Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Загребнов, Х. Тамура, Модель неавтономной динамики, управляемой повторяющимся гармоническим взаимодействием, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 531–559

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:49:43

© 2016 г.

В. А. Загребнов^{*†}, Х. Тамура[‡]

МОДЕЛЬ НЕАВТОНОМНОЙ ДИНАМИКИ, УПРАВЛЯЕМОЙ ПОВТОРЯЮЩИМСЯ ГАРМОНИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрена точно решаемая модель неавтономной W^* -динамики, управляемой повторяющимся гармоническим взаимодействием. Динамика является гамильтоновой и квазисвободной. Вследствие неупругого взаимодействия в пределе больших времен происходит релаксация начальных состояний к стационарным состояниям. Выведена в явном виде скорость производства энтропии, сопровождающего эту релаксацию. Также изучается эволюция различных подсистем для прояснения корреляции событий и сходимости к равновесным состояниям. Доказано, что в пределе малого времени взаимодействия W^* -динамика проявляет универсальное стационарное поведение.

Ключевые слова: W^* -динамика, повторяющееся возмущение.

DOI: 10.4213/tmf9004

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И МОДЕЛЬ

1.1. Основные положения модели. Рассматриваемая модель представляет собой квантовую систему, недавно предложенную в работе [1]. Система является гармонической (одномодовый квантовый осциллятор $\mathcal{S}$) и последовательно возмущается зависящим от времени стационарным повторяющимся гармоническим взаимодействием. Последовательность возмущений включается в момент времени $t = 0$ и далее действует на интервале $0 \leq t < \infty$. Обычно такая последовательность представляется как повторяющиеся взаимодействия системы $\mathcal{S}$ с бесконечной и эквидистантной по времени цепочкой $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \dots$ подсистем $\{\mathcal{S}_k\}_{k \geq 1}$.

Х. Тамура выражает благодарность Japan Society for the Promotion of Science за финансовую поддержку (грант (С) 24540168).

^{*}Institut de Mathématiques de Marseille, Marseille, France

[†]Département de Mathématiques, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.
E-mail: Valentin.Zagrebnoy@univ-amu.fr

[‡]Institute of Science and Engineering, Graduate School of the Natural Science and Technology, Kanazawa University, Kanazawa, Japan. E-mail: tamurah@staff.kanazawa-u.ac.jp

Мы не будем обсуждать физическую интерпретацию, стоящую за нашими математическими построениями, и отсылаем читателей к работам [2], [3] и приведенной в них литературе. В модели из работы [1] система $\mathcal{C}_N$ отождествляется с цепочкой N квантовых частиц (“атомов”) с бесконечно большим числом гармонических внутренних степеней свободы. Они последовательно взаимодействуют с одномодовым квантовым резонатором $\mathcal{S}$. Это можно считать слабой имитацией системы одноатомного лазера. В отличие от модели из работы [2], но аналогично двухуровневым атомам Джейнса–Камингса [3], взаимодействие с гармоническими атомами является неупругим. Эволюция модели из работы [1] существенно отличается от эволюции модели из работы [2], где взаимодействие упругое (см. п. 3.2 и раздел 4 настоящей статьи).

Ниже мы будем предполагать, что состояния системы $\mathcal{S}$ и каждой подсистемы $\mathcal{S}_k$ являются *нормальными*, т. е. определяются матрицами плотности ρ_0 и ρ_k в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_k}$ соответственно, $k = 1, 2, \dots$. Тогда гильбертово пространство полной системы есть тензорное произведение $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, где бесконечное произведение $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \bigotimes_{k \geq 1} \mathcal{H}_{\mathcal{S}_k}$ обозначает цепочку гильбертовых пространств.

Поскольку в любой фиксированный момент времени $t \geq 0$ в динамике участвует только конечное число $N(t)$ повторяющихся взаимодействий, подсистемы $\mathcal{S}_k$ при различных $k > N(t)$ все еще независимы, а также не зависят от компонент $\mathcal{S}$ и $\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^{N(t)}$. Проблема корреляций между компонентами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_k$ при $k \leq N(t)$ и между $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{S}_{k'}$ при $1 \leq k < k' \leq N(t)$ рассматривается в разделе 4. Такая особенность повторяющихся взаимодействий позволяет свести анализ динамики к рассмотрению конечного тензорного произведения $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_N} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_{\mathcal{S}_k}$. Тогда мы можем получить упомянутую бесконечную цепочку $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ как апостериорный предел при $N \rightarrow \infty$.

Подробное описание динамики приведено в разделе 2.

В заключение данного пункта сформулируем некоторые предположения.

ГИПОТЕЗА 1. (Начальные состояния.) При $t \leq 0$ все компоненты систем $\mathcal{S}$ и $\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^N$ являются независимыми, т. е. состояние системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}_N$ описывается как конечное тензорное произведение

$$\omega_{\mathcal{S} + \mathcal{C}_N} := \omega_{\mathcal{S}} \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N \omega_{\mathcal{S}_k} \right).$$

Мы будем предполагать, что каждое из состояний в этом произведении является нормальным.

ГИПОТЕЗА 2. (Настройка взаимодействия.) Рассмотрим повторяющиеся возмущения в режиме настройки: в любой момент времени $t \geq 0$ в точности одна подсистема (“атом”) $\mathcal{S}_n$ взаимодействует с системой $\mathcal{S}$ (квантовым резонатором) в течение фиксированного времени $\tau > 0$. Здесь $n = [t/\tau] + 1$, где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \geq 0$.

Пусть $\mathcal{H}_0$ – гильбертово пространство системы $\mathcal{S}$, а $\mathcal{H}_k$ – гильбертово пространство системы $\mathcal{S}_k$, $k = 1, \dots, N$. Тогда для каждого $k = 0, 1, \dots, N$ пространство $\mathcal{H}_k$ является копией одномодового бозонного фоковского пространства $\mathcal{F}$ с вакуумным вектором $\Omega \in \mathcal{F}$ и с плотно определенными операторами уничтожения и рождения

бозона a и a^* (сопряженный оператор), причем вакуумный вектор определяется равенством $a\Omega = 0$. Полная система $\mathcal{S} + \mathcal{C}_N$ живет в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^{(N)} := \mathcal{H}_0 \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k \right) = \mathcal{F}^{\otimes(N+1)}. \quad (1.1)$$

Обозначим через $\mathbb{1}$ единичный оператор в $\mathcal{F}$. В пространстве (1.1) определим операторы

$$b_k := \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes a \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}, \quad b_k^* := \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes a^* \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}, \quad (1.2)$$

где операторы a или a^* являются $(k+1)$ -ми множителями в произведениях. Операторы (1.2) формально удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (ККС)

$$[b_k, b_{k'}^*] = \delta_{k,k'} \mathbb{1}, \quad [b_k, b_{k'}] = [b_k^*, b_{k'}^*] = 0, \quad k, k' = 0, 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

ГИПОТЕЗА 3. (Гармоническое взаимодействие.) *Зависящее от времени повторяющееся взаимодействие из гипотезы 2 представляет собой кусочно-постоянный оператор в пространстве (1.1). Он равен сумме $n \geq 1$ билинейных форм $K_n(t)$ по операторам (1.2) в пространстве $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_n$, заданных как*

$$K_n(t) := \chi_{[(n-1)\tau, n\tau)}(t) \eta (b_0^* b_n + b_n^* b_0), \quad \eta > 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\chi_{\mathcal{I}}(x)$ – характеристическая функция множества $\mathcal{I}$.

1.2. Модель. Для любых $N \geq 1$ и $t < N\tau$ самосопряженный гамильтониан $H_N(t)$ неавтономной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}_N$ определяется в пространстве (1.1) как сумма гамильтонианов, отвечающих системам $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_k$ и взаимодействию (1.4) [1]:

$$\begin{aligned} H_N(t) &:= H_{\mathcal{S}} + \sum_{k=1}^N (H_{\mathcal{S}_k} + K_k(t)) = \\ &= E b_0^* b_0 + \epsilon \sum_{k=1}^N b_k^* b_k + \eta \sum_{k=1}^N \chi_{[(k-1)\tau, k\tau)}(t) (b_0^* b_k + b_k^* b_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

ГИПОТЕЗА 4. (Полуограниченность гамильтониана.) *Чтобы самосопряженный гамильтониан (1.5) оставался полуограниченным снизу, будем предполагать, что $E > 0$, $\epsilon > 0$, и наложим условие*

$$\eta^2 \leq E\epsilon. \quad (1.6)$$

Согласно соотношениям (1.4), (1.5) только подсистема $\mathcal{S}_n$ взаимодействует с $\mathcal{S}$ при $t \in [(n-1)\tau, n\tau)$, $n \geq 1$, т.е. на этом временном интервале система $\mathcal{S} + \mathcal{C}_N$ является автономной с самосопряженным гамильтонианом

$$H_n := E b_0^* b_0 + \epsilon \sum_{k=1}^N b_k^* b_k + \eta (b_0^* b_n + b_n^* b_0), \quad n \leq N. \quad (1.7)$$

Заметим, что существует сохраняющее ККС линейное преобразование, которое диагонализует оператор (1.7):

$$\tilde{H}_n := \varepsilon_0 c_0^* c_0 + \varepsilon_1 c_1^* c_1 + \sum_{k=2}^N \varepsilon_k c_k^* c_k. \quad (1.8)$$

Здесь в соответствии с гипотезой 4

$$\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = \epsilon, \\ \varepsilon_0 := \frac{1}{2} \left[(E + \epsilon) + \sqrt{(E - \epsilon)^2 + 4\eta^2} \right] > 0, \quad \varepsilon_1 := \frac{1}{2} \left[(E + \epsilon) - \sqrt{(E - \epsilon)^2 + 4\eta^2} \right] > 0.$$

Из гармонической структуры гамильтониана (1.7) следует ключевая лемма.

ЛЕММА 1.1. Для $j = 0, 1, \dots, N$ и $n = 1, 2, \dots, N$ получаем при $t \geq 0$ следующие равенства:

$$e^{itH_n} b_j e^{-itH_n} = \sum_{k=0}^N (U_n^*(t))_{jk} b_k, \quad e^{itH_n} b_j^* e^{-itH_n} = \sum_{k=0}^N \overline{(U_n^*(t))_{jk}} b_k^*, \quad (1.9)$$

$$e^{-itH_n} b_j e^{itH_n} = \sum_{k=0}^N (U_n(t))_{jk} b_k, \quad e^{-itH_n} b_j^* e^{itH_n} = \sum_{k=0}^N \overline{(U_n(t))_{jk}} b_k^*. \quad (1.10)$$

Здесь $U_n(t)$ и $V_n(t)$ – матрицы размера $(N+1) \times (N+1)$; элементы матрицы $V_n(t)$ задаются как

$$(V_n(t))_{jk} := \begin{cases} g(t)z(t)\delta_{k0} + g(t)w(t)\delta_{kn} & \text{при } j = 0, \\ g(t)w(t)\delta_{k0} + g(t)z(-t)\delta_{kn} & \text{при } j = n, \\ \delta_{jk} & \text{в иных случаях,} \end{cases} \quad (1.11)$$

где

$$g(t) := e^{it(E-\epsilon)/2}, \quad w(t) := \frac{2i\eta}{\sqrt{(E-\epsilon)^2 + 4\eta^2}} \sin\left(t\sqrt{\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2}\right), \quad (1.12)$$

$$z(t) := \cos\left(t\sqrt{\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2}\right) + \frac{i(E-\epsilon)}{\sqrt{(E-\epsilon)^2 + 4\eta^2}} \sin\left(t\sqrt{\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2}\right); \quad (1.13)$$

матрица $U_n(t)$ связана с $V_n(t)$ соотношением $U_n(t) := e^{it\epsilon} V_n(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Согласно определениям (1.12) и (1.13) мы получаем равенства $|z(t)|^2 + |w(t)|^2 = 1$, $z(-t) = \overline{z(t)}$ и $w(t) = -\overline{w(t)}$. Поэтому матрица

$$M(t) := \begin{pmatrix} z(t) & w(t) \\ w(t) & z(-t) \end{pmatrix}$$

является унитарной. При $N = 1$ получаем $M(t) = \overline{g(t)} V_1(t)$ (см. формулу (1.11)). Более того, из соотношений (1.9) и (1.10) следует, что $\{V_n(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{U_n(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в действительности являются однопараметрическими группами унитарных матриц размера $(N+1) \times (N+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Пусть $\{J_n\}_{n=1}^N$ и $\{X_n\}_{n=1}^N$ – эрмитовы матрицы размера $(N+1) \times (N+1)$ с элементами

$$(J_n)_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = k = 0 \text{ или } j = k = n, \\ 0 & \text{в иных случаях,} \end{cases} \quad (1.14)$$

$$(X_n)_{jk} := \begin{cases} (E - \epsilon)/2 & \text{при } (j, k) = (0, 0), \\ -(E - \epsilon)/2 & \text{при } (j, k) = (n, n), \\ \eta & \text{при } (j, k) = (0, n), \\ \eta & \text{при } (j, k) = (n, 0), \\ 0 & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Определим матрицы

$$Y_n := \epsilon I + \frac{E - \epsilon}{2} J_n + X_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

где I – единичная матрица размера $(N+1) \times (N+1)$. Тогда гамильтониан (1.7) принимает вид

$$H_n = \sum_{j,k=0}^N (Y_n)_{jk} b_j^* b_k. \quad (1.17)$$

Поскольку матрица Y_n эрмитова, существует диагональная матрица Λ и унитарное отображение $\mathcal{U}_n: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, такое что $Y_n = \mathcal{U}_n^* \Lambda \mathcal{U}_n$. Напомним, что после канонического преобразования матрица $\Lambda := \{\Lambda_{ij}\}_{i,j=0}^N = \{\delta_{ij} \varepsilon_j\}_{i,j=0}^N$ является универсальной и не зависит от n .

Новые операторы

$$c_j = \sum_{k=0}^N (\mathcal{U}_n)_{jk} b_k, \quad c_j^* = \sum_{k=0}^N \overline{(\mathcal{U}_n)_{jk}} b_k^*, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (1.18)$$

удовлетворяют ККС в пространстве $\mathcal{H}^{(N)}$ (1.1) и диагонализуют оператор (1.17):

$$\tilde{H}_n = \sum_{j=0}^N \Lambda_{jj} c_j^* c_j, \quad \Lambda_{jj} = \varepsilon_j.$$

Поэтому множество всех собственных векторов оператора $\tilde{H}_n$ имеет вид

$$\left\{ \prod_{j=0}^N \frac{(c_j^*)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \mid n_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 0, 1, \dots, N \right\}. \quad (1.19)$$

Заметим, что мы получили ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{(N)}$. Линейная оболочка $\mathcal{H}_0^{(N)}$ множества (1.19) является инвариантным подпространством при преобразованиях $e^{it\tilde{H}_n}$, и ее замыкание совпадает с $\mathcal{H}^{(N)}$. Тогда в силу (1.18) получаем для векторов (1.19)

$$e^{it\tilde{H}_n} c_j e^{-it\tilde{H}_n} = e^{-it\Lambda_{jj}} c_j, \quad e^{it\tilde{H}_n} c_j^* e^{-it\tilde{H}_n} = e^{it\Lambda_{jj}} c_j^*.$$

Теперь с учетом канонического преобразования (1.18) имеем

$$\begin{aligned} e^{itH_n} b_j e^{-itH_n} &= \sum_{k=0}^N (\mathcal{U}_n^*)_{jk} e^{it\tilde{H}_n} c_k e^{-it\tilde{H}_n} = \\ &= \sum_{k,l=0}^N (\mathcal{U}_n^*)_{jk} e^{-it\Lambda_{kk}} (\mathcal{U}_n)_{kl} b_l = \sum_{l=0}^N (e^{-it\mathcal{U}_n^* \Lambda \mathcal{U}_n})_{jl} b_l = \sum_{l=0}^N (e^{-itY_n})_{jl} b_l. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Аналогично получаем

$$e^{itH_n} b_j^* e^{-itH_n} = \sum_{l=0}^N \overline{(e^{-itY_n})_{jl}} b_l^*.$$

Заметим, что, используя соотношения (1.14), (1.15), мы получаем тождества

$$X_n^2 = \left(\frac{(E - \epsilon)^2}{4} + \eta^2 \right) J_n, \quad J_n X_n = X_n.$$

Вместе с определениями (1.16) и (1.11) это дает

$$\begin{aligned} e^{itY_n} &= e^{it\epsilon} \left(I - J_n + e^{it(E-\epsilon)/2} \left\{ J_n \cos \left(t \sqrt{\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i X_n \left(\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2 \right)^{-1/2} \sin \left(t \sqrt{\frac{(E-\epsilon)^2}{4} + \eta^2} \right) \right\} \right) = \\ &= e^{it\epsilon} V_n(t) = U_n(t). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Теперь, подставляя полученное равенство в (1.20), мы доказываем (1.9). Поскольку $U_n(t)^* = U_n(-t)$, можно аналогично получить (1.10). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Здесь и далее мы используем сокращенные обозначения

$$g := g(\tau), \quad w := w(\tau), \quad z := z(\tau), \quad V_n := V_n(\tau), \quad U_n := U_n(\tau). \quad (1.22)$$

В заключение этого раздела приведем краткое содержание настоящей работы. В разделе 2 дано явное описание гамильтоновой динамики для неавтономной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$, управляющейся гармоническими повторяющимися взаимодействиями (см. гипотезу 3). Показано, что наша модель бозонов (1.5) представляет собой квазисвободную W^* -динамическую систему. В п. 3.1 мы напомним формулы для энтропии ККС квазисвободных состояний. Они используются в п. 3.2 для вычисления производства энтропии. Раздел 4 посвящен анализу редуцированной динамики подсистем, их корреляциям и сходимости к равновесному состоянию. В конце раздела мы доказываем универсальность предела короткого времени взаимодействия для этой динамики в случае подсистемы $\mathcal{S}$.

2. НЕАВТОНОМНАЯ ДИНАМИКА ЛИУВИЛЛЯ

2.1. Динамика и двойственная динамика. Характеристическая функция. Начнем этот раздел с анализа эволюции неавтономной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ с гамильтонианом (1.5). Поскольку математическое описание эволюции неограниченных операторов рождения-уничтожения связано с некоторыми техническими проблемами, общий прием заключается в построении динамики на соответствующей унитарной C^* -алгебре Вейля ККС [4]. Для подсистемы $\mathcal{S}$ это C^* -алгебра ККС $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, порожденная на фоксовском пространстве $\mathcal{F}$ как замыкание по операторной норме линейной оболочки $\mathcal{A}_w$ системы операторов Вейля

$$\{\hat{w}(\alpha) = e^{i\Phi(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}. \quad (2.1)$$

Здесь $\Phi(\alpha) := (\bar{\alpha}a + \alpha a^*)/\sqrt{2}$ – самосопряженный оператор с областью определения в $\mathcal{F}$. Тогда ККС принимают вейлевский вид

$$\hat{w}(\alpha_1)\hat{w}(\alpha_2) = e^{-i\text{Im}(\bar{\alpha}_1\alpha_2)/2}\hat{w}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Заметим, что $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ является минимальной C^* -алгеброй, которая содержит линейную оболочку $\mathcal{A}_w$ системы операторов Вейля (2.1). Алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ содержится в унитарной C^* -алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ всех ограниченных операторов на $\mathcal{F}$.

Аналогично определим C^* -алгебру Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ над $\mathcal{H} := \mathcal{H}^{(N)}$ (1.1), подходящую для описания системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$. Эта алгебра порождается операторами

$$W(\zeta) = \bigotimes_{k=0}^N \hat{w}(\zeta_k), \quad \zeta = \{\zeta_k\}_{k=0}^N \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad N \geq 1. \quad (2.3)$$

Используя определения бозонных операторов $\{b_k, b_k^*\}_{k=1}^N$ и полуторалинейных форм

$$\langle \zeta, b \rangle := \sum_{j=0}^N \bar{\zeta}_j b_j, \quad \langle b, \zeta \rangle := \sum_{j=0}^N \zeta_j b_j^*, \quad (2.4)$$

можно переписать операторы Вейля (2.3) в виде

$$W(\zeta) = \exp \left[i \frac{\langle \zeta, b \rangle + \langle b, \zeta \rangle}{\sqrt{2}} \right]. \quad (2.5)$$

Обозначим через $\mathfrak{C}_1(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$ множество всех ядерных операторов на $\mathcal{F}$. Самосопряженный неотрицательный оператор $\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{F})$ с единичным следом называется *матрицей плотности*. *Нормальным* является состояние $\omega_\rho(\cdot)$, порожденное на C^* -алгебре ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ оператором ρ как

$$\omega_\rho(A) := \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho A), \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}). \quad (2.6)$$

Пусть $\{\rho_k\}_{k=0}^N$ – матрицы плотности на $\mathcal{F}$. Нормальное *состояние-произведение* на C^* -алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ (изометрически изоморфное тензорному произведению $\bigotimes_{k=0}^N \mathcal{A}(\mathcal{F})$) задается как

$$\omega_{\rho^{\otimes}}(\cdot) := \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\rho^{\otimes} \cdot), \quad \rho^{\otimes} := \bigotimes_{k=0}^N \rho_k. \quad (2.7)$$

Если мы положим $C_k(\alpha) := \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho_k \hat{w}(\alpha)]$ для $\alpha \in \mathbb{C}$, то в соответствии с (2.3) получим представление для $\rho^{\otimes}$:

$$\omega_{\rho^{\otimes}}(W(\zeta)) := \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho^{\otimes} W(\zeta)] = \prod_{k=0}^N C_k(\zeta_k). \quad (2.8)$$

Пусть $\varrho \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ – матрица плотности на $\mathcal{H}$. Тогда для системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ гамильтонова эволюция $T_t: \varrho \mapsto \varrho(t)$ начальной матрицы плотности $\varrho(0) := \varrho$ определяется как решение задачи Коши для неавтономного уравнения Лиувилля

$$\partial_t \varrho(t) = L(t)(\varrho(t)), \quad \varrho(t)|_{t=0} = \varrho. \quad (2.9)$$

Согласно соотношению (1.7) это уравнение является автономным для каждого интервала $[(n-1)\tau, n\tau)$:

$$L(t)(\cdot) = L_n(\cdot) = -i[H_n, \cdot], \quad t \in [(n-1)\tau, n\tau), \quad n \geq 1, \quad (2.10)$$

т. е. генератор Лиувилля кусочно не зависит от времени.

Поскольку любое значение $t \geq 0$ может быть представлено в виде

$$t := n(t)\tau + \nu(t), \quad n(t) := [t/\tau], \quad \nu(t) \in [0, \tau), \quad (2.11)$$

непрерывное по следовой норме $\|\cdot\|_1$ решение задачи Коши (2.9) [5] можно найти с помощью итераций:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= T_t(\varrho) := T_{\nu(t), n}(T_{\tau, n-1}(\dots T_{\tau, 1}(\varrho) \dots)) = \\ &= e^{-i\nu(t)H_n} e^{-i\tau H_{n-1}} \dots e^{-i\tau H_1} \varrho e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_{n-1}} e^{i\nu(t)H_n}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $t \in [(n-1)\tau, n\tau)$ и $n = n(t) < N$. Вследствие непрерывности по норме $\|\cdot\|_1$ из (2.12) получаем

$$\varrho(N\tau - 0) = \varrho(N\tau) = T_{N\tau}(\varrho) = e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1} \varrho e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N}. \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что

$$U(t) = e^{-i\tau H_1} \dots e^{-i\tau H_{n-1}} e^{-i\nu(t)H_n(t)}, \quad t = n(t)\tau + \nu(t),$$

является однопараметрическим сильно непрерывным семейством унитарных операторов на $\mathcal{H}$. Тогда равенство $\varrho(t) = U(t)\varrho U^*(t)$ влечет, что при $t \in \mathbb{R}$ отображение T_t (2.12) вполне положительно и сохраняет след, так что отображение $t \mapsto \varrho(t)$ оказывается непрерывным в слабой операторной топологии. Поскольку $\|\varrho(t)\|_1 = 1$, из слабой непрерывности следует $\|\cdot\|_1$ -непрерывность отображения $t \mapsto \varrho(t)$ (см., например, книгу [5], следствие 2.66). Таким образом, отображение T_t является непрерывным по следовой норме $*$ -автоморфизмом множества

$$\{\varrho \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}): \varrho \geq 0, \|\varrho\|_1 = 1\}$$

всех матриц плотности.

Напомним, что эквивалентным и часто более удобным описанием эволюции матриц плотности (2.12) является двойственное отображение $T_t^*: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, задающееся как

$$\omega_{\varrho(t)}(A) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(T_t(\varrho)A) =: \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\varrho T_t^*(A)), \quad (\varrho, A) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{F}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (2.14)$$

Поскольку отображение $t \mapsto T_t(\varrho)$ является $\|\cdot\|_1$ -непрерывным и поскольку $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ топологически двойственно к $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, получаем, что $t \mapsto T_t^*(A)$ из (2.14) представляет собой однопараметрический $*$ -автоморфизм унитарной C^* -алгебры ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Автоморфизм C^* -динамической системы $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), T_t^*)$ не является непрерывным по времени для бозонов. Чтобы обеспечить непрерывность отображения T_t^* , рассмотрим вместо C^* -алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ алгебру фон Неймана $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$ – замыкание вейлевской линейной оболочки $\mathcal{A}_w$, порожденной операторами (2.1), (2.3), в слабой* топологии. Поскольку эта топология слабее, чем топология C^* -алгебры, алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$ оказывается $*$ -изоморфной $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда из $\|\cdot\|_1$ -непрерывности $T_t(\varrho)$ следует непрерывность двойственного отображения $t \mapsto T_t^*(A)$ в слабой* топологии на $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$, а также определяется W^* -динамическая система $(\mathfrak{M}(\mathcal{H}), T_t^*)$ (см., например, книгу [6]).

Ниже мы покажем, что T_t^* отображает $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ саму в себя и что действие T_t^* на операторы Вейля можно вычислить в явном виде. Поскольку $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ является слабо* плотной в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, можно вывести свойства эволюции $t \mapsto \rho(t)$ для нормального состояния $\omega_{\rho(t)}(\cdot)$.

Будем использовать *характеристическую функцию* $E_{\omega}(\zeta)$ состояния ω на C^* -алгебре Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{H})$:

$$\zeta \mapsto E_{\omega}(\zeta) := \omega(W(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C}^{N+1}. \quad (2.15)$$

Конечные линейные комбинации операторов (2.3) плотны по норме в $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, поэтому отображение $\zeta \mapsto W(\zeta)$ является непрерывным в сильной операторной топологии. Если функция $\mathbb{R} \ni s \mapsto E_{\omega}(s\zeta)$ непрерывна, то состояние ω регулярно.

Согласно теореме Араки–Сигала (см., например, [6]) любое состояние ω на $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ полностью определяется своей характеристической функцией. Ниже мы будем использовать связь между сходимостью характеристических функций и состояний.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Множество состояний $S_{\mathcal{A}}$ над алгеброй $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ является подмножеством в алгебре, двойственной к $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, т.е. $S_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})^*$. Кроме равномерной топологии на $\mathcal{A}(\mathcal{H})^*$ рассматривается также слабая* топология. Сужение этой топологии на $S_{\mathcal{A}}$ определяется системой окрестностей

$$\mathcal{N}(\omega; A_1, \dots, A_n) := \{\omega' \in \mathcal{A}(\mathcal{H})^*: |\omega'(A_i) - \omega(A_i)| < \varepsilon, \ i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.16)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и конечного набора операторов $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Если последовательность регулярных состояний $\{\omega^{(k)}\}_{k \geq 1}$ доставляет сходимость характеристических функций,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_{\omega^{(k)}}(\zeta) = E_{\infty}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^{N+1}, \quad (2.17)$$

то $E_{\infty}(\zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы Араки–Сигала и определяет на $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ регулярное состояние $\omega^{(\infty)}$ с $E_{\omega^{(\infty)}}(\zeta) = E_{\infty}(\zeta)$. Более того, из (2.17) следует,

что $\omega^{(\infty)}$ есть предел последовательности $\{\omega^{(k)}\}_{k \geq 1}$ в слабой* топологии (2.16) на S_A :

$$\omega^{(\infty)} = w^* \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^{(k)}$$

(см. сборник [6] и книгу [4], глава 5.2.3).

2.2. Квазисвободная эволюция. Используя соотношение (2.13) и двойственное представление (2.14), получаем основной результат данного раздела. Начнем с леммы.

ЛЕММА 2.1. *Характеристическая функция $E_{\omega_{\varrho(t)}}(\zeta)$ (2.15) при $t = N\tau$ имеет вид*

$$\omega_{\varrho(N\tau)}(W(\zeta)) = \omega_{\varrho}(W(U_1 \dots U_N \zeta)) = \prod_{k=0}^N C_k((U_1 \dots U_N \zeta)_k), \quad (2.18)$$

если при $t = 0$ начальное условие $\varrho := \bigotimes_{k=0}^N \rho_k$ (см. задачу Коши (2.7)). Здесь

$$(U_1 \dots U_N \zeta)_0 = e^{iN\tau\epsilon} \left((gz)^N \zeta_0 + \sum_{j=1}^N gw(gz)^{j-1} \zeta_j \right), \quad (2.19)$$

при этом для $0 < k < N$

$$(U_1 \dots U_N \zeta)_k = e^{iN\tau\epsilon} \left(gw(gz)^{N-k} \zeta_0 + g\bar{z} \zeta_k + \sum_{j=k+1}^N g^2 w^2 (gz)^{j-k-1} \zeta_j \right) \quad (2.20)$$

и

$$(U_1 \dots U_N \zeta)_N = e^{iN\tau\epsilon} (gw \zeta_0 + g\bar{z} \zeta_N) \quad (2.21)$$

(см. определения (1.12) и (1.13)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что формулы (2.8), (2.13) и двойственность (2.14) дают

$$\begin{aligned} \omega_{\varrho(N\tau)}(W(\zeta)) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\varrho T_{N\tau}^*(W(\zeta))] = \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\varrho e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N} W(\zeta) e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1}] = \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\varrho W(U_1 \dots U_N \zeta)] = \prod_{k=0}^N C_k((U_1 \dots U_N \zeta)_k). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Чтобы ввести отображение $\zeta \mapsto U_1 \dots U_N \zeta$ из (2.22), используем лемму 1.1 и полуторалинейные формы (2.4). Получим

$$e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N} \langle \zeta, b \rangle e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1} = \langle \zeta, U_N^* \dots U_1^* b \rangle = \langle U_1 \dots U_N \zeta, b \rangle \quad (2.23)$$

и аналогичное выражение для сопряженного отображения, которое затем подставим в равенство (2.5).

Более того, согласно той же лемме 1.1 получаем $U_1 \dots U_N \zeta = e^{iN\tau\epsilon} V_1 \dots V_N \zeta$, где

$$(V_1 \dots V_N)_{0j} = \begin{cases} (V_1)_{00} \dots (V_N)_{00} = (gz)^N, & j = 0, \\ (V_1)_{00} \dots (V_{j-1})_{00} (V_j)_{0j} (V_{j+1})_{jj} \dots (V_N)_{jj} = (gz)^{j-1} gw, & 0 < j \leq N, \end{cases}$$

и при $0 < k \leq N$

$$(V_1 \dots V_N)_{kj} = \begin{cases} (V_1 \dots V_{k-1})_{kk}(V_k)_{k0}(V_{k+1} \dots V_N)_{00} = gw(gz)^{N-k}, & j = 0, \\ 0, & 0 < j < k, \\ (V_1 \dots V_{k-1})_{kk}(V_k)_{kk}(V_{k+1} \dots V_N)_{kk} = g\bar{z}, & j = k, \\ (V_1 \dots V_{k-1})_{kk}(V_k)_{k0}(V_{k+1} \dots V_{j-1})_{00}(V_j)_{0j}(V_{j+1} \dots V_N)_{jj} = \\ = gw(gz)^{j-k-1}gw, & k < j \leq N. \end{cases}$$

Собирая эти формулы, получаем явные выражения для компонент (2.19) и (2.20) вектора $U_1 \dots U_N \zeta$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Для фиксированного значения N и для любого момента времени $t = m\tau$, $1 \leq m \leq N$, рассуждения леммы 2.1 дают для характеристической функции $E_{\omega_{\varrho(m\tau)}}(\zeta)$ (2.15) общую формулу

$$\begin{aligned} \omega_{\varrho(m\tau)}(W(\zeta)) &= \omega_{\varrho}(T_{m\tau}^*(W(\zeta))) = \\ &= \omega_{\varrho}(W(U_1 \dots U_m \zeta)) = \prod_{k=0}^N C_k((U_1 \dots U_m \zeta)_k). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Повторяя те же рассуждения, что и для (2.20), получаем явные формулы для компонент $\{(U_1 \dots U_m \zeta)_k\}_{k=0}^N$:

$$\begin{aligned} (U_1 \dots U_m \zeta)_k &= \\ &= \begin{cases} e^{im\tau\epsilon}((gz)^m \zeta_0 + \sum_{j=1}^m gw(gz)^{j-1} \zeta_j), & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon}(gw(gz)^{m-k} \zeta_0 + g\bar{z}\zeta_k + \sum_{j=k+1}^m g^2 w^2 (gz)^{j-k-1} \zeta_j), & 1 \leq k < m, \\ e^{im\tau\epsilon}(gw\zeta_0 + g\bar{z}\zeta_m), & k = m \\ e^{im\tau\epsilon} \zeta_k, & m < k \leq N, \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что при $m = N$ эти формулы совпадают с (2.19)–(2.21) за исключением последней строки, которая в данном случае является пустой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Сохраняющая единицу $*$ -динамика $t \mapsto T_t^*$ на алгебре фон Неймана $\mathfrak{M}(\mathcal{H})$, порожденной операторами $\{W(\zeta)\}_{\zeta \in \mathbb{C}}$ (2.5), является *квазисвободной*, если существует такое отображение $U_t: \zeta \mapsto U_t \zeta$ и такая комплекснозначная функция $\Omega_t: \zeta \mapsto \Omega_t(\zeta)$, что

$$T_t^*(W(\zeta)) = \Omega_t(\zeta)W(U_t \zeta), \quad \Omega_0 = 1, \quad U_0 = I \quad (2.25)$$

(см., например, [6], [4] или [7]).

Теперь согласно замечанию 2.3 мы немедленно получаем основной результат для W^* -динамической системы $(\mathfrak{M}(\mathcal{H}), T_t^*)$ в рамках нашей модели.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пошаговая двойственная динамика*

$$T_{m\tau}^*(W(\zeta)) = W(U_1 \dots U_m \zeta), \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

является квазисвободной (см. соотношение (2.25)) при $\Omega_t(\zeta) = 1$ и для матриц $\{U_j\}_{j=1}^N$ на $\mathbb{C}^{N+1}$, которые определяются леммой 1.1.

3. ЭВОЛЮЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ

3.1. Энтропия квазисвободных состояний. В данном пункте мы получим некоторые полезные формулы, связывающие математические ожидания операторов Вейля (вейлевские характеристические функции) и энтропию бозонных квазисвободных состояний. Полученные формулировки являются ограниченными, но достаточными для наших целей. Общие положения рассмотрены, например, в трудах [4], [6]–[8] и приведенной в них литературе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Состояние ω на C^* -алгебре ККС $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (2.1) называется *квазисвободным*, если

$$\omega_T(\Phi(\alpha_1), \Phi(\alpha_2), \dots, \Phi(\alpha_m)) = 0 \quad \text{при} \quad m \geq 3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}.$$

Здесь усеченные математические ожидания ω_T определяются с помощью рекурсии

$$\begin{aligned} \omega_T(\Phi(\alpha)) &:= \omega(\Phi(\alpha)), \\ \omega_T(\Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)) &:= \omega(\Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)) - \omega(\Phi(\alpha_1))\omega(\Phi(\alpha_2)), \quad \dots \end{aligned}$$

Таким образом, данное состояние полностью определяется линейным функционалом $\omega(\Phi(\alpha))$ и положительным билинейным функционалом

$$\omega(\Phi(s_1\alpha_1)\Phi(s_2\alpha_2)) = s_1s_2\omega(\Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что квазисвободное состояние определяется характеристической функцией

$$\omega(\hat{w}(\alpha)) := e^{i\omega(\Phi(\alpha)) - \omega_T(\Phi(\alpha)^2)/2}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Тогда C^∞ -непрерывную функцию $s \mapsto \omega(\hat{w}(s\alpha))$, $s \in \mathbb{R}$, можно продолжить до аналитической в открытой полосе вокруг вещественной оси, что позволяет проверить свойства функции ω_T дифференцированием при $s = 0$. Заметим, что состояние $\omega(\cdot)$ называется *аналитическим*, если его характеристическая функция $\omega(\hat{w}(z\alpha))$ является аналитической при $z \in \mathbb{C}$ в открытой окрестности начала координат. Поэтому любое квазисвободное состояние аналитическое.

Напомним, что квазисвободное состояние ω является *калибровочно-инвариантным*, если $\omega(\hat{w}(\alpha)) = \omega(\hat{w}(e^{i\varphi}\alpha))$ при $\varphi \in [0, 2\pi)$. Используя аналитичность, находим, что $\omega(\Phi(\alpha)) = 0$ и что состояние определяется положительной полуторалинейной формой $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \omega(\Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2))$. Тогда из (3.1) и определения оператора $\Phi(\alpha)$ получаем для характеристической функции квазисвободного калибровочно-инвариантного состояния над C^* -алгеброй Фока ККС следующее равенство:

$$\omega(\hat{w}(\alpha)) = e^{-|\alpha|^2/4 - h(\alpha)/2}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

где полуторалинейная форма есть $h(\alpha) := |\alpha|^2\omega(a^*a)$.

Пусть ω_β – гиббсовское состояние с параметром β (безразмерная обратная температура), которое задается матрицей плотности $\rho(\beta) = e^{-\beta a^*a}/Z(\beta)$, где $Z(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}$. Поскольку

$$\omega_\beta(\hat{w}(\alpha)) = e^{-|\alpha|^2/4 - h_\beta(\alpha)/2}, \quad h_\beta(\alpha) = \frac{|\alpha|^2}{e^\beta - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

это состояние является квазисвободным и калибровочно-инвариантным. Заметим, что энтропия состояния ω_β имеет вид

$$s(\beta) := -\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho(\beta) \ln \rho(\beta)] = \beta \omega_\beta(a^* a) - \ln(1 - e^{-\beta}), \quad \omega_\beta(a^* a) = \frac{1}{e^\beta - 1}. \quad (3.4)$$

В терминах переменной $x := (1 + e^{-\beta})/(1 - e^{-\beta})$ энтропия (3.4) равна

$$s(\beta) = \sigma(x) := \frac{x+1}{2} \ln \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} \ln \frac{x-1}{2}. \quad (3.5)$$

Здесь $\sigma: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ и $\sigma'(x) > 0$.

Чтобы продолжить формулу (3.5) на пространство (1.1), заметим, что общие калибровочно-инвариантные квазисвободные состояния на C^* -алгебре ККС $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ определяются матрицей плотности вида [7]

$$\rho_L = \frac{1}{Z_L} e^{-\langle b, Lb \rangle}, \quad Z_L = \det [I - e^{-L}]^{-1}. \quad (3.6)$$

Здесь полуторалинейные операторнозначные формы $\langle b, Lb \rangle = \sum_{n,m=0}^N \ell_{nm} b_n^* b_m$ параметризованы положительно-определенной эрмитовой матрицей $L = \{\ell_{nm}\}_{0 \leq n,m \leq N}$ размера $(N+1) \times (N+1)$. Заметим, что $*$ -автоморфизм G_φ на $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ (калибровочное преобразование)

$$G_\varphi: b_n^* \mapsto b_n^* e^{i\varphi}, \quad b_m \mapsto b_m e^{-i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad n, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

оставляет состояние (3.6) инвариантным. Тогда характеристическая функция $E_{\omega_{\rho_L}}$ принимает вид

$$\omega_{\rho_L}(W(\zeta)) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho_L W(\zeta)] = \exp \left[-\frac{1}{4} \langle \zeta, \zeta \rangle - \frac{1}{2} \left\langle \zeta, \frac{I}{e^L - I} \zeta \right\rangle \right]. \quad (3.8)$$

Здесь (транспонированный) вектор в аргументе есть $\zeta^{\operatorname{tr}} = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Заметим, что энтропия состояния ω_{ρ_L} равна

$$S(\rho_L) = -\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho_L \ln \rho_L] = \operatorname{tr}_{\mathbb{C}^{N+1}}[L(e^L - I)^{-1} - \ln(I - e^{-L})]. \quad (3.9)$$

Если мы определим матрицу $X := (I + e^{-L})(I - e^{-L})^{-1}$, то характеристическая функция (3.8) примет вид

$$\omega_{\rho_L}(W(\zeta)) = \exp \left[-\frac{1}{4} \langle \zeta, X \zeta \rangle \right], \quad (3.10)$$

и для энтропии (3.9) мы получим

$$S(\rho_L) = \operatorname{tr} \left[\frac{X+I}{2} \ln \frac{X+I}{2} - \frac{X-I}{2} \ln \frac{X-I}{2} \right]. \quad (3.11)$$

Далее нам понадобятся несколько более специфические конструкции, чем те, что заданы формулами (3.10), (3.11). Пусть $\rho(\beta, \delta; \xi)$ – матрица плотности квазисвободного состояния (3.6), соответствующего операторнозначной полуторалинейной форме

$$\langle b, L(\beta, \delta; \xi) b \rangle := \beta \sum_{n=0}^N b_n^* b_n + \delta \langle b, \xi \rangle \langle \xi, b \rangle \quad (3.12)$$

на $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}^{N+1}$. Здесь $\beta > 0$, $\delta > -\beta$ и $\xi^{\operatorname{tr}} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$.

ЛЕММА 3.1. *Функция распределения состояния*

$$\rho(\beta, \delta; \xi) = \frac{1}{Z(\beta, \delta; \xi)} e^{-\langle b, L(\beta, \delta; \xi) b \rangle}$$

имеет вид

$$Z(\beta, \delta; \xi) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{-\langle b, L(\beta, \delta; \xi) b \rangle}] = (1 - e^{-\beta})^{-N} (1 - e^{-(\beta + \delta \langle \xi, \xi \rangle)})^{-1}. \quad (3.13)$$

Характеристическая функция (2.15) и энтропия этого состояния равны

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{H}} [\rho(\beta, \delta; \xi) W(\zeta)] &= \exp \left[-\frac{1 + e^{-\beta}}{4(1 - e^{-\beta})} \langle \zeta, \zeta \rangle \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{1 + e^{-\beta - \delta \langle \xi, \xi \rangle}}{1 - e^{-\beta - \delta \langle \xi, \xi \rangle}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right) \frac{|\langle \xi, \zeta \rangle|^2}{\langle \xi, \xi \rangle} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

и

$$S(\rho(\beta, \delta; \xi)) = -\text{Tr}_{\mathcal{H}} [\rho(\beta, \delta; \xi) \ln \rho(\beta, \delta; \xi)] = Ns(\beta) + s(\beta + \delta \langle \xi, \xi \rangle). \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.13) следует из (3.6) и (3.12). Действительно, согласно (3.6) любое ортогональное преобразование $\mathcal{O}$ на $\mathbb{C}^{N+1}$ оставляет функцию распределения инвариантной, $Z_{\mathcal{O}TL\mathcal{O}} = Z_L$, следовательно, можно вычислить ее значение на векторе $\mathcal{O}\xi$ (вместо ξ), где $\mathcal{O}\xi$ имеет только одну ненулевую компоненту, равную векторной норме $\langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$. При таком выборе $\mathcal{O}\xi$ правая часть равенства (3.13) получается немедленно из расчета левой части.

Данное преобразование $\mathcal{O}$ также диагонализует матрицу $L := L(\beta, \delta; \xi)$, поэтому его используют, чтобы упростить функцию (3.10), а затем на последнем шаге вернуться к ξ . Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \omega_{\rho_L}(W(\zeta)) &= \exp \left[-\frac{1}{4} \langle \mathcal{O}\zeta, \mathcal{O}X\mathcal{O}^*\mathcal{O}\zeta \rangle \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{1 + e^{-\beta}}{4(1 - e^{-\beta})} \langle \mathcal{O}\zeta, \mathcal{O}\zeta \rangle' \right] \exp \left[-\frac{1 + e^{-\beta - \delta \langle \xi, \xi \rangle}}{4(1 - e^{-\beta - \delta \langle \xi, \xi \rangle})} |(\mathcal{O}\zeta)_0|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь $\langle \mathcal{O}\zeta, \mathcal{O}\zeta \rangle' := \sum_{k=1}^N |(\mathcal{O}\zeta)_k|^2$ и мы выбрали преобразование $\mathcal{O}$ таким образом, что $(\mathcal{O}\xi)_j = \delta_{0,j} \|\xi\|$. Поскольку

$$|(\mathcal{O}\zeta)_0|^2 = \frac{1}{\langle \xi, \xi \rangle} \langle \mathcal{O}\zeta, \mathcal{O}\xi \rangle \langle \mathcal{O}\xi, \mathcal{O}\zeta \rangle, \quad (3.17)$$

тождества (3.16) доказывают (3.14). Аналогичный метод можно использовать для энтропии (3.9). Вычисление следа в диагональном представлении для $L = L(\beta, \delta; \xi)$ дает формулу (3.15). Лемма доказана.

Поскольку согласно теореме Араки–Сигала состояние полностью определяется своей характеристической функцией, соотношения (3.14) и (3.15) приводят к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.2. *Энтропия $S(\rho)$ квазисвободного состояния ω_ρ на C^* -алгебре $KKS \mathcal{A}(\mathcal{H})$ с характеристической функцией*

$$\omega_\rho(W(\zeta)) = \exp \left[-\frac{1}{4} (x \langle \zeta, \zeta \rangle + x_0 |\langle \xi, \zeta \rangle|^2) \right] \quad (3.18)$$

однозначно определяется параметрами (ξ, x, x_0) , где $\xi \in \mathbb{C}^{N+1}$, $x > 1$, $x_0 > 1 - x$, и имеет вид

$$S(\rho) = N\sigma(x) + \sigma(x + x_0\langle\xi, \xi\rangle), \quad (3.19)$$

где $\sigma(\cdot)$ задана в (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует непосредственно из определения (3.5), если положить в (3.14)

$$x_0\langle\xi, \xi\rangle = \frac{1 + e^{-\beta - \delta\langle\xi, \xi\rangle}}{1 - e^{-\beta - \delta\langle\xi, \xi\rangle}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}$$

и использовать соотношение (3.5) в (3.15).

3.2. Производство относительной энтропии. Рассмотрим эволюцию (2.12) нашей системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ в случае, когда начальная матрица плотности (2.7) соответствует произведению калибровочно-инвариантных квазисвободных гиббсовских состояний с параметром $\beta_0 \geq 0$ для $\mathcal{S}$ и с параметром $\beta \geq 0$ для $\mathcal{C}$:

$$\rho = \rho_0 \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N \rho_k \right), \quad (3.20)$$

$$\rho_0 = \frac{e^{-\beta_0 a^* a}}{Z(\beta_0)}, \quad \rho_k = \frac{e^{-\beta a^* a}}{Z(\beta)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Этот случай соответствует матрице плотности ρ_L в (3.6) с диагональной матрицей $L = \text{diag}(\beta_0, \beta, \dots, \beta)$ и матрице плотности $\rho(\beta, \delta; \xi)$ в представлении (3.12), где $(\beta, \delta; \xi) = (\beta, \beta_0 - \beta; e)$, т. е.

$$\rho = \frac{\rho(\beta, \beta_0 - \beta; e)}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} = \frac{1}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} \exp \left[-\beta_0 b_0^* b_0 - \beta \sum_{j=1}^N b_j^* b_j \right]. \quad (3.21)$$

Здесь $e^{\text{tr}} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$ и

$$Z(\beta, \beta_0 - \beta) = Z(\beta_0)Z(\beta)^N = \frac{1}{(1 - e^{-\beta_0})(1 - e^{-\beta})^N}.$$

Непосредственное применение к состоянию (3.20) (или (3.21)) формул (3.14), (3.15) и леммы 3.1 при $\xi = e$ (т. е. при $\langle\xi, \xi\rangle = 1$, $\langle\xi, \zeta\rangle = \zeta_0$) приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.3. *Характеристическая функция состояния (3.20) (или (3.21)) имеет вид*

$$\begin{aligned} \omega_\rho(W(\zeta)) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho W(\zeta)] = \\ &= \exp \left[-\frac{|\zeta_0|^2}{4} \left(\frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right) - \frac{\langle\zeta, \zeta\rangle}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

а энтропия равна

$$S(\rho) = Ns(\beta) + s(\beta_0). \quad (3.23)$$

Поскольку согласно (2.12) матрица плотности $\rho(t)$ полной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ при $t = N\tau$ равна

$$\rho(N\tau) = e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1} \rho e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N}, \quad (3.24)$$

для эволюции характеристической функции и энтропии получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4. *Характеристическая функция (2.15) состояния с матрицей плотности (3.24) равна*

$$\omega_{\rho(N\tau)}(W(\zeta)) = \exp \left[-\frac{|(U_1 \dots U_N \zeta)_0|^2}{4} \left(\frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right) - \frac{\langle \zeta, \zeta \rangle}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right], \quad (3.25)$$

в то время как полная энтропия остается инвариантной:

$$S(\rho(N\tau)) = S(\rho) = Ns(\beta) + s(\beta_0).$$

Здесь отображение $U_1 \dots U_N: \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ дается формулами (2.19) и (2.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (2.18) получаем, что

$$\omega_{\rho(N\tau)}(W(\zeta)) = \omega_{\rho}(W(U_1 \dots U_N \zeta)).$$

Поскольку отображения $U_j: \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}^{N+1}$, $j = 1, \dots, N$, являются унитарными (см. лемму 2.1), равенство (3.22) влечет (3.25). Наконец, получаем, что отображение (3.24) оставляет полную энтропию (3.23) инвариантной (см. выражение (3.4)). Лемма доказана.

Пусть ω и ω_0 – два нормальных состояния на алгебре Вейля ККС $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ с матрицами плотности ϱ и ϱ_0 . Следуя работе [9] (см. также [10]), введем *относительную энтропию* состояния ω по отношению к состоянию ω_0 как

$$\text{Ent}(\varrho|\varrho_0) := \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\varrho(\ln \varrho - \ln \varrho_0)] \geq 0. \quad (3.26)$$

ЛЕММА 3.5. *Относительная энтропия состояния $\omega_{\rho(N\tau)}$ по отношению к состоянию ω_{ρ} равна*

$$\text{Ent}(\rho(N\tau)|\rho) = \frac{(\beta_0 - \beta)(e^{\beta_0} - e^{\beta})}{(e^{\beta_0} - 1)(e^{\beta} - 1)}(1 - |z|^{2N}), \quad (3.27)$$

где величина $z := z(\tau)$ определяется выражениями (1.13) и (1.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство цикличности следа дает

$$\begin{aligned} \text{Ent}(\rho(N\tau)|\rho) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho(N\tau)(\ln \rho(N\tau) - \ln \rho)] = \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}}[\rho(\ln \rho - e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N} \ln \rho e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1})] = \\ &= \frac{\beta - \beta_0}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} \times \\ &\times \text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{-\beta_0 b_0^* b_0 - \beta \sum_{j=1}^N b_j^* b_j} (b_0^* b_0 - e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N} b_0^* b_0 e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1})]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Заметим, что $b_0^* b_0 = \langle b, e \rangle \langle e, b \rangle$ согласно (2.4). Поэтому из (2.23) следует, что

$$\begin{aligned} e^{i\tau H_1} \dots e^{i\tau H_N} b_0^* b_0 e^{-i\tau H_N} \dots e^{-i\tau H_1} = \\ = \sum_{k=0}^N (U_1 \dots U_N e)_k b_k^* \sum_{k'=0}^N \overline{(U_1 \dots U_N e)_{k'}} b_{k'}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Заметим также, что из калибровочной инвариантности состояния ρ следует правило отбора

$$\frac{1}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} \text{Tr}_{\mathcal{H}} [e^{-\beta_0 b_0^* b_0 - \beta \sum_{j=1}^N b_j^* b_j} b_k^* b_{k'}] = 0 \quad \text{при } k \neq k'. \quad (3.30)$$

Согласно этому правилу после подстановки (3.29) в (3.28) в математическом ожидании выживают только диагональные члены, в которых $k = k'$:

$$\begin{aligned} \text{Ent}(\rho(N\tau)|\rho) = \\ = \frac{\beta - \beta_0}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[e^{-\beta_0 b_0^* b_0 - \beta \sum_{j=1}^N b_j^* b_j} \left(b_0^* b_0 - \sum_{k=0}^N |(U_1 \dots U_N e)_k|^2 b_k^* b_k \right) \right]. \end{aligned}$$

Наконец, с учетом леммы 2.1, выражений (2.19), (2.20), а также (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \text{Ent}(\rho(N\tau)|\rho) &= \frac{\beta - \beta_0}{Z(\beta, \beta_0 - \beta)} \times \\ &\times \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[e^{-\beta_0 b_0^* b_0 - \beta \sum_{j=1}^N b_j^* b_j} \left((1 - |z|^{2N}) b_0^* b_0 - \sum_{k=1}^N |w|^2 |z|^{2N-2k} b_k^* b_k \right) \right] = \\ &= \frac{(\beta_0 - \beta)(e^{\beta_0} - e^{\beta})}{(e^{\beta_0} - 1)(e^{\beta} - 1)} (1 - |z|^{2N}), \end{aligned}$$

что доказывает (3.27).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Относительная энтропия, которая определяется соотношением (3.26), неотрицательна. В отличие от инвариантной полной энтропии (см. лемму 3.4) относительная энтропия (3.27) монотонно возрастает со временем ($N\tau \rightarrow \infty$) при $|z| < 1$ (см. лемму 1.1 и замечание 1.1). При этом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Ent}(\rho(N\tau)|\rho) = (\beta - \beta_0) \left(\frac{1}{e^{\beta_0} - 1} - \frac{1}{e^{\beta} - 1} \right) \geq 0 \quad (3.31)$$

и предел положителен при $\beta_0 \neq \beta$. Предел (3.31) дает асимптотическое значение для производства энтропии, если стартовать с состояния, соответствующего (3.20), а затем время устремить к бесконечности, $t = N\tau \rightarrow \infty$.

4. ДИНАМИКА ПОДСИСТЕМ

4.1. Сходимость к равновесному состоянию и локальная энтропия.

Подсистема $\mathcal{S}$. Начнем с простейшей подсистемы $\mathcal{S}$. Пусть начальное состояние полной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ в (1.1) представляет собой тензорное произведение соответствующих матриц плотности, $\rho = \rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_{\mathcal{C}}$ (см. гипотезу 1). Тогда при $t \geq 0$ состояние $\omega_{\mathcal{S}}^t(\cdot)$ подсистемы $\mathcal{S}$ задается на C^* -алгебре Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0)$ как

$$\omega_{\mathcal{S}}^t(\cdot) := \omega_{\rho(t)}(\cdot \otimes \mathbb{1}). \quad (4.1)$$

Для $\zeta = (\alpha, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$ рассмотрим оператор Вейля $W(\zeta) = \hat{w}(\alpha) \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$, заданный в (2.3). В силу соотношения (2.8), теоремы 2.1 и выражения (4.1) для $t = m\tau$ (при $1 \leq m \leq N$) получаем

$$\omega_{\mathcal{S}}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \omega_{\rho(m\tau)}(W(\zeta)) = \omega_{\rho}(W(U_1 \dots U_m \zeta)). \quad (4.2)$$

Тогда для компонент $\{(U_1 \dots U_m \zeta)_k\}_{k=0}^N$ вектора $U_1 \dots U_m \zeta$ в (4.2) получаем

$$(U_1 \dots U_m \zeta)_k = \begin{cases} e^{im\tau\epsilon}(gz)^m \alpha, & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon} gw(gz)^{m-k} \alpha, & 1 \leq k < m, \\ e^{im\tau\epsilon} gw \alpha, & k = m, \\ 0, & m < k \leq N, \end{cases} \quad (4.3)$$

что следует из замечания 2.3.

Если начальные матрицы плотности $\rho = \rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_{\mathcal{C}}$ соответствуют произведению квазисвободных гиббсовских состояний при различных температурах, как в (3.20), то из формулы (4.2) и леммы 3.3 следует, что

$$\omega_{\mathcal{S}}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} - \frac{|z^m \alpha|^2}{4} \left(\frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Заметим, что для любого момента $t = m\tau$ состояние $\omega_{\mathcal{S}}^{m\tau}(\cdot)$ является квазисвободным гиббсовским равновесным состоянием с параметром $\beta^*(m\tau)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{1 + e^{-\beta^*(m\tau)}}{1 - e^{-\beta^*(m\tau)}} = |z|^{2m} \frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} + (1 - |z|^{2m}) \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}. \quad (4.5)$$

Из этого уравнения вытекает либо неравенство $\beta \leq \beta^*(m\tau) \leq \beta_0$, либо неравенство $\beta_0 \leq \beta^*(m\tau) \leq \beta$.

При $m \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) характеристическая функция Вейля (4.4) имеет предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{\mathcal{S}}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right]. \quad (4.6)$$

Поэтому в пределе $t \rightarrow \infty$ подсистема $\mathcal{S}$ в процессе эволюции переходит из гиббсовского равновесного состояния с параметром β_0 к другому равновесному состоянию с параметром β , фиксированным цепочкой $\mathcal{C}$.

Подсистема $\mathcal{S}_1$. Начальное состояние $\omega_{\mathcal{S}_1}^0(\cdot) = \omega_{\mathcal{S}_1}^t(\cdot)|_{t=0}$ этой подсистемы соответствует одноточечной редуцированной матрице плотности или частичному следу на алгебре Вейля ККС $\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$:

$$\omega_{\mathcal{S}_1}^0(\hat{w}(\alpha)) = \omega_\rho \left(\mathbb{1} \otimes \hat{w}(\alpha) \otimes \left(\bigotimes_{k=2}^N \mathbb{1} \right) \right) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right]. \quad (4.7)$$

Теперь выберем вектор $(\zeta^1)^{\text{tr}} := (0, \alpha, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Тогда

$$\omega_{\mathcal{S}_1}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \omega_{\rho(m\tau)}(W(\zeta^{(1)})) = \omega_{\rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_C}(W(U_1 \dots U_m \zeta^{(1)})) \quad (4.8)$$

для $1 < m \leq N$. Согласно замечанию 2.3 компоненты $\{(U_1 \dots U_m \zeta^{(1)})_k\}_{k=0}^N$ равны

$$(U_1 \dots U_m \zeta)_k = \begin{cases} e^{im\tau\epsilon} g w \alpha, & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon} \delta_{k,1} g \bar{z} \alpha, & 1 \leq k < m, \\ 0, & m \leq k \leq N. \end{cases} \quad (4.9)$$

Тогда получаем

$$\omega_{\mathcal{S}_1}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} - \frac{|w\alpha|^2}{4} \left(\frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} - \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right) \right] \quad (4.10)$$

для любого $1 < m \leq N$. Поэтому начальное состояние (4.7) переходит в состояние (4.10) после первого акта взаимодействия на интервале $[0, \tau)$, а дальнейшей эволюции данного состояния при $t > \tau$ не происходит.

Выражение (4.10) представляет собой характеристическую функцию квазисвободного гиббсовского равновесного состояния с параметром β^* , который удовлетворяет уравнению

$$\frac{1 + e^{-\beta^*}}{1 - e^{-\beta^*}} = |w|^2 \frac{1 + e^{-\beta_0}}{1 - e^{-\beta_0}} + (1 - |w|^2) \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}.$$

Из этого уравнения снова следует, что либо $\beta \leq \beta^* \leq \beta_0$, либо $\beta_0 \leq \beta^* \leq \beta$.

Заметим, что эволюция подсистемы $\mathcal{S}_1$ имеет ясную интерпретацию: после одного акта взаимодействия в течение времени $t \in [0, \tau)$ подсистема $\mathcal{S}_1$ релаксирует к состоянию промежуточного равновесия с подсистемой $\mathcal{S}$. В результате происходит сдвиг начального параметра β к β^* . Затем этот параметр не меняется со временем, поскольку при $t > \tau$ нет возмущений подсистемы $\mathcal{S}_1$.

Подсистема $\mathcal{S}_m$. При $1 < m \leq N$ начальное состояние $\omega_{\mathcal{S}_m}^0(\cdot) = \omega_{\mathcal{S}_m}^t(\cdot)|_{t=0}$ данной подсистемы определяется на алгебре Вейля ККС $\mathcal{A}(\mathcal{H}_m)$ с помощью частичного следа:

$$\omega_{\mathcal{S}_m}^0(\hat{w}(\alpha)) = \omega_\rho \left(\left(\bigotimes_{k=0}^{m-1} \mathbb{1} \right) \otimes \hat{w}(\alpha) \otimes \left(\bigotimes_{k=m+1}^N \mathbb{1} \right) \right) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right]. \quad (4.11)$$

Выберем теперь вектор $(\zeta^m)^{\text{tr}} := (0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$, где α стоит на $(m+1)$ -м месте. Тогда теорема 2.1 дает

$$\omega_{\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \omega_{\rho(m\tau)}(W(\zeta^{(m)})) = \omega_{\rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_C}(W(U_1 \dots U_m \zeta^{(m)})). \quad (4.12)$$

Компоненты $\{(U_1 \dots U_m \zeta^{(m)})_k\}_{k=0}^N$ равны

$$(U_1 \dots U_m \zeta^{(m)})_k = \begin{cases} e^{im\tau\epsilon} g w(gz)^{m-1} \alpha, & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon} g^2 w^2(gz)^{m-k-1} \alpha, & 1 \leq k < m, \\ e^{im\tau\epsilon} g \bar{z} \alpha, & k = m, \\ 0, & m < k \leq N, \end{cases} \quad (4.13)$$

что снова следует из замечания 2.3. Тогда эволюция состояния подсистемы $\mathcal{S}_m$ задается как

$$\omega_{\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} - \frac{|w\alpha|^2}{4} |z|^{2(m-1)} \left(\frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} - \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Заметим, что взаимодействие при $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$ выталкивает подсистему $\mathcal{S}_m$ из гиббсовского равновесного состояния (4.11), однако этот эффект идет на убыль при больших m :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha)) = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right]. \quad (4.15)$$

Как и выше, мы имеем здесь эволюцию квазисвободного гиббсовского равновесного состояния с зависящим от времени параметром обратной температуры $\beta^{**}(m\tau)$, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{1+e^{-\beta^{**}(m\tau)}}{1-e^{-\beta^{**}(m\tau)}} = |w|^2 |z|^{2(m-1)} \frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} + (1-|w|^2 |z|^{2(m-1)}) \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}. \quad (4.16)$$

Как и выше, значение параметра $\beta^{**}(m\tau)$ всегда лежит между β_0 и β .

Чтобы проанализировать эволюцию системы $\mathcal{S}_m$ и совпадение пределов (4.15) и (4.6), заметим, что состояние подсистемы $\mathcal{S}$ релаксирует к начальному состоянию цепочки $\mathcal{C}$ (см. соотношение (4.6)). Таким образом, после того как подсистема $\mathcal{S}_m$ провзаимодействует, т. е. в момент $t = m\tau$, значение параметра $\beta^{**}(m\tau)$ лежит между β и $\beta^*((m-1)\tau)$, поскольку из (4.5) и (4.16) следует, что

$$\frac{1+e^{-\beta^{**}(m\tau)}}{1-e^{-\beta^{**}(m\tau)}} = |w|^2 \frac{1+e^{-\beta^*((m-1)\tau)}}{1-e^{-\beta^*((m-1)\tau)}} + (1-|w|^2) \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}. \quad (4.17)$$

Как и в случае $m = 1$, дальнейшей эволюции не происходит: $\omega_{\mathcal{S}_m}^{n\tau} = \omega_{\mathcal{S}_m}^{m\tau}$ при $n \geq m$.

Теперь рассмотрим составные подсистемы $\mathcal{S} + \mathcal{S}_m$ и $\mathcal{S}_{m-n} + \mathcal{S}_m$. Нашей целью является изучение окончательных корреляций, возникающих из-за повторяющегося взаимодействия с подсистемой $\mathcal{S}$.

Подсистема $\mathcal{S} + \mathcal{S}_m$. Начальное состояние $\omega_{\mathcal{S}+\mathcal{S}_m}^0(\cdot) = \omega_{\mathcal{S}+\mathcal{S}_m}^t(\cdot)|_{t=0}$ такой составной подсистемы при $1 < m \leq N$ определяется частичным следом на C^* -алгебре Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_m) \approx \mathcal{A}(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{H}_m)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}+\mathcal{S}_m}^0(\hat{w}(\alpha_0) \otimes \hat{w}(\alpha_1)) &:= \omega_\rho \left(\hat{w}(\alpha_0) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{m-1} \mathbb{1} \right) \otimes \hat{w}(\alpha_1) \otimes \left(\bigotimes_{k=m+1}^N \mathbb{1} \right) \right) = \\ &= \exp \left[-\frac{|\alpha_0|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} \right] \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Это выражение представляет собой характеристическую функцию состояния-произведения, соответствующего двум изолированным системам с различными температурами. Пусть $(\zeta^{(0,m)})^{\text{tr}} := (\alpha_0, 0, \dots, 0, \alpha_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$, где α_1 стоит на $(m+1)$ -м месте. Тогда согласно теореме 2.1 имеем

$$\omega_{\mathcal{S}+\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha_0) \otimes \hat{w}(\alpha_1)) = \omega_{\rho(m\tau)}(W(\zeta^{(0,m)})) = \omega_{\rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_C}(W(U_1 \dots U_m \zeta^{(0,m)})). \quad (4.19)$$

Компоненты $\{(U_1 \dots U_m \zeta^{(0,m)})_k\}_{k=0}^N$ выводятся на основании замечания 2.3:

$$(U_1 \dots U_m \zeta^{(0,m)})_k = \begin{cases} e^{im\tau\epsilon}(gz)^{m-1}[gz\alpha_0 + gw\alpha_1], & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon}(gz)^{m-k-1}g^2[wz\alpha_0 + w^2\alpha_1], & 1 \leq k < m, \\ e^{im\tau\epsilon}[gw\alpha_0 + g\bar{z}\alpha_1], & k = m, \\ 0, & m < k \leq N. \end{cases} \quad (4.20)$$

С учетом (2.8) при $m \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}+\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha_0) \otimes \hat{w}(\alpha_1)) &= \\ &= \exp\left[-\frac{|z\alpha_0 + w\alpha_1|^2}{4}|z|^{2(m-1)}\frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}}\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{|z\alpha_0 + w\alpha_1|^2}{4}(1-|z|^{2(m-1)})\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right] \exp\left[-\frac{|w\alpha_0 + \bar{z}\alpha_1|^2}{4}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right] \rightarrow \\ &\rightarrow \exp\left[-\frac{|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2}{4}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таким образом, в данном пределе составная подсистема $\mathcal{S} + \mathcal{S}_m$ в процессе эволюции переходит от произведения двух квазисвободных равновесных состояний (4.18) с различными параметрами β_0 и β к произведению квазисвободных равновесных состояний с тем же параметром β , которые определяются повторяющимся взаимодействием с цепочкой $\mathcal{C}$ при $m \rightarrow \infty$. Интерпретация аналогична случаю подсистемы $\mathcal{S}_m$.

Подсистема $\mathcal{S}_{m-n} + \mathcal{S}_m$. Пусть $1 < m-n < m \leq N$. Тогда начальное состояние $\omega_{\mathcal{S}_{m-n}+\mathcal{S}_m}^t(\cdot)|_{t=0}$ этой составной подсистемы представляет собой частичный след на C^* -алгебре Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{H}_{m-n} \otimes \mathcal{H}_m) \approx \mathcal{A}(\mathcal{H}_{m-n}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{H}_m)$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}_{m-n}+\mathcal{S}_m}^0(\hat{w}(\alpha_1) \otimes \hat{w}(\alpha_2)) &:= \\ &:= \omega_{\rho}\left(\left(\bigotimes_{k=0}^{m-n-1} \mathbb{1}\right) \otimes \hat{w}(\alpha_1) \otimes \left(\bigotimes_{k=m-n+1}^{m-1} \mathbb{1}\right) \otimes \hat{w}(\alpha_2) \otimes \left(\bigotimes_{k=m+1}^N \mathbb{1}\right)\right) = \\ &= \exp\left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right] \exp\left[-\frac{|\alpha_2|^2}{4}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Это характеристическая функция состояния-произведения, соответствующего двум изолированным системам с одинаковыми температурами.

Зададим вектор $(\zeta^{(m-n,m)})^{\text{tr}} := (0, 0, \dots, 0, \alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$, где α_1 стоит на $(m-n+1)$ -м месте, а α_2 – на $(m+1)$ -м месте. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}_{m-n}+\mathcal{S}_m}^{m\tau}(\hat{w}(\alpha_1) \otimes \hat{w}(\alpha_2)) &= \omega_{\rho(m\tau)}(W(\zeta^{(m-n,m)})) = \\ &= \omega_{\rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_C}(W(U_1 \dots U_m \zeta^{(m-n,m)})). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Компоненты $\{(U_1 \dots U_m \zeta^{(m-n, m)})_k\}_{k=0}^N$ можно вычислить на основании замечания 2.3:

$$(U_1 \dots U_m \zeta^{(m-n, m)})_k = \begin{cases} e^{im\tau\epsilon} (gz)^{m-n-1} gw[\alpha_1 + (gz)^n \alpha_2], & k = 0, \\ e^{im\tau\epsilon} [g^2 w^2 (gz)^{m-n-k-1} \alpha_1 + g^2 w^2 (gz)^{m-k-1} \alpha_2], & 1 \leq k < m-n, \\ e^{im\tau\epsilon} [g\bar{z} \alpha_1 + g^2 w^2 (gz)^{m-k-1} \alpha_2], & k = m-n, \\ e^{im\tau\epsilon} g^2 w^2 (gz)^{m-k-1} \alpha_2, & m-n < k < m, \\ e^{im\tau\epsilon} g\bar{z} \alpha_2, & k = m, \\ 0, & m < k \leq N. \end{cases}$$

Если $m \rightarrow \infty$, то при любом фиксированном n для (4.23) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{s_{m-n}+s_m}^{m\tau} (\hat{w}(\alpha_1) \otimes \hat{w}(\alpha_2)) &= \\ &= \exp \left[-\frac{|\alpha_1 + (gz)^{n+1} \alpha_2|^2}{4} |w|^2 |z|^{2(m-n-1)} \frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4} [|w|^2 (1-|z|^{2(m-n-1)}) + |z|^2] \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{|\alpha_2|^2}{4} (1-|w|^2 |z|^{2(m-1)}) \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Следовательно, в этом пределе составная подсистема $\mathcal{S}_{m-n} + \mathcal{S}_m$ в процессе эволюции переходит из начального произведения двух квазисвободных равновесных состояний (4.22) к тому же финальному состоянию, хотя при конечных m эволюция (4.24) является нетривиальной. Это также нетрудно понять, учитывая наш анализ подсистемы $\mathcal{S}_m$ и подсистемы $\mathcal{S} + \mathcal{S}_m$.

Теперь рассмотрим случай фиксированного $s := m-n \geq 1$. Тогда предел в (4.24) рассчитывается как

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{s_s+s_m}^{m\tau} (\hat{w}(\alpha_1) \otimes \hat{w}(\alpha_2)) &= \\ &= \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4} |w|^2 |z|^{2(s-1)} \left(\frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} - \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right] \exp \left[-\frac{|\alpha_2|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{|\alpha_1|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta^{**}(s\tau)}}{1-e^{-\beta^{**}(s\tau)}} \right] \exp \left[-\frac{|\alpha_2|^2}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $\beta^{**}(s\tau)$ удовлетворяет уравнению (4.16). Таким образом, в этом случае предельное состояние (4.25) представляет собой произведение квазисвободных гиббсовских состояний с различными параметрами $\beta^{**}(s\tau)$ и β . Это означает, что подсистема $\mathcal{S}_s$ сохраняет память о возмущении в момент времени $t = s\tau$, когда параметр $\beta^*(s\tau)$ (4.5) подсистемы $\mathcal{S}$ еще отличался от β .

Заметим, что (4.25) совпадает с состоянием-произведением (4.22) при $s \rightarrow \infty$.

Подсистема $\mathcal{S}_{\sim n}$. Чтобы определить $\mathcal{S}_{\sim n}$ при $0 \leq n \leq k \leq N$, разделим полную систему в момент времени $t = k\tau$ на две подсистемы $\mathcal{S}_{n,k} + \mathcal{C}_{n,k}$. Здесь

$$\mathcal{S}_{n,k} := \mathcal{S} + \mathcal{S}_k + \mathcal{S}_{k-1} + \cdots + \mathcal{S}_{k-n+1} \quad (\mathcal{S}_{0,k} := \mathcal{S}), \quad (4.26)$$

тогда как (см. определения в п. 1.1)

$$\mathcal{C}_{n,k} := \mathcal{S}_N + \cdots + \mathcal{S}_{k+1} + \mathcal{S}_{k-n} + \cdots + \mathcal{S}_1. \quad (4.27)$$

Будем считать, что $\mathcal{S}_{\sim n}$ является цельным “объектом”, который в момент времени $t = k\tau$ ($k = n, n+1, \dots, N$) совпадает с $\mathcal{S}_{n,k}$. По мере того как время пробегает различные значения, элементарные подсистемы $\mathcal{S}_k$ в $\mathcal{S}_{\sim n}$ меняются. Рассмотрим поведение системы $\mathcal{S}_{\sim n}$ при больших $t = k\tau$, т. е. зависимость “состояния” подсистемы $\mathcal{S}_{n,k}$ от k при $t = k\tau$.

Для любого фиксированного $t = k\tau$ гильбертово пространство $\mathcal{H}$ можно разложить в тензорное произведение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_c$. Здесь $\mathcal{H}_s$ – гильбертово пространство подсистемы (4.26), а $\mathcal{H}_c$ – гильбертово пространство подсистемы (4.27):

$$\mathcal{H}_s := \mathcal{H}_0 \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{H}_{k-j+1} \right), \quad \mathcal{H}_c := \left(\bigotimes_{j=1}^{k-n} \mathcal{H}_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=k+1}^N \mathcal{H}_j \right). \quad (4.28)$$

Для матрицы плотности ϱ на $\mathcal{H}$ введем редуцированную матрицу плотности ϱ_s на пространстве $\mathcal{H}_s$ как частичный след по $\mathcal{H}_c$:

$$\varrho_s := \text{Tr}_{\mathcal{H}_c} \varrho. \quad (4.29)$$

Чтобы избежать возможных недоразумений, связанных с тем, что все пространства $\mathcal{H}_j$, $j = 0, 1, \dots$, тождественны фоковскому пространству $\mathcal{F}$, и с тем, что компоненты изменяются со временем, будем рассматривать алгебру Вейля на подсистеме и соответствующую редуцированную матрицу плотности $\rho \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ следующим образом. При $n \leq N$ на пространстве Фока $\mathcal{F}^{\otimes(n+1)}$ рассмотрим оператор Вейля

$$W_n(\zeta) = \exp \left[i \frac{\langle \zeta, \tilde{b} \rangle + \langle \tilde{b}, \zeta \rangle}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.30)$$

где $\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_n$ и $\tilde{b}_0^*, \dots, \tilde{b}_n^*$ – операторы уничтожения и рождения на $\mathcal{F}^{\otimes(n+1)}$, удовлетворяющие соответствующим ККС, и

$$\langle \zeta, \tilde{b} \rangle = \sum_{j=0}^n \bar{\zeta}_j \tilde{b}_j, \quad \langle \tilde{b}, \zeta \rangle = \sum_{j=0}^n \zeta_j \tilde{b}_j^*. \quad (4.31)$$

Через $\mathcal{A}(\mathcal{F}^{\otimes(n+1)})$ обозначим C^* -алгебру, порожденную операторами Вейля (4.30). Для любого подмножества $J \subset \{1, 2, \dots, N\}$ определим операцию взятия частичного следа

$$R^J: \mathfrak{C}_1(\mathcal{F}^{\otimes(N+1)}) \ni \rho \mapsto R^J \rho \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{F}^{\otimes(N+1-|J|)})$$

посредством равенства

$$\omega_{R^J \rho}(W_{N-|J|}(\zeta)) = \omega_\rho(W_N(r_J \zeta)).$$

Здесь отображение

$$r_j : \mathbb{C}^{N+1-|J|} \ni \zeta \mapsto r_j \zeta \in \mathbb{C}^{N+1}$$

задается как

$$(r_j \zeta)_j := \begin{cases} \zeta_0, & j = 0, \\ 0, & j \in J, \\ \zeta_{j-|\{i \in J | i < j\}|} & \text{в иных случаях,} \end{cases}$$

где $|A|$ обозначает мощность множества A .

Поскольку все пространства $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ тождественны $\mathcal{F}$, мы можем не заботиться о том, чтобы различать $\bigotimes_{j \in \{0,1,\dots,N\} \setminus J} \mathcal{H}_j$ и $\bigotimes_{j \in \{0,1,\dots,N\} \setminus J'} \mathcal{H}_j$, если $J \neq J'$, но $|J| = |J'|$, и рассматривать их как одно и то же пространство $\mathcal{F}^{\otimes(N+1-|J|)}$. Наоборот, следует различать проекции

$$\bigotimes_{j=0}^N \mathcal{H}_j \mapsto \bigotimes_{j \in \{0,1,\dots,N\} \setminus J} \mathcal{H}_j$$

для различных подмножеств $J \subset \{1, 2, \dots, N\}$ с одной и той же мощностью $|J|$.

Мы рассматриваем систему $\mathcal{S}_{n,k}$ в момент времени $t = k\tau$ ($k = n, n+1, \dots$) как результат временной эволюции цельной подсистемы $\mathcal{S}_{\sim n}$, поэтому определим состояние системы $\mathcal{S}_{\sim n}$ в момент времени $t = k\tau$ с помощью редуцированной матрицы плотности $\{\rho_s(k\tau)\}_{k \geq n}$ данной подсистемы следующим образом (см. соотношение (2.12)):

$$\rho_s(k\tau) := R^{\{1,\dots,k-n,k+1,\dots,N\}}(\rho(k\tau)) = R^{\{1,\dots,k-n,k+1,\dots,N\}}T_{k\tau}(\rho). \quad (4.32)$$

С учетом леммы 3.4 и тождества $\langle r_j \zeta, r_j \zeta \rangle_{\mathbb{C}^{N+1}} = \langle \zeta, \zeta \rangle_{\mathbb{C}^{N+1-|J|}}$ немедленно получаем следующий результат.

ЛЕММА 4.1. *Для начальной матрицы плотности (3.20) имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \omega_{\rho_s(k\tau)}(W_n(\zeta)) &= \omega_{R^{J_{n,k}} \rho(k\tau)}(W_n(\zeta)) = \\ &= \exp \left[-\frac{|(U_1 \dots U_k r_{J_{n,k}} \zeta)_0|^2}{4} \left(\frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} - \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right) - \frac{\langle \zeta, \zeta \rangle}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right], \end{aligned}$$

где $J_{n,k} = \{1, 2, \dots, k-n, k+1, \dots, N\}$.

Рассмотрим пределы $k \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ (для $k \leq N$) при фиксированном n . Для этого заметим, что из формулы (2.19) следует, что $(U_1 \dots U_k r_{J_{n,k}} \zeta)_0 \rightarrow 0$, кроме того, $|z| < 1$. Из леммы 4.1 вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\rho_s(k\tau)}(W_n(\zeta)) = \exp \left[-\frac{\langle \zeta, \zeta \rangle}{4} \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \right] = \omega_{\rho_n^{(\beta)}}(W_n(\zeta)). \quad (4.33)$$

Здесь согласно теореме Араки–Сигала и с учетом неприводимости алгебры ККС $\mathcal{A}(\mathcal{F}^{\otimes(n+1)})$ матрица плотности имеет вид

$$\rho_n^{(\beta)} = \frac{1}{Z(\beta)^{n+1}} \exp \left[-\beta \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j^* \tilde{b}_j \right] Z(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}. \quad (4.34)$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть начальное состояние полной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ определяется матрицей плотности (3.21): $\rho = \rho(\beta, \beta_0 - \beta; e)$. Тогда для любого фиксированного n состояние $\omega_{\rho_s(k\tau)}(\cdot)$ подсистемы $\mathcal{S}_{n,k}$ сходится к равновесному гиббсовскому состоянию $\omega_{\rho_n^{(\beta)}}(\cdot)$ при $k \rightarrow \infty$ в слабой* топологии для состояний из $\mathcal{A}(\mathcal{F}^{\otimes(n+1)})$.

ТЕОРЕМА 4.2. При условиях, аналогичных условиям теоремы 4.1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(\rho_s(k\tau)) = S(\rho_n^{(\beta)}). \quad (4.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим вектор $\xi_{n,k} \in \mathbb{C}^{n+1}$ как $(U_1 \dots U_k r_{J_{n,k}} \zeta)_0 =: \langle \xi_{n,k}, \zeta \rangle$. Тогда $\langle \xi_{n,k}, \xi_{n,k} \rangle \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для фиксированного n . Отсюда, используя лемму 3.2 и лемму 4.1, получаем

$$\begin{aligned} S(\rho_s(k\tau)) &= n\sigma\left(\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right) + \sigma\left(\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} + \langle \xi_{n,k}, \xi_{n,k} \rangle \left(\frac{1+e^{-\beta_0}}{1-e^{-\beta_0}} - \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right)\right) \rightarrow \\ &\rightarrow (n+1)\sigma\left(\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right) = S(\rho_n^{(\beta)}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Локальная энтропия (4.35) подсистемы $\mathcal{S}_{\sim n}$ (4.26) убывает или возрастает, если соответственно $\beta > \beta_0$ или $\beta < \beta_0$.

4.2. Повторяющееся возмущение в пределе короткого времени взаимодействия. Отметим, что результаты п. 4.1 получены в основном благодаря тому, что мы знаем явный вид начальной матрицы плотности (3.20) полной системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$. Покажем, что отсутствие подобной информации не оказывает решающего влияния на некоторые результаты, касающиеся сходимости к равновесному состоянию при $t = N\tau \rightarrow \infty$, если рассматривать повторяющееся взаимодействие в пределе короткого времени взаимодействия: при $\tau \rightarrow 0$.

Рассмотрим данный предел для подсистемы $\mathcal{S}$. По-прежнему будем считать, что начальное состояние системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ есть состояние-произведение с матрицей плотности (см. соотношение (2.7))

$$\rho = \rho_0 \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N \rho_k \right) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}), \quad (4.36)$$

однако ослабим условия на ρ_0 и на $\{\rho_k\}_{k=1}^N$ следующим образом:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{F}), \quad \rho_0 \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{F}), \quad (\text{h1})$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_1 a) = \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_1 a^2) = \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_1 a^*) = \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_1 a^{*2}) = 0, \quad (\text{h2})$$

$$\text{Tr}_{\mathcal{F}}[\rho_1 (a^* a)^2] < \infty. \quad (\text{h3})$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Гипотезы (h1)–(h3) будут выполнены, если матрицы плотности $\{\rho_k\}_{k=0}^N$ соответствуют калибровочно-инвариантным квазисвободным состояниям с параметром β_0 при $k = 0$ и параметром β при $k = 1, 2, \dots, N$ (см. соотношения (3.20)). Тогда гипотеза (h2) обусловлена калибровочной инвариантностью, а для гипотезы (h3) получаем

$$\text{Tr}_{\mathcal{F}}[\rho_k (a^* a)^2] = 2n_\beta^2 + n_\beta, \quad (4.37)$$

где $n_\beta = \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_k a^* a) = (e^\beta - 1)^{-1}$, $k = 1, \dots, N$.

Пусть $\xi a^* + \bar{\xi} a = U|\xi a^* + \bar{\xi} a|$ – полярное разложение замкнутого оператора $\xi a^* + \bar{\xi} a$. Здесь $|\xi a^* + \bar{\xi} a|$ – положительный самосопряженный оператор, а U – частичная изометрия на пространстве $\mathcal{F}$. Тогда имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. *При выполнении гипотез (h1)–(h3) для всех $k = 1, \dots, N$ мы имеем следующие ограничения:*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_k a^* a) < \infty, \quad (4.38a)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_k |\xi a^* + \bar{\xi} a|^2) \leq C' |\xi|^2, \quad (4.38б)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_k |\xi a^* + \bar{\xi} a|^3) \leq C' |\xi|^3, \quad (4.38в)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_k |\xi a^* + \bar{\xi} a|^4) \leq C'' |\xi|^4, \quad (4.38г)$$

где C, C', C'' – положительные постоянные, зависящие только от $\mathrm{Tr}(\rho_1(a^* a)^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое ограничение (4.38a) является следствием неравенства Коши–Шварца и гипотезы (h3). Применяя к $A = \xi a$ неравенства

$$\begin{aligned} |A + A^*|^2 &\leq |A + A^*|^2 + |A - A^*|^2 = 2(AA^* + A^*A), \\ |A + A^*|^4 &\leq |A + A^*|^4 + |A - A^*|^4 + |A + iA^*|^4 + |A - iA^*|^4 = \\ &= 4(AA^* + A^*A)^2 + 4(A^2 A^{*2} + A^{*2} A^2), \end{aligned}$$

получаем оценки (4.38б) и (4.38г). Наконец, комбинация неравенств (4.38б), (4.38г) с неравенством Коши–Шварца дает оценку (4.38в).

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть $\tau \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ есть предел короткого времени взаимодействия при выполнении требований $\tau^2 N \rightarrow \infty$ и $\tau^3 N \rightarrow 0$. Тогда для любого начального условия (4.36), удовлетворяющего гипотезам (h1)–(h3), характеристическая функция состояния $\omega_{\mathcal{S}}^{N\tau}(\hat{w}(\theta))$ для подсистемы $\mathcal{S}$ при $t = N\tau$ имеет предел:*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{S}}(\hat{w}(\theta)) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\mathcal{S}}^{N\tau}(\hat{w}(\theta)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\rho(N\tau)}(W(\zeta_{\theta})) = e^{-|\theta|^2 \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}[\rho_1(a^* a + a a^*)]/4}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь $\theta \in \mathbb{C}$ и $(N+1)$ -компонентный вектор $(\zeta_{\theta})^{\mathrm{tr}} := (\theta, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Напомним, что состояние ω над алгеброй Вейля $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{A}_w(\mathcal{F})}$ является регулярным, C^n -гладким или аналитическим, если характеристическая функция состояния ω

$$s \mapsto \omega(\hat{w}(s\theta)) = \omega(e^{is\Phi(\theta)}), \quad \Phi(\theta) = \frac{\bar{\theta}a + \theta a^*}{\sqrt{2}},$$

является соответственно непрерывной, C^n -гладкой или аналитической в окрестности $s = 0$. В последнем случае характеристическая функция $\omega(\hat{w}(s\theta))$ (а поэтому и состояние) полностью определяется равенством

$$\omega(\hat{w}(s\theta)) = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m s^m}{m!} \omega_{\mathrm{T}}(\Phi^m(\theta)) \right]. \quad (4.40)$$

Здесь $\{\omega_{\text{T}}(\Phi^m(\theta))\}_{m=0}^{\infty}$ – усеченные корреляционные функции, задающиеся рекуррентными соотношениями

$$\omega_{\text{T}}(\Phi(\theta)) := \omega(\Phi(\theta)), \quad \omega_{\text{T}}(\Phi^2(\theta)) := \omega(\Phi^2(\theta)) - \omega(\Phi(\theta))^2, \dots$$

Из леммы 4.2 следует, что состояния для матриц плотности $\rho_1 = \rho_2 = \dots$ являются C^4 -гладкими. Заметим, что для калибровочно-инвариантного состояния мы имеем $\omega(\Phi^m(\theta)) = \omega_{\text{T}}(\Phi^m(\theta))$ (см. гипотезу (h2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Согласно (h2) и утверждениям (4.38a)–(4.38в) леммы 4.2, а также с учетом замечания 4.3 для состояний $\omega(\cdot) = \omega_{\rho_k}(\cdot)$ мы можем представить (4.40) в виде

$$C_k(\theta) := \omega_{\rho_k}(\hat{w}(\theta)) = \exp \left[-\frac{1}{2} \omega_{\rho_k}(\Phi^2(\theta)) + R(\theta) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4.41)$$

где $R(\theta) = O(|\theta|^3)$ в окрестности $\theta = 0$. Далее, для самосопряженного оператора $\Phi(\theta) = (\theta a + \theta a^*)/\sqrt{2}$ с учетом гипотезы (h2) и неравенства (4.38a) из леммы 4.2 мы заключаем, что

$$\omega_{\rho_k}(\Phi^2(\theta)) = \frac{1}{2} |\theta|^2 \text{Tr}_{\mathcal{H}} [\rho_k(a^* a + a a^*)]. \quad (4.42)$$

Используя лемму 2.1 для вектора $(\zeta_{\theta})^{\text{tr}} := (\theta, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+1}$ и соотношения (4.41), (4.42), получаем представление (2.8):

$$\begin{aligned} \omega_s^{N\tau}(\hat{w}(\theta)) &= \omega_{\rho(N\tau)}(W(\zeta_{\theta})) = C_0(e^{i\epsilon\tau N}(gz)^N \theta) \prod_{k=1}^N C_k(e^{i\epsilon\tau N} gw(gz)^{N-k} \theta) = \\ &= \omega_{\rho_0}(\hat{w}(\theta_0(\tau))) \exp \left[-\sum_{k=1}^N \frac{|\theta_k(\tau)|^2}{4} \text{Tr}_{\mathcal{H}} [(a^* a + a a^*) \rho_k] + \hat{R} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Здесь $\theta_0(\tau)$ и $\theta_k(\tau)$ определяются соотношениями (2.19) и (2.20) при $\theta \equiv \zeta_0$:

$$\begin{aligned} \theta_0(\tau) &= (U_1(\tau) \dots U_N(\tau) \zeta_{\theta})_0 = e^{i\epsilon\tau N} (gz)^N \theta, \\ \theta_k(\tau) &= (U_1(\tau) \dots U_N(\tau) \zeta_{\theta})_k = e^{i\epsilon N\tau} gw(gz)^{N-k} \theta, \end{aligned}$$

при этом $\hat{R} = \sum_{k=1}^N O(|\theta_k|^3)$ согласно формуле (4.41).

Напомним, что в силу соглашения (1.22) (см. замечание 1.2) мы имеем $g = g(\tau)$, $w = w(\tau)$, $z = z(\tau)$. Тогда с учетом представлений (1.12), (1.13) получаем $|g(\tau)| = 1$, $|w(\tau)|^2 + |z(\tau)|^2 = 1$ и, кроме того, при малых τ

$$w(\tau) = i\eta\tau + O(\tau^3), \quad |z(\tau)| = 1 - \frac{\eta^2\tau^2}{2} + O(\tau^4).$$

Следовательно, при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau^2 N \rightarrow \infty$ это дает оценки

$$|(g(\tau)z(\tau))^N| \leq O(e^{-\eta^2\tau^2 N/2}), \quad |\theta_k| \leq O(\tau), \quad \hat{R} = O(\tau^3 N)$$

для любого фиксированного параметра взаимодействия η .

Согласно замечанию 4.3 $\omega_{\rho_0}(\hat{w}(\alpha))$ является характеристической функцией регулярного состояния. Поэтому она непрерывна в точке $\alpha = 0$ и $\omega_{\rho_0}(\hat{w}(0)) = 1$. Отметим

также, что согласно гипотезе (h1), касающейся матриц $\{\rho_k\}_{k=1}^N$, для оценки (4.43) нам нужно контролировать сумму

$$\sum_{k=1}^N |\theta_k(\tau)|^2 = |\theta|^2 |w(\tau)|^2 \frac{1 - |z(\tau)|^{2N}}{1 - |z(\tau)|^2}.$$

С учетом условий $\tau^2 N \rightarrow \infty$ и $\tau^3 N \rightarrow 0$ получаем пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \omega_{\rho_0}(\hat{w}(\theta_0(\tau))) = 1,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |\theta_k(\tau)|^2 = |\theta|^2, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \hat{R} = 0.$$

Подставляя их в (4.43), выводим утверждение (4.39). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Напомним, что из предельных соотношений (4.39) для характеристических функций следует, что регулярные состояния $\omega_s^{N\tau}$ сходятся к регулярному стационарному состоянию ω_s в слабой* топологии (см. замечание 2.2). Из правой части выражения (4.39) с учетом определения 3.1 следует, что предельное состояние является калибровочно-инвариантным и квазисвободным, если форма $h(\theta) := |\theta|^2 \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\rho_1 a^* a)$ задана в (3.2).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Предположим, что матрицы плотности $\{\rho_k\}_{k=1}^N$ соответствуют калибровочно-инвариантному квазисвободному гиббсовскому состоянию с параметром β (3.20). Эти состояния удовлетворяют гипотезам (h1)–(h3). Тогда, проводя явные вычисления в (4.39), находим, что утверждение теоремы 4.3 справедливо в пределе*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \omega_s^{N\tau}(\hat{w}(\theta)) = \exp \left[-\frac{|\theta|^2}{4} \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right]. \quad (4.44)$$

Эта характеристическая функция совпадает с (4.6) для гиббсовского равновесного состояния подсистемы $\mathcal{S}$ с параметром β , определяемым бесконечной цепочкой атомов.

Уместны несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Теорема 4.3 описывает эволюцию подсистемы $\mathcal{S}$ в пределе кратковременного повторяющегося взаимодействия (при $\tau \rightarrow 0$) и при условии, что параметр времени $t = \tau N \rightarrow \infty$ для фиксированной постоянной взаимодействия η . В таком пределе непрерывного времени для бесконечной цепочки атомов, которые все находятся в гиббсовском состоянии с температурным параметром β , получаем то же стационарное состояние (4.44) системы $\mathcal{S}$, что и для дискретного времени $\tau > 0$ (см. соотношение (4.6)). Хотя, возможно, это не выглядит неожиданным, мы хотели бы подчеркнуть, что для нашего варианта предельного перехода к непрерывному времени мы можем ослабить условия на начальное состояние-произведение (4.36) для системы $\mathcal{S} + \mathcal{C}$ до гипотез (h1)–(h3) вместо частного выбора (3.20).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Еще один, более сложный, предел непрерывного времени $\tau \rightarrow 0$, $t = \tau N < \infty$ впервые рассматривался в контексте повторяющегося возмущения

в работе [11]. Показано, что для некоторых моделей этот предел аналогичен некоммутативной центральной предельной теореме [7], для чего требуется подходящий скейлинг постоянной взаимодействия η . Тогда цепочка $\mathcal{S}$ действует как внешний резервуар квантовых шумов. Такая концепция квантовых шумов была обобщена в работе [12], что позволило в явном виде получить генератор Линдбланда для эффективной марковской динамики на $\mathcal{S}$ (см. также работу [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Из доказательства теоремы 4.3 следует также, что начальное состояние $\omega_{\mathcal{S}}$ подсистемы $\mathcal{S}$ можно заменить на любое регулярное состояние.

Благодарности. Мы хотели бы поблагодарить рецензента за полезные замечания и предложения. В. А. Загребнов выражает благодарность Institute of Science and Engineering, Graduate School of the Natural Science and Technology (Kanazawa University, Japan) за поддержку и гостеприимство.

Список литературы

- [1] H. Tamura, V. A. Zagrebнов, *A dynamics driven by repeated harmonic perturbations*, [arXiv: 1404.2998](#).
- [2] B. Nachtergaele, A. Vershynina, V. A. Zagrebнов, *Ann. Henri Poincaré*, **15**:2 (2014), 213–262, [arXiv: 1206.6169](#).
- [3] L. Bruneau, A. Joye, M. Merkli, *J. Math. Phys.*, **55**:7 (2014), 075204, 67 pp., [arXiv: 1305.2472](#).
- [4] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2. Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*, Springer, Berlin, 1997.
- [5] V. A. Zagrebнов, *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*, Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics. Ser. A: Mathematical Physics, **10**, KU Leuven Univ. Press, Leuven, 2003.
- [6] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (eds.), *Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach* (Grenoble, France June 16–July 4, 2003), *Lecture Notes in Mathematics*, **1880**, Springer, Berlin, 2006.
- [7] A. F. Verbeure, *Many-Body Boson Systems. Half a Century Later*, Springer, Berlin, 2011.
- [8] M. Fannes, *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A (N. S.)*, **28**:2 (1978), 187–196.
- [9] H. Araki, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **11**:3 (1976), 809–833.
- [10] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (eds.), *Open Quantum Systems III. Recent Developements* (Grenoble, France June 16–July 4, 2003), *Lecture Notes in Mathematics*, **1882**, Springer, Berlin, 2006.
- [11] S. Attal, Y. Pautrat, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **7**:1 (2006), 59–104.
- [12] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (eds.), *Open Quantum Systems II. The Markovian Approach* (Grenoble, France June 16–July 4, 2003), *Lecture Notes in Mathematics*, **1881**, Springer, Berlin, 2006.
- [13] S. Attal, C. Pellegrini, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **17**:4 (2010), 389–408.

Поступила в редакцию 13.07.2015,
после доработки 20.10.2015