} \right) \right). \quad (25)$$

Здесь s определена формулой (19), а $u_j(s)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, — экспоненциально убывающие при $|s| \rightarrow \infty$ функции.

Перейдем в соотношениях (22), (23) к переменной s . В силу равенства (24) задача примет вид

$$\left\{ -\frac{1}{m} \frac{d^2}{ds^2} - \frac{1}{\sqrt{2m^{3/2}}} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2m}} \right)^{-1} \frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2m}} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2m}} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{2k+1}{m} \right) - \frac{2\pi a^2}{m^2} \left(E_0 + \frac{E_1}{\sqrt{m}} + O\left(\frac{1}{m} \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{2\pi a^2}{m^2} \left[\frac{\ln a}{2\pi} + \frac{a^2}{\sqrt{2m}} \ln \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2m}} \right) \int_{-\sqrt{2m}}^s u^2(s', \varepsilon) \left(1 + \frac{s'}{\sqrt{2m}} \right) ds' + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^2}{\sqrt{2m}} \int_s^\infty \ln \left(1 + \frac{s'}{\sqrt{2m}} \right) u^2(s', \varepsilon) \left(1 + \frac{s'}{\sqrt{2m}} \right) ds' \right] \right\} u(s, \varepsilon) = 0, \quad (26)$$

$$\int_{-\sqrt{2m}}^\infty u^2(s, \varepsilon) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2m}} \right) ds = \frac{1}{\sqrt{2} \pi a^2}. \quad (27)$$

Далее разложим в (26) функции $(1 + s/\sqrt{2m})^{-1}$, $(1 + s/\sqrt{2m})^{-2}$, $\ln(1 + s/\sqrt{2m})$ по степеням m и подставим разложение (25) в формулы (26), (27). Приравнявая к нулю слагаемые порядка m^{-1} , $m^{-3/2}$, m^{-2} , $m^{-5/2}$, получаем задачи для определения функций u_0 , u_1 , u_2 , u_3 .

Справедлива

ЛЕММА 2. Функция u_0 является решением задачи об одномерном осцилляторе

$$\Pi u_0 = 0, \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^\infty u_0^2 ds = \frac{1}{\sqrt{2} \pi a^2}, \quad (29)$$

а функции u_1 , u_2 и u_3 – решениями задач

$$\Pi u_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du_0}{ds} - \frac{s^3}{\sqrt{2}} u_0, \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 u_1 ds = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\sqrt{2}} u_0^2 ds, \quad (31)$$

$$\Pi u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du_1}{ds} - \frac{s^3}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{s}{2} \frac{du_0}{ds} + \frac{5}{8} s^4 u_0 - 2\pi a^2 \left(E_0 + \frac{\ln a}{2\pi} \right) u_0, \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 u_2 ds = - \int_{-\infty}^{\infty} (u_1^2 + \sqrt{2} s u_0 u_1) ds \quad (33)$$

и

$$\Pi u_3 = f_{3,1} - 2\pi a^2 \left(E_0 + \frac{\ln a}{2\pi} \right) u_1 - f_{3,2} u_0, \quad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 u_3 ds = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(2u_1 u_2 + \sqrt{2} s u_0 u_2 + \frac{s}{\sqrt{2}} u_1^2 \right) ds. \quad (35)$$

Здесь оператор Π задан формулой

$$\Pi = \frac{d^2}{ds^2} + (-s^2 + 2k + 1),$$

а функции $f_{3,1}$, $f_{3,2}$ имеют вид

$$f_{3,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du_2}{ds} - \frac{s^3}{\sqrt{2}} u_2 + \frac{s}{2} \frac{du_1}{ds} + \frac{5}{8} s^4 u_1 - \frac{s^2}{2\sqrt{2}} \frac{du_0}{ds} - \frac{3s^5}{4\sqrt{2}} u_0, \quad (36)$$

$$f_{3,2} = 2\pi a^2 \left(E_1 + \frac{a^2}{2} \left[s \int_{-\infty}^s u_0^2(\tau) d\tau + \int_s^{\infty} \tau u_0^2(\tau) d\tau \right] \right).$$

Решение задачи (28), (29) выражается через полиномы Эрмита:

$$u_0 = \frac{(-1)^k}{a\sqrt{k!} \pi^{3/4} 2^{(2k+1)/4}} e^{-s^2/2} H_k(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Отметим, что после умножения на $e^{\pm im\varphi}$ правая часть этого равенства совпадает с главным членом асимптотики (20).

Условием разрешимости неоднородного уравнения $\Pi u(s) = f(s)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$ служит равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) u_0(s) ds = 0. \quad (38)$$

Так как для уравнения (30) это условие выполнено, решение задачи (30), (31) существует. Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_1 ds = 0,$$

имеем

$$u_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2k+1}{2} \frac{du_0}{ds} + \frac{1}{6} \frac{d^3 u_0}{ds^3} \right).$$

В случае уравнения (32) условие разрешимости (38) позволяет получить, что

$$E_0 = -\frac{\ln a}{2\pi}, \quad (39)$$

и при этом решение задачи (32), (33) представимо в виде

$$u_2 = \frac{1}{144} \frac{d^6 u_0}{ds^6} + \frac{2k+1}{24} \frac{d^4 u_0}{ds^4} + \left(\frac{(2k+1)^2}{16} - \frac{1}{8} \right) \frac{d^2 u_0}{ds^2} - \frac{2k+1}{8} u_0.$$

Наконец, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{3,1} u_0 ds = 0,$$

условие разрешимости уравнения (34) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{3,2} u_0^2 ds = 0.$$

Проинтегрируем по частям в этом условии, учитывая равенство (29), а также равенства

$$\frac{df_{3,2}}{ds} = \pi a^4 \int_{-\infty}^s u_0^2(\tau) d\tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} s u_0^2(s) ds = 0.$$

В результате приходим к следующей формуле для поправки к спектру:

$$E_1 = -\frac{\pi a^4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^s u_0^2(\tau) d\tau \int_s^{\infty} u_0^2(\tau) d\tau \right] ds. \quad (40)$$

Вычислим интегралы в правой части равенства (40). Для этого воспользуемся разложением [23]

$$H_n^2(s) = \sum_{k=0}^n 2^k k! (C_n^k)^2 H_{2n-2k}(s),$$

а также интегралами [24], [25]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s^2} H_{2k-2j-2}(s) H_k^2(s) ds &= \frac{\sqrt{\pi} (2j+2)! ((2k-2j-2)!)^2}{2^{2k-j-1/2} (j+1)! ((k-j-1)!)^2}, \\ \int_0^{\infty} (1 - \operatorname{erf}^2(s)) ds &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{erf}(s)$ – интеграл вероятности [23]. В итоге получаем формулу

$$E_1 = -\frac{\delta_k}{\pi^{3/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (41)$$

где $\delta_0 = 1/4$, а при $k \geq 1$ числа δ_k имеют вид (4).

Поскольку правая часть равенства (35) равна нулю, будем искать функцию u_3 в виде суммы $u_3 = u_{3,1} + u_{3,2}$, где $u_{3,1}$, $u_{3,2}$ – решения следующих задач:

$$\Pi u_{3,1} = f_{3,1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{3,1} ds = 0,$$

и

$$\Pi u_{3,2} = -f_{3,2}u_0, \quad (42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_{3,2} ds = 0. \quad (43)$$

Аналогично u_1 , u_2 функция $u_{3,1}$ также выражается через u_0 и ее производные.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$u_{3,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2592} \frac{d^9 u_0}{ds^9} + \frac{2k+1}{288} \frac{d^7 u_0}{ds^7} + \frac{5(2k+1)^2 - 16}{480} \frac{d^5 u_0}{ds^5} + \right. \\ \left. + \frac{(2k+1)^3 - 12(2k+1)}{96} \frac{d^3 u_0}{ds^3} + \frac{1 - (2k+1)^2}{4} \frac{du_0}{ds} \right\}.$$

Перейдем к решению задачи (42), (43). Функция $u_{3,2}$, возникновение которой вызвано наличием нелинейности Хартри в уравнении (1), выписывается в квадратурах. Она выражается через функции параболического цилиндра [23] и имеет значительно более сложный вид, чем $u_{3,1}$.

Воспользуемся тем, что линейно независимое от функций

$$D_k(\sqrt{2}s) = 2^{-k/2} e^{-s^2/2} H_k(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

решение уравнения (28) находится по формуле [23]

$$D_{-k-1}(i\sqrt{2}s) = \frac{i^k e^{s^2/2}}{k! 2^{(k-1)/2}} \frac{d^k}{ds^k} \left[e^{-s^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - i \int_0^s e^{t^2} dt \right) \right]. \quad (44)$$

Поскольку

$$H_k(s) = (-1)^k e^{s^2} \frac{d^k}{ds^k} e^{-s^2},$$

правая часть равенства (44) при $k = 1, 2, \dots$ может быть записана в виде

$$D_{-k-1}(i\sqrt{2}s) = \frac{(-i)^k \sqrt{\pi}}{k! 2^{(k+1)/2}} e^{-s^2/2} H_k(s) + \frac{(-i)^{k+1}}{k! 2^{(k-1)/2}} e^{-s^2/2} H_k(s) \int_0^s e^{t^2} dt + \\ + \frac{(-i)^{k+1}}{k! 2^{(k-1)/2}} \pi_{k-1}(s) e^{s^2/2},$$

где

$$\pi_{k-1}(s) = \sum_{j=1}^k C_k^j i^{j+1} H_{j-1}(is) H_{k-j}(s).$$

Отметим, что $\pi_{k-1}(s)$ является многочленом степени $k-1$ [22].

Справедлива

ЛЕММА 4. *Если $k = 1, 2, \dots$, то функция $u_{3,2}$ представима в виде*

$$u_{3,2} = \frac{1}{k! 2^k} \left\{ \left[\int_0^s e^{\tau^2} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f_{3,2}(t) u_0(t) e^{-t^2/2} H_k(t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{\tau^2/2} \pi_{k-1}(\tau) f_{3,2}(\tau) u_0(\tau) d\tau \right] e^{-s^2/2} H_k(s) - \right. \\ \left. - e^{s^2/2} \pi_{k-1}(s) \int_{-\infty}^s f_{3,2}(\tau) e^{-\tau^2/2} H_k(\tau) d\tau \right\} + c_{3,2} u_0, \quad (45)$$

где $f_{3,2}$ определена формулами (36), (41). Если $k = 0$, то функция $u_{3,2}$ представима в виде

$$u_{3,2} = \left\{ \frac{s\sqrt{\pi}}{2} + s \int_0^s e^{-t^2} dt + \frac{e^{-s^2}}{2} + 2 \int_0^s e^{t^2} dt \int_t^\infty e^{-2\tau^2} d\tau - \sqrt{2} \int_0^s e^{t^2} dt \int_t^\infty e^{-\tau^2} d\tau \right\} \frac{a^2 u_0}{2\sqrt{2\pi}} + c_{3,2} u_0. \quad (46)$$

Константа $c_{3,2}$ в формулах (45), (46) находится из условия (43).

4. НАХОЖДЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ СПЕКТРАЛЬНОГО КЛАСТЕРА

В данном разделе изучается входящая в формулу (24) спектральная поправка E_0 при различных значениях числа $k = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$ и найдено ее максимальное значение.

Интегрируя по частям в выражении (17), представим λ_1 в виде

$$\lambda_1 = - \int_0^\infty \ln \rho g_0^2(\rho) \rho d\rho - 2\pi \int_0^\infty \left[\int_0^\rho g_0^2(\rho') \rho' d\rho' \int_\rho^\infty g_0^2(\rho') \rho' d\rho' \right] \frac{d\rho}{\rho}.$$

Далее, в силу соотношений (8), (11), (24) получаем, что

$$E_0 = - \int_0^\infty \ln r u_0^2(r, \varepsilon) r dr - 2\pi \int_0^\infty \left[\int_0^r u_0^2(r', \varepsilon) r' dr' \int_r^\infty u_0^2(r', \varepsilon) r' dr' \right] \frac{dr}{r}. \quad (47)$$

Здесь $u_0(r, \varepsilon)$ – решение задачи ($r = |x|$)

$$\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) + \frac{r^2}{2} - \varepsilon(n+1) \right\} u_0 = 0, \quad (48)$$

$$\int_0^\infty u_0^2(r, \varepsilon) r dr = \frac{1}{2\pi}. \quad (49)$$

Произведем замену переменной $u_0 = y/\sqrt{r}$. В результате задача примет вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + \left(\omega(r) + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4r^2} \right) y = 0, \\ \int_0^\infty y^2 dr = \frac{1}{2\pi},$$

где $\omega(r) = -r^2 + 2a_0^2 - a^4/r^2$ и $a_0 = \sqrt{\varepsilon n}$, $a = \sqrt{\varepsilon m}$. В силу (16) параметр $a \in [0, a_0]$. Функция $\omega(r) > 0$ рассматривается при значениях r , лежащих между точками поворота $r_\pm = \sqrt{a_0^2 \pm \sqrt{a_0^4 - a^4}}$.

Согласно теории квазиклассического приближения [26] при вычислении асимптотики нормы и квантовых средних в области между точками поворота можно отбросить вклад от быстроосциллирующей части решения и оставить лишь неосциллирующую часть ВКБ-приближения для y^2 . Поэтому заменим $u_0^2 r$ в правой части равенства (47) на функцию, равную

$$\frac{1}{\pi^2 \sqrt{\omega(r)}} \quad \text{при} \quad r \in [r_-, r_+] \quad (50)$$

и равную нулю при остальных r . Отметим, что константа π^2 в (50) находится из условия нормировки

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\pi^2 \sqrt{\omega(r)}} = \frac{1}{2\pi}.$$

В результате получаем, что

$$E_0 = E_0^{(0)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $E_0^{(0)}$ задается следующей формулой:

$$E_0^{(0)} = -\frac{1}{\pi^2} \int_{r_-}^{r_+} \frac{\ln r \, dr}{\sqrt{\omega(r)}} - \frac{2}{\pi^3} \int_{r_-}^{r_+} \left[\int_{r_-}^r \frac{dr'}{\sqrt{\omega(r')}} \int_r^{r_+} \frac{dr'}{\sqrt{\omega(r')}} \right] \frac{dr}{r}. \quad (51)$$

Вычисляя входящие в эту формулу интегралы, представим $E_0^{(0)}$ в виде

$$E_0^{(0)} = E_0^{(0)}(a) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln(a_0^2 + \tau \sqrt{a_0^4 - a^4})}{\sqrt{1 - \tau^2}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \tau\right) d\tau. \quad (52)$$

Найдем максимальное значение этой функции на отрезке $[0, a_0]$.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место следующее утверждение:*

$$\max_{a \in [0, a_0]} E_0^{(0)}(a) = -\frac{\ln a_0}{2\pi}$$

и достигается при $a = a_0$. Значение максимума $-\ln a_0/2\pi$ определяет верхнюю границу спектрального кластера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$E_0^{(0)}(a) = -\frac{\ln a_0}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \tau\right) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = -\frac{\ln a_0}{2\pi},$$

запишем функцию (52) в виде

$$E_0^{(0)}(a) = -\frac{\ln a_0}{2\pi} - \frac{f(\gamma)}{4\pi^2},$$

где

$$f(\gamma) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 + \gamma\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \tau\right) d\tau, \quad \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^4} \in [0, 1].$$

Докажем, что $\min_{\gamma \in [0, 1]} f(\gamma) = 0$ и достигается в точке $\gamma = 0$. Так как при $0 < \gamma < 1$

$$f''(\gamma) = - \int_{-1}^1 \frac{\tau^2}{(1 + \gamma\tau)^2 \sqrt{1 - \tau^2}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \tau\right) d\tau < 0,$$

функция $f(\gamma)$ на отрезке $[0, 1]$ выпукла вверх, следовательно, ее минимум достигается на концах отрезка. Поскольку $f(0) = 0$, остается показать, что $f(1) > 0$.

Найдем интеграл [20]

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\pi \ln 2.$$

Так как

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)}, \quad |x| < 1,$$

справедливо неравенство

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \arcsin \tau d\tau > \int_{-1}^1 \frac{\tau \ln(1+\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \frac{\tau^3 \ln(1+\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau. \quad (53)$$

Вычисляя интегралы в правой части, находим, что

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1+\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \arcsin \tau d\tau > \frac{41}{18},$$

следовательно, справедлива оценка

$$f(1) > -\pi \ln 2 + \frac{41}{18} > \frac{1}{10}. \quad (54)$$

Отсюда следует, что $\min_{\gamma \in [0,1]} f(\gamma) = 0$ и достигается в нуле. Теорема доказана.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и числе n порядка ε^{-1} отвечающие небольшим числам $k = 0, 1, 2, \dots$ асимптотические собственные значения (3) расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг собственных значений невозмущенного оператора $\mathbf{H}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная работа продолжает начатое в статье [18] исследование асимптотики спектра операторов Хартри с сингулярными потенциалами самодействия вблизи границ спектральных кластеров. В работе [18] был рассмотрен оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ с кулоновским взаимодействием. В случае двумерного оператора Хартри асимптотические собственные значения вблизи верхних границ спектральных кластеров определяются формулой (3), где числа δ_k , $k = 1, 2, \dots$, имеют вид (4) и нелинейно зависят от k . Соответствующие асимптотические собственные функции сосредоточены вблизи окружности Γ_a , где справедливо разложение (25). Входящие в это разложение функции имеют значительно более сложный вид, чем, например, в теории комплексного ростка Маслова.

Отметим, что методы, использованные в настоящей работе, носят общий характер. Они применимы не только при изучении оператора Хартри, но и при изучении более сложных нелинейных уравнений с сингулярными потенциалами. В случае уравнений с гладким ядром самодействия эффективным оказывается метод, предложенный в работе [19].

Благодарности. Автор благодарен М. В. Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, *Укр. матем. журн.*, **2**:2 (1950), 3–24.
- [2] С. И. Пекар, *Исследования по электронной теории кристаллов*, Гостехиздат, М., 1951.
- [3] Л. П. Питаевский, *УФН*, **168**:6 (1998), 641–653.
- [4] Д. Р. Хартри, *Расчеты атомных структур*, ИЛ, М., 1960.
- [5] S. A. Achmanov, R. V. Hocklov, A. P. Suchorukov, “Self-defocusing and self-modulation in nonlinear media”, *Laserhandbuch*, **2**, North-Holland, Amsterdam, 1972, 5–108.
- [6] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [7] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **13** (1979), 145–267.
- [8] С. И. Черных, *ТМФ*, **52**:3 (1982), 491–494.
- [9] И. В. Сименюг, *ТМФ*, **30**:3 (1977), 408–414.
- [10] М. В. Карасев, *Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста*, Препринт ИТФ-87-157Р, ИТФ АН УССР, Киев, 1987.
- [11] С. А. Вакуленко, В. П. Маслов, И. А. Молотков, И. А. Шафаревич, *Докл. РАН*, **345**:6 (1995), 743–745.
- [12] М. В. Карасев, А. В. Перескоков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 33–72.
- [13] М. В. Карасев, А. В. Перескоков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:6 (2001), 57–98.
- [14] А. В. Перескоков, *ТМФ*, **131**:3 (2002), 389–406.
- [15] В. В. Белов, Ф. Н. Литвинец, А. Ю. Трифонов, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 26–40.
- [16] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в дифракции коротких волн. Метод эталонных задач*, Наука, М., 1972.
- [17] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [18] А. В. Перескоков, *ТМФ*, **183**:1 (2015), 78–89.
- [19] А. В. Перескоков, *ТМФ*, **178**:1 (2014), 88–106.
- [20] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
- [21] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, Мир, М., 1974.
- [22] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Основы теории специальных функций*, Наука, М., 1974.
- [23] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [24] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
- [25] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [26] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию 6.07.2015,
после доработки 21.11.2015