Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Левин, М. А. Олышанецкий, А. В. Зотов, Геометрия расслоений Хиггса над эллиптическими кривыми, связанная с автоморфизмами простых алгебр Ли, системы Калоджеро–Мозера и уравнения Книжника–Замолодчикова–Бернара, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 2, 185–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:19:29

© 2016 г. А. М. Левин^{*†}, М. А. Ольшанецкий[‡], А. В. Зотов^{§¶}

ГЕОМЕТРИЯ РАССЛОЕНИЙ ХИГГСА НАД ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ, СВЯЗАННАЯ С АВТОМОРФИЗМАМИ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ, СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА И УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА–БЕРНАРА

Построены твистованные системы Калоджеро–Мозера со спинами. Эти системы являются системами Хитчина, полученными из расслоений Хиггса над эллиптическими кривыми; при этом операторы переклейки вводятся с помощью произвольного автоморфизма конечного порядка соответствующих алгебр Ли. Таким способом получены спинные обобщения твистованных систем д’Хокера–Фонга и Борднера–Корригана–Сааки–Такасаки. Кроме того, построены соответствующие твистованные классические динамические r -матрицы и уравнения Книжника–Замолотчикова–Бернара, связанные с автоморфизмами алгебр Ли.

Ключевые слова: эллиптические интегрируемые системы, автоморфизмы конечного порядка алгебр Ли, расслоения Хиггса, уравнения Книжника–Замолотчикова–Бернара.

DOI: 10.4213/tmf9005

Работа М. Ольшанецкого проводилась в Институте проблем передачи информации РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00150).

^{*}Факультет математики, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: alevin@hse.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[‡]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия. E-mail: olshanet@itep.ru

[§]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: zotov@mi.ras.ru

[¶]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем класс интегрируемых систем, аналогичных введенным некоторое время назад в статьях [1] и [2]. Это так называемые эллиптические модели Калоджеро–Мозера (КМ) с твистом, связанные с простой группой G . В неявном виде они независимо появились в работе Этингофа и Шиффмана [3], посвященной классификации динамических классических r -матриц, которые были введены в статье [4]. В настоящей работе мы отождествляем эти системы с особым классом систем Хитчина, связанных с эллиптическими кривыми Σ_τ (где τ – модулярный параметр), и таким образом соотносим их с частным случаем расслоений Хиггса над эллиптическими кривыми.

В работе [5] (см. также [6], [7]) было обнаружено, что стандартные SL_N -системы КМ можно считать системами Хитчина, связанными с тривиальным расслоением Хиггса над эллиптической кривой с отмеченными точками. В работах [8], [9] этот подход был обобщен на эллиптические системы КМ, связанные с произвольными простыми группами Ли и топологически нетривиальными расслоениями Хиггса. В то же время динамические классические r -матрицы были получены аналогичным путем с помощью редукции Пуассона из канонической структуры на расслоениях Хиггса (см. работы [10], [11]). Голоморфные расслоения, лежащие в основе этого построения, определяются двумя операторами переклейки, удовлетворяющими некоторым коммутационным соотношениям. Если их групповой коммутатор равен тождественному элементу, то расслоение топологически тривиально. В этом случае мы приходим к эллиптическим системам КМ со спином [12]–[14]. Если групповой коммутатор равен элементу из центра $\mathcal{Z}(G)$, отличному от тождественного, то расслоение нетривиально. Оно описывается характеристическим классом, который вводится как элемент группы $H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(G))$. Пространство модулей этих расслоений, соответствующие эллиптические системы КМ и динамические r -матрицы рассмотрены в работах [8], [9].

В настоящей работе мы заменяем один из операторов переклейки автоморфизмом конечного порядка соответствующей алгебры Ли. Мы описываем пространства модулей полученных таким образом тривиальных и нетривиальных голоморфных расслоений, используя факторы алгебр Картана по действию группы Бернштейна–Шварцмана (см. формулы (4.31), (4.53), (4.64)). Мы строим соответствующие расслоения Хиггса и твистованные системы КМ. Кроме операторов Лакса и гамильтонианов (5.23), (5.25) мы получаем классические динамические r -матрицы (6.2). Они определяют структуру Пуассона для соответствующих систем. Таким образом мы частично покрываем классификацию классических динамических r -матриц [3], основанную на симметриях расширенных диаграмм Дынкина. Пространства модулей динамических r -матриц определяются пространствами модулей соответствующих голоморфных расслоений, которые были введены и изучены в работе [15]. В работе [4] построены r -матрицы, связанные со всеми конечными автоморфизмами простых алгебр Ли, происходящими из тривиального расслоения.

В частности, для систем КМ мы получаем результаты, близкие к результатам работ [1] и [2]. Следует отметить, что рассмотренные в указанных работах системы являются бесспиновыми системами КМ, связанными с простой группой G , тогда как в нашем случае мы получаем системы КМ со спином. Их можно считать обобщением

систем типа КМ, рассмотренных в работе [13]. Для перехода к бесспиновым системам нужно специализировать представления соответствующей алгебры Ли, как это было сделано в работах [1], [2]. Другой подход к бесспиновым системам, развитый в работе [16], основан на эквивариантном погружении группы G в $GL(N)$. Заметим, что вывод твистованных систем Калоджеро, основанных на системах типа Хитчина, был также предложен в работе [17].

Следуя основным положениям работ [18], [19], мы строим связность Книжника–Замолодчикова–Бернара (КЗБ) с помощью классических r -матриц. Это плоская связность в расслоении конформных блоков над пространством модулей эллиптических кривых с отмеченными точками. Конформные блоки определяют корреляторы в теории ВЗВ на эллиптических кривых. В рассматриваемой теории поля удовлетворяют специальным квазипериодическим условиям. Монодромия полей вокруг одного из циклов определяется внешним автоморфизмом соответствующей простой алгебры. Эта конструкция очень похожа на предложенную в работах [20], [21].

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть Σ_g – риманова поверхность рода g , G – простая комплексная группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть $\mathcal{P}$ – главное G -расслоение над Σ_g и $E_G = \mathcal{P} \times_G V$ – ассоциированное расслоение (V – модуль группы G). Особое внимание мы уделим случаю, когда V является алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ с присоединенным действием Ad_G группы G в алгебре $\mathfrak{g}$. В этом случае мы имеем дело с присоединенным расслоением $\text{Ad}_G = \mathcal{P} \times_{\text{Ad}_G} \mathfrak{g}$. Слои такого расслоения несут структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Расслоением Хиггса $\mathcal{H}(G, \Sigma_g)$ над римановой поверхностью Σ_g называется пара (E_G, Φ) , в которой Φ – поле Хиггса. Это голоморфная 1-форма на Σ_g , принимающая значения в $\text{End } E_G$.

В нашей работе мы исследуем расслоения Хиггса над эллиптическими кривыми (рода один) и строим соответствующие интегрируемые системы.

2.1. Голоморфные расслоения над эллиптическими кривыми. Нашей первой задачей является описание пространств модулей голоморфных расслоений и классификация их топологических типов в случае, когда Σ_g – эллиптическая кривая $\Sigma_\tau \sim \mathbb{C}/(\tau\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ (где $\text{Im } \tau > 0$).

Пространства модулей $\text{Mod}(\Sigma_\tau, G)$ введем следующим образом [22]–[24]. Пусть ρ_1 и ρ_τ – два генератора фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_\tau)$, соответствующие сдвигам $z \rightarrow z + 1$ и $z \rightarrow z + \tau$ и удовлетворяющие условию

$$\rho_1 \rho_\tau \rho_1^{-1} \rho_\tau^{-1} = 1. \quad (2.1)$$

Сечение G -расслоения $E_G(V)$ над Σ_τ удовлетворяет условиям квазипериодичности

$$\psi(z + 1) = A(z)\psi(z), \quad \psi(z + \tau) = B(z)\psi(z) \quad \text{для } \psi \in \Gamma(E_G(V)), \quad (2.2)$$

в которых операторы переклейки A и B должны подчиняться условию (2.1):

$$A(z)B^{-1}(z)A^{-1}(z + \tau)B(z + 1) = 1. \quad (2.3)$$

По определению эти операторы переходов задают топологически тривиальное расслоение.

Пусть ζ – элемент центра $\mathcal{Z}(\bar{G})$ универсальной накрывающей группы $\bar{G}$. Чтобы перейти к нетривиальному расслоению, заменим соотношение (2.3) уравнением

$$A(z)B^{-1}(z)A^{-1}(z+\tau)B(z+1)=\zeta. \quad (2.4)$$

Расслоение $\tilde{E}$ эквивалентно расслоению E , если его сечение $\tilde{\psi}$ связано с ψ по формуле $\tilde{\psi}(z)=f(z)\psi(z)$, где $f(z)$ – обратимый оператор, действующий в модуле V . Из условий (2.2) следует, что преобразованные операторы переклейки имеют вид

$$A^f(z)=f(z+1)A(z)f^{-1}(z), \quad B^f(z)=f(z+\tau)B(z)f^{-1}(z). \quad (2.5)$$

Эти преобразования образуют группу автоморфизмов $\mathcal{G}$ (калибровочную группу) расслоения E_G . Согласно работе [25] операторы переклейки можно преобразовать в постоянные (см. далее предложение 4.2). Таким образом, операторы (A, B) образуют проективное представление фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_\tau)$.

Пространство модулей стабильных голоморфных расслоений над кривой Σ_τ можно определить следующим образом:

$$\text{Bun}_\zeta(\Sigma_\tau, G)=\{[A, B^{-1}]=\zeta\}/\mathcal{G}, \quad \zeta \in \mathcal{Z}(G). \quad (2.6)$$

В работах [23], [24] доказано, что пространство $\text{Bun}_\zeta(\Sigma_\tau, G)$ при $\zeta=1$ изоморфно весовому проективному пространству. Рассмотрим универсальную накрывающую группу $\bar{G}$ и факторгруппу $G^{\text{ad}}=\bar{G}/\mathcal{Z}(\bar{G})$, где $\mathcal{Z}(\bar{G})$ – центр группы $\bar{G}$:

$$1 \rightarrow \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow \bar{G} \rightarrow G^{\text{ad}} \rightarrow 1. \quad (2.7)$$

Тогда для аналитических пучков над Σ_τ можно выписать точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma) \rightarrow G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma) \rightarrow 1. \quad (2.8)$$

Таким образом, приходим к длинной точной последовательности когомологий

$$H^1(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\bar{G})) \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, \bar{G}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^1(\Sigma_\tau, G^{\text{ad}}(\mathcal{O}_\Sigma)) \rightarrow H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\bar{G})) \sim \mathcal{Z}(\bar{G}) \rightarrow 0.$$

Первая когомологическая группа $H^1(\Sigma_\tau, G(\mathcal{O}_\Sigma))$ кривой Σ_τ с коэффициентами в аналитических пучках определяет пространство модулей $\text{Bun}_\zeta(\Sigma_\tau, G)$ E_G -расслоений. Элементы группы $H^2(\Sigma_\tau, G)$ препятствуют поднятию G^{ad} -расслоений до $\bar{G}$ -расслоений и устанавливают топологическую классификацию голоморфных векторных расслоений: $\zeta(E_{G^{\text{ad}}}) \in H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z}(\bar{G}))$ – препятствие поднятию $E_{G^{\text{ad}}}$ -расслоения до $E_{\bar{G}}$ -расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Образы $H^1(\Sigma_\tau, G(\mathcal{O}_\Sigma))$ в $H^2(\Sigma_\tau, \mathcal{Z})$ называются *характеристическими классами* $\zeta(E_G)$ G -расслоений.

Кокасательное расслоение $T^*\text{Bun}(\Sigma_g, G)$ пространства модулей является пространством модулей расслоения Хиггса над кривой Σ_g . Оно получается из $\mathcal{H}(G, \Sigma_g)$ с помощью симплектической редукции. Это фазовое пространство алгебраически интегрируемой системы [26]. В случае расслоения $T^*\text{Bun}_\zeta(\Sigma_\tau, G)$ мы получаем системы типа КМ [5], [8], [9]. Чтобы таким способом получить твистованные системы КМ и твистованные уравнения КЗБ, мы заменяем оператор переклейки A из (2.2) на внешний автоморфизм соответствующей алгебры Ли.

3. АВТОМОРФИЗМЫ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

3.1. Внутренние и внешние автоморфизмы. Группа автоморфизмов конечного порядка простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является полупрямым произведением подгрупп внутренних $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ и внешних $\text{Out}(\mathfrak{g})$ автоморфизмов конечного порядка:

$$1 \rightarrow \text{Inn}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Out}(\mathfrak{g}) \rightarrow 1.$$

Поэтому внешний автоморфизм образует факторгруппу $\text{Out}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g}) / \text{Inn}(\mathfrak{g})$.

Пусть G – простая комплексная группа Ли и $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Группа внешних автоморфизмов $\text{Out}(G)$ группы G представляет собой факторгруппу $\text{Aut}(G) / \text{Inn}(G)$, где $\text{Inn}(G) = \{\iota_h : g \rightarrow hgh^{-1}\} \sim G^{\text{ad}}$ является подгруппой, состоящей из внутренних автоморфизмов. Группа внешних автоморфизмов $\text{Out}(G)$ дуальна центру $\mathcal{Z}(G)$ в следующем смысле: внутренний автоморфизм ι группы G приводит к короткой точной последовательности

$$\mathcal{Z}(G) \hookrightarrow G \xrightarrow{\iota} \text{Aut}_G \rightarrow \text{Out}_G.$$

Здесь $\mathcal{Z}(G) = \text{Ker}(\iota)$ и $\text{Out}(G) \sim \text{Coker}(\iota)$.

Действие автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ описывается следующим образом [27]–[29]. Фиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и систему простых корней $\Pi = \Pi(\mathfrak{g})$. Определим группу автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$, сохраняющих $\mathfrak{h}$ и Π . Пусть $H^{\text{ad}} = \exp \text{ad}(\mathfrak{h})$ есть максимальный тор группы G^{ad} , а $\text{Aut}(\Pi)$ – группа симметрий диаграмм Дынкина, соответствующая системе простых корней Π . Тогда

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi) = H^{\text{ad}} \ltimes \text{Aut}(\Pi), \quad (3.1)$$

и общие автоморфизмы можно представить как $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi) \cdot \text{Inn}(\mathfrak{g})$.

Нашей целью является построение базиса в $\mathfrak{g}$, совместного с действием автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Он представлен в приложении А.

3.2. Общие автоморфизмы конечного порядка. В этом пункте мы придерживаемся работ [27], [28] (см. также приложение А).

Определим общий автоморфизм порядка p с помощью формулы (3.1). Пусть $\mathfrak{g}_0$ – инвариантная подалгебра автоморфизмов ν (см. формулу (A.13) приложения А), а $\mathfrak{h}_0$ – ее подалгебра Картана. С помощью этой структуры представим автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$ (3.1) в виде

$$\sigma = \nu \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{ad}_\kappa\right), \quad \kappa \in \mathfrak{h}_0. \quad (3.2)$$

Пусть $s_0, s_1, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, не имеющие нетривиального общего множителя, и (см. формулу (A.8))

$$p = r \sum_{j=0}^n a_j s_j \quad (\nu^r = \text{Id}). \quad (3.3)$$

Общий автоморфизм $\sigma_{r,s}$ алгебры $\mathfrak{g}$ введем, задав его действие на корневые подпространства $E_{\tilde{\alpha}_k}$, $\tilde{\alpha}_k \in \tilde{\Pi}$, и $E_{-\tilde{\alpha}_0}$ (см. соотношения (A.7) и (A.8)):

$$\sigma_{r,s} E_{\tilde{\alpha}_k} = e\left(\frac{r}{p} s_k\right) E_{\tilde{\alpha}_k}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.4)$$

Если $\nu = \text{Id}$, то мы получаем присоединенное действие инвариантных тором на $\mathfrak{g}$:

$$H_0^{\text{ad}} = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{ad}_\kappa\right), \quad \kappa \in \mathfrak{h}_0.$$

Определим элемент $\kappa \in \mathfrak{h}_0$ его разложением по корневому базису $\{H_j\}$ (A.27),

$$\kappa = \sum_{j=1}^n c_j H_j \in \mathfrak{h}_0,$$

так что $\text{Ad}_{\mathbf{e}(\kappa)} = \sigma_{1,s}$. При этом коэффициенты c_j введем следующим образом. Пусть $(\tilde{a})_{jk} = \langle \tilde{a}_k, H_j \rangle$ – матрица Картана, соответствующая твистованной системе корней $\tilde{\Pi}$ (A.7). Тогда $c_j = (\tilde{a}^{-1})_{jk} s_k r / m$ и

$$\mathcal{Q} = \mathbf{e}(\kappa) = \exp\left(2\pi i \frac{r}{p} \sum_{j,k=1}^n (\tilde{a}^{-1})_{jk} s_k H_j\right). \quad (3.5)$$

Отсюда $\text{Ad}_{\mathcal{Q}} E_{\tilde{\alpha}_k} = \mathbf{e}(rs_k/p) E_{\tilde{\alpha}_k}$. Из соотношений (A.8) и (A.3) следует, что

$$\mathbf{e}\left(\frac{r}{p} \sum_{k=1}^n a_k s_k\right) = \mathbf{e}\left(-\frac{r}{p} a_0 s_0\right).$$

Таким образом,

$$\sigma_{1,s} E_{-\tilde{\alpha}_0} \equiv \text{Ad}_{\mathcal{Q}} E_{-\tilde{\alpha}_0} = \mathbf{e}\left(\frac{r}{p} s_0\right) E_{-\tilde{\alpha}_0} \quad (3.6)$$

и поэтому $\sigma_{r,s}$ действительно определяет автоморфизм порядка p . Он порождается действием (3.2):

$$\sigma_{r,s} = \nu \mathcal{Q} = \nu \mathbf{e}(\kappa), \quad \nu \in \text{Out}(\mathfrak{g}), \quad \nu^r = \text{Id}. \quad (3.7)$$

Аutomорфизм $\sigma_{r,s}$ определяет $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \sum_j \mathfrak{g}_j, \quad \sigma_{r,s}(\mathfrak{g}_j) = \omega \mathfrak{g}_j, \quad \omega^p = 1. \quad (3.8)$$

3.3. Алгебры петель и группа петель. Пусть $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, t) = \mathfrak{g} \otimes C[t^{-1}, t]$ – алгебра петель. Она является отображением $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathfrak{g}$. Определим действие автоморфизма $\sigma_{r,s}$ на t как $\sigma_{r,s}(t) = \omega t$. Рассмотрим отображения $\mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \sigma_{r,s}) \in \mathbb{C}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, эквивариантные по отношению к $\sigma_{r,s}$:

$$\mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \sigma_{r,s}) = \mathcal{L}_0(\sigma_{r,s}(\mathfrak{g}), \omega^{-1}t), \quad \mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \nu) = \sum_j t^j \mathfrak{g}_{j, \bmod p}, \quad (3.9)$$

где $\mathfrak{g}_j$ введены в (3.8).

Пусть $L(G)$ – группа петель, соответствующая группе G ,

$$L(G) = G \otimes C[t^{-1}, t] = \left\{ \sum_k g_k t^k, \quad g_k \in G \right\}. \quad (3.10)$$

Пусть N^- – отрицательная унипотентная подгруппа группы G , а B – положительная подгруппа Бореля. Введем подгруппы петель

$$L^+(G) = \{g_0 + g_1 t + \dots = g_0 + tL[t]\}, \quad g_j \in G, \quad g_0 \in B, \quad (3.11)$$

$$N^-(G) = \{n_- + g_1 t^{-1} + \dots = n_- + t^{-1}L[t^{-1}]\}, \quad n_- \in N^-. \quad (3.12)$$

Рассмотрим две аффинные группы Вейля

$$W_P = \{\hat{w} = wt^\gamma \mid w \in W, \gamma \in P^\vee\}, \quad W_Q = \{\hat{w} = wt^\gamma \mid w \in W, \gamma \in Q^\vee\}. \quad (3.13)$$

Они действуют на корневые векторы следующим образом:

$$E_{\hat{\alpha}} = E_\alpha t^n \rightarrow E_{\hat{w}(\hat{\alpha})} = E_{w(\alpha)} t^{n+\langle \gamma, \alpha \rangle}.$$

Для групп петель существует аффинное разложение Брюа [30]

$$L(G^{\text{ad}}) = \bigcup_{w \in W_P} N^-(G^{\text{ad}}) \hat{w} L^+(G^{\text{ad}}), \quad (3.14)$$

$$L(\bar{G}) = \bigcup_{\hat{w} \in W_Q} N^-(\bar{G}) \hat{w} L^+(\bar{G}). \quad (3.15)$$

Рассмотрим скрученную группу петель [31] с алгеброй Ли $\mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \sigma_{r,s})$ (3.9). Это подгруппа эквивариантных отображений

$$L_0(G, \sigma_{r,s}) = \{g(t) \mid \sigma_{r,s}(g(t)) = g(\omega t)\}. \quad (3.16)$$

Посмотрим на ее разложения (3.14), (3.15) (см. также формулы (A.31) и (A.30))

$$L_0(G, \sigma_{r,s}) = \{g(t) = g_-(t) t^\gamma g_+(t)\}, \quad \begin{array}{ll} \gamma \in \tilde{Q}^\vee & \text{для } G = \bar{G}, \\ \gamma \in \tilde{P}^\vee & \text{для } G = G^{\text{ad}}. \end{array} \quad (3.17)$$

Из равенства (3.16) найдем, что $\sigma_{r,s}(g_\pm(t)) = g_\pm(\omega t)$ и $\omega^\gamma t^\gamma = t^{\sigma_{r,s}(\gamma)}$. Отсюда следует, что вес γ не может быть произвольным, он удовлетворяет следующим условиям (здесь $p = \text{ord } \sigma_{r,s}$):

$$\omega^\gamma = 1, \quad t^\gamma = t^{\sigma_{r,s}(\gamma)}, \quad \begin{array}{ll} \gamma \in p\tilde{Q}^\vee & \text{для } G = \bar{G}, \\ \gamma \in p\tilde{P}^\vee & \text{для } G = G^{\text{ad}}, \end{array} \quad (3.18)$$

где $\tilde{P}^\vee$ и $\tilde{Q}^\vee$ – инвариантные решетки ковесов и кокорней (A.30), (A.31).

4. ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ И АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР ЛИ

Построим голоморфные расслоения над эллиптическими кривыми, как в п. 2.1, переходя к описанию Якоби эллиптических кривых через факторизацию пространства $\mathbb{C}^*$. Пусть $t = e^{2\pi iz/p} = \mathbf{e}(z/p) \in \mathbb{C}^*$, где $p = \text{ord } \sigma$. Действие на элемент z решетки $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, выраженное через координату t , принимает вид

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z + 1, \quad t \rightarrow t\omega, & \text{где } \omega &= \mathbf{e}\left(\frac{1}{p}\right), \\ z &\rightarrow z + \tau, \quad t \rightarrow t\tilde{q}, & \text{где } \tilde{q} &= \mathbf{e}(\tilde{\tau}), \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{p}. \end{aligned}$$

Кривую Σ_τ можно задать в терминах координаты t как $C_{\tilde{q}} = \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^{\tilde{q}}$. Отождествим $C_{\tilde{q}}$ с кольцом:

$$C_{\tilde{q}} = \{t \in \mathbb{C}^* \mid |\tilde{q}^{1/2}| \leq |t| < |\tilde{q}^{-1/2}|\}. \quad (4.1)$$

4.1. Присоединенные расслоения. Пусть $\mathcal{P}$ – главное G -расслоение над кольцом $C_{\tilde{q}}$. Рассмотрим расслоение $Ad_G^\sigma = \mathcal{P} \otimes_{G^{\text{ad}}} \mathfrak{g}$ над $C_{\tilde{q}}$. Сечения $\Gamma(Ad_G^\sigma) = \{\Psi(t)\}$ этого расслоения являются эквивариантными голоморфными отображениями $C^* \rightarrow \mathfrak{g}$ по отношению к действию автоморфизма $\sigma_{r,s}$ (3.9) конечного порядка:

$$\Psi(t\omega) = \sigma_{r,s}(\Psi(t)), \quad \omega^p = 1. \quad (4.2)$$

Оператор переклейки, соответствующий другому периоду, имеет вид

$$\Psi(\tilde{q}t) = R(t)\Psi(t), \quad (4.3)$$

где $R(t)$ – присоединенное действие, $R(t) \in L(G^{\text{ad}})$ при $\hat{w} = 1$ (см. формулу (3.14)). Из условия совместности этих преобразований следует, что

$$\sigma_{r,s}(R(t)) = \zeta R(t\omega)\sigma_{r,s}, \quad \zeta \in \mathcal{Z}(\bar{G}). \quad (4.4)$$

Если $\zeta = \text{Id}$, то это соотношение означает, что $R(t) \in L_0(G^{\text{ad}}, \sigma)$ (см. формулу (3.16)).

Калибровочная группа $\mathcal{G}_\sigma(G)$ – это группа автоморфизмов $Ad_G^\sigma(C_{\tilde{q}})$ -расслоения. Из соотношения (4.2) следует, что она является группой эквивариантных голоморфных отображений (3.16). Напомним, что в разложении (3.17) вес γ не произвольный, он удовлетворяет условию (3.18) с $G = G^{\text{ad}}$. Группа $\mathcal{G}_\sigma(G)$ действует на операторы переклейки следующим образом:

$$R(t) \rightarrow f(\tilde{q}t)R(t)f^{-1}(t). \quad (4.5)$$

Это действие сохраняет условие (4.4).

К отмеченной точке $t = 1$ прикрепим многообразие флагов $\text{Flag} \sim G/P$, где P – параболическая подгруппа группы G , и предположим, что калибровочная группа $\mathcal{G}_\sigma(G)$ сохраняет флаг. Тогда калибровочную группу можно определить следующим образом:

$$\mathcal{G}_\sigma(G) = \{f(t): C^* \rightarrow G^{\text{ad}} \mid f \in L_0(G^{\text{ad}}, \sigma), f(t)|_{t=1} = P\}. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.1. *Расслоение Ad_G^σ , введенное по формулам (4.2), (4.3), калибровочно эквивалентно расслоению Ad_G^ν , где ν – диаграммный автоморфизм. Расслоение Ad_G^ν определяется операторами переклейки своих сечений:*

$$\tilde{\Psi}(t\omega) = \nu(\tilde{\Psi}(t)), \quad \omega = e\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{q}t) = \tilde{R}(t)\tilde{\Psi}(t), \quad \tilde{R}(t) = \text{Ad}_{t^{-p\kappa}} R(t), \quad (4.8)$$

где $p = \text{ord } \sigma$, а $e(\kappa)$ вводится по формуле (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим калибровочное преобразование $f(t) = t^x$, где $x \in \mathfrak{h}_0$. Из формулы (4.2) следует, что

$$\sigma_{r,s} \xrightarrow{f} \omega^x t^x \sigma_{r,s} t^{-x} = \omega^x \sigma_{r,s}.$$

Пусть $x = -p\kappa$, где κ определяется по формуле (3.5), тогда, подействовав этим преобразованием, получим $\sigma_{r,s} \xrightarrow{f} \nu$, так что формулу (4.2) можно заменить на (4.7). Таким образом, получаем диаграммный автоморфизм (4.7). Подействовав на $R(t)$ преобразованием $t^{-p\kappa}$, где

$$\kappa = \frac{r}{p} \sum_{j,k=1}^n (a^{-1})_{jk} s_k H_j, \quad (4.9)$$

приходим к соотношению (4.8). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Рассмотрим монодромию

$$\mathcal{M} = \mathbf{e} \left(-r \sum_{j,k=1}^n (a^{-1})_{jk} s_k H_j \right)$$

калибровочного преобразования $t^{-p\kappa}$. Обратные матрицы Картана $(a^{-1})_{jk}$ для диаграмм Дынкина с нетривиальными симметриями содержат дробные матричные элементы $(a_{jk}^l)^{-1}$, такие что $(a_{jk}^l)^{-1}$ – целые числа; здесь l – порядок центра $\mathcal{Z}(\bar{G})$ (2.7) группы $\bar{G}$. Поскольку центр изоморфен фактору решетки весов по решетке корней, $\mathcal{Z}(\bar{G}) \sim P/Q$, монодромия $\mathcal{M}$ является элементом центра $\mathcal{Z}(\bar{G})$. Поэтому монодромия $\mathcal{M}$ может быть определена как элемент подгруппы Картана $H^{\text{ad}} \subset G^{\text{ad}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из формулы (4.7) следует периодичность сечений $\tilde{\Psi} \in \Gamma(\mathcal{A}d_G^\nu)$,

$$\tilde{\Psi}(t\omega^r) = \tilde{\Psi}(t), \quad \omega = \mathbf{e} \left(\frac{1}{p} \right), \quad (4.10)$$

а также периодичность сечений $\Psi \in \Gamma(\mathcal{A}d_G^\sigma)$,

$$\Psi(t\omega^p) = \Psi(t), \quad p \geq r.$$

Рассмотрим теперь расслоения $\mathcal{A}d_G^\nu(C_q)$, введенные по формулам (4.7), (4.8). Условие (4.4) принимает вид

$$\nu(R(t)) = \zeta R(t\omega), \quad \zeta \in \mathcal{Z}(\bar{G}), \quad \omega = \mathbf{e} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.11)$$

Введем пространство модулей расслоений при фиксированных ν и ζ как множество $\{R(t)\}$ операторов, удовлетворяющих условию (4.11) с точностью до калибровочных преобразований (4.5):

$$\text{Bun}_{\nu,\zeta}(\mathcal{A}d_G^\nu(C_{\bar{q}})) = \{R(t) \mid \nu(R(t)) = \zeta R(te^{2\pi i/r})\} / \mathcal{G}_\nu(G). \quad (4.12)$$

Здесь $\mathcal{G}_\nu(G)$ – группа (4.6). Нашей целью является описание большой клетки в этом пространстве. Сначала покажем, что расслоения $\mathcal{A}d_G^\nu(C_q)$ топологически тривиальны.

Далее доказано (см. предложение 4.2), что любой оператор переклейки $R(t)$ в окрестности постоянного отображения из $C_{\bar{q}}$ в подгруппу Картана $\mathbf{x} = \mathbf{e}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}(G)$ представляется через калибровочное преобразование $f(t) = 1 + \mathfrak{r}(t)$ как

$$R(t) = f^{-1}(qt)\mathbf{x}f(t). \quad (4.13)$$

Переходя к подалгебре Картана, перепишем условие (4.11) в виде

$$\nu(\mathbf{u}) - \mathbf{u} = \xi, \quad \zeta = \mathbf{e}(\xi). \quad (4.14)$$

Поскольку $R(t)$ принимает значения в G^{ad} , элемент $\mathbf{u}$ определен с точностью до сдвига по решетке весов:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{u} + \gamma, \quad \gamma \in P. \quad (4.15)$$

С другой стороны, вес $\xi \in P$ в соотношении (4.14) определен с точностью до прибавления элемента $\beta \in Q$ из решетки корней. Отметим, что ξ – не произвольный элемент из P , он принадлежит образу оператора Υ , действующего на $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$\Upsilon: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad x \mapsto \nu(x) - x. \quad (4.16)$$

В частности, он действует на решетку весов, $\Upsilon: P \rightarrow P$. Пусть

$$P^{\Upsilon} = \text{im}(\Upsilon), \quad P^{\Upsilon} = \{\xi \in P \mid \xi = \nu(\gamma) - \gamma, \gamma \in P\}. \quad (4.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Расслоения $\text{Ad}_G^{\nu}(C_q)$ топологически тривиальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что любой вес $\xi \in P^{\Upsilon}$ можно убрать калибровочным образом с помощью сдвига (4.15) элемента $\mathbf{u}$ на элемент $\gamma \in P$:

$$\xi \in \text{im}(\Upsilon) \implies \xi = \nu(\gamma) - \gamma, \quad \gamma \in P.$$

Представим элемент $x \in \text{im}(\Upsilon)$ в базисе Ξ фундаментальных весов (A.28) в виде $x = c_1\varpi_1 + \dots + c_n\varpi_n$. Поскольку $\nu(\Xi) = \Xi$, то Ξ есть объединение орбит

$$\mathcal{O}_j = \{\varpi_j, \nu(\varpi_j), \dots, \nu^{r-1}(\varpi_j)\}$$

длины $r = 1, 2$ или $r = 3$ (для D_4). Оператор Υ действует на орбиту $\mathcal{O}$ длины $r > 1$ как матрица порядка r , имеющая вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Этот оператор можно обратить на $(r-1)$ -мерном подпространстве

$$\{c_j\varpi_j + \dots + c_{\nu^{r-1}j}\nu^{r-1}(\varpi_j) \mid c_j + \dots + c_{\nu^{r-1}j} = 0\}. \quad (4.18)$$

Переформулируем это условие в терминах ν -действия следующим образом:

$$x \in \text{im}(\Upsilon) \iff x + \nu(x) + \dots + \nu^{r-1}(x) = 0. \quad (4.19)$$

Для $\xi \in P$ все коэффициенты $c_j = n_j$ целые, а $\xi \in \text{im}(\Upsilon)$, если $n_j + \dots + n_{\nu^{r-1}j} = 0$. В этом случае ξ в формуле (4.14) компенсируется преобразованием $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \gamma$, где $\gamma = \sum_j n_j \varpi_j$ и $\sum_j n_j = 0$. ■

Последнее утверждение означает, что присоединенные расслоения алгебр Ли, введенные по формуле (4.2), имеют только одну компоненту, соответствующую тривиальному характеристическому классу, и, таким образом, расслоения топологически тривиальны. Поэтому вместо условия (4.14) можно рассмотреть равенство

$$\nu(\mathbf{u}) - \mathbf{u} = 0. \quad (4.20)$$

Это означает, что $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0$.

Теперь докажем, что в окрестности элемента $\mathbf{u}$ почти все операторы переклейки $R(t)$ являются образами элемента $\mathbf{e}(\mathbf{u})$, получающимися в результате малых калибровочных преобразований.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{e}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0$, где $\mathfrak{h}_0$ задано в (A.13). Тогда существует малое калибровочное преобразование $f(t) = 1 + \mathfrak{r}(t)$, $\mathfrak{r}(t) \in \text{Lie}(\mathcal{G}_\nu(G))$, такое что вблизи элемента Картана $\mathbf{x}$ почти все операторы $R(t)$ можно представить как калибровочное преобразование элемента $\mathbf{x}$:

$$R(t) = (1 - \mathfrak{r}(tq))\mathbf{x}(1 + \mathfrak{r}(t)). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $R(t)$ в виде $R(t) = \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \delta R(t)$, где $\delta R(t)$ – малая величина. Тогда формулу (4.21) можно записать в следующей инфинитезимальной форме:

$$\mathfrak{r}(t\tilde{q})\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}(\mathbf{u})\mathfrak{r}(t) = \delta R(t) - \delta R_0. \quad (4.22)$$

Здесь δR_0 – постоянный элемент. Вычитание элемента δR_0 приводит к тому, что правая часть уравнения (4.22) принадлежит образу оператора

$$\begin{aligned} D_{\tilde{q}}(\mathbf{u}): \text{Lie}(\mathcal{G}_\nu(G)) &\rightarrow \text{Lie}(\mathcal{G}_\nu(G)) \otimes \Omega^{(1,0)}(C_{\tilde{q}}), \\ (D_{\tilde{q}}(\mathbf{u})\mathfrak{r})(t) &= (Ad_{\mathbf{e}(\mathbf{u})}\mathfrak{r}(t\tilde{q}) - \mathfrak{r}(t))\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения основано на существовании функции Грина $G(\mathbf{u}, t)$ для оператора $D_{\tilde{q}}$, принимающей значения в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$:

$$G(\mathbf{u}, t\tilde{q}, t_1)\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}(\mathbf{u})G(\mathbf{u}, t, t_1) = \mathcal{I} \cdot \delta(t, t_1) - \mathcal{I}^0. \quad (4.23)$$

Здесь сопряжение посредством элемента $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ берется по отношению к первому аргументу, $\delta(t, t_1)$ – линейный функционал в пространстве полиномов Лорана $\mathbb{C}[t^{-1}, t]$ (см. формулы (B.5), (B.6) приложения B), а $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}^0$ – 2-тензоры на $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, определенные следующим образом. Пусть $\{T_a\}$ – базис (A.16), а $c_{a,b} = (T_a, T_b)$ – метрика Киллинга (A.17), (A.26) в этом базисе. Тогда (см. соотношения (A.15), (A.25))

$$\mathcal{I} = \sum_{a,b} c^{a,b} T_a \otimes T_b, \quad \mathcal{I}^0 = \sum_{k=1}^l \mathfrak{e}_k^0 \otimes \mathfrak{e}_k^0.$$

Имеем $(\mathcal{IT}_c)_2 = T_c \otimes \text{Id}$, где $(\mathcal{IT}_c)_2 = \text{tr}_2(\mathcal{IT}_c)$. Действительно, функция $G(\mathbf{u}, t, t_1)$ выражается через классическую r -матрицу, вычисленную ниже (см. (6.3), (6.4)):

$$G(\mathbf{u}, t, t_1) = r\left(\mathbf{u}, \frac{t}{t_1}\right).$$

Она удовлетворяет условию (4.23) в силу соотношений (6.3), (6.4) и второго из равенств (4.55).

Решения уравнения (4.22), выраженные через $G(t, s)$, принимают вид

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, t) = \oint_{|t_1|=|t|(1+\varepsilon)} (G(\mathbf{u}, t, t_1)X(t_1))_2, \quad \varepsilon > 0,$$

где $X(s) = \delta R(s) - \delta R_0$. ■

Таким образом, найдено калибровочное преобразование

$$R(t) \xrightarrow{f(t)} \mathbf{x} \in \mathcal{H}_0^{\text{ad}} \subset G_0^{\text{ad}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{e}(\mathbf{u}), \quad (4.24)$$

где элемент $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0$.

Проанализируем решения уравнения (4.20) с точностью до преобразований, сохраняющих форму решений (остаточные калибровочные преобразования). Эти решения определяют пространство модулей $\text{Bun}_{\nu, \zeta}(\mathcal{A}d_G^\nu(C_q))$ (4.12) при $\zeta = \text{Id}$. Опишем сначала остаточные калибровочные преобразования. Пусть W_0 – подгруппа Вейля подалгебры $\mathfrak{g}_0$ из приложения А, представляющая собой группу Вейля, порожденную отражениями системы корней $\tilde{R}$, и пусть $\tilde{P}^\vee$ – решетка ковесов подалгебры $\mathfrak{g}_0$ (A.30).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Уравнение (4.20) инвариантно относительно преобразований

$$\mathbf{u} \rightarrow w \cdot (\mathbf{u}) + \gamma_1 + \gamma_2 \tau, \quad \gamma_1 \in \tilde{P}^\vee, \quad \gamma_2 \in \tilde{P}^\vee, \quad w \in W_0. \quad (4.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что элементы $e^{2\pi i \gamma}$ при $\gamma \in \tilde{P}^\vee$ порождают центр универсальной накрывающей группы $\tilde{G}_0$. Другими словами, $e^{2\pi i \gamma}$ – единичный элемент в $\mathcal{H}_0^{\text{ad}}$. Поэтому $\text{Re } \mathbf{u}$ в уравнении (4.24) есть элемент факторпространства:

$$\text{Re } \mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}} / \tilde{P}^\vee, \quad \mathbf{u} + \gamma \sim \mathbf{u} \quad \text{для} \quad \gamma \in \tilde{P}^\vee. \quad (4.26)$$

Таким образом, $\text{Re } \mathbf{u}$ можно выбрать из фундаментальной области в $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}}$ действия аффинной группы Вейля $\tilde{W}'_{\text{aff}} = W_0 \ltimes \tilde{P}^\vee$ (A.36).

Остаточные калибровочные преобразования элемента $\mathbf{u}$ образуют подгруппу

$$L_0(\mathcal{H}^{\text{ad}}) \subset \mathcal{G}_\nu(C_q, G^{\text{ad}})$$

эквивариантных отображений в $\mathcal{H}^{\text{ad}}$ (см. соотношения (3.18)):

$$L_0(\mathcal{H}^{\text{ad}}) = \left\{ f(t) = t^\gamma h(t) \left| \gamma \in r\tilde{P}^\vee, h(t) = \sum_k h_k t^k, h_k \in \mathcal{H}^{\text{ad}}, \nu(h_k) = \omega^{-k} h_k \right. \right\}. \quad (4.27)$$

Они действуют на элементы $\mathbf{x}$ (4.24) и $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \tilde{q}^{r\gamma} \mathbf{x} = q^\gamma \mathbf{x}, & \tilde{q} &= \mathbf{e}\left(\frac{\tau}{r}\right), & q &= \mathbf{e}(\tau), \\ \mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{u} + \gamma\tau, & \gamma &\in \tilde{P}^\vee. \end{aligned} \quad (4.28)$$

В силу (4.26) и (4.28) решения уравнения (4.20) инвариантны относительно сдвигов

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \gamma_1 + \gamma_2\tau, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \tilde{P}^\vee. \quad (4.29)$$

Получаем, что $\mathbf{u}$ принадлежит фундаментальной области $\mathfrak{h}_0/\widetilde{W}'_{\text{BS}}$, где $\widetilde{W}'_{\text{BS}}$ – группа Бернштейна–Шварцмана [23], порожденная W_0 и сдвигами (4.29),

$$\widetilde{W}'_{\text{BS}} = W_0 \ltimes (\tau\tilde{P}^\vee \oplus \tilde{P}^\vee). \quad (4.30)$$

Предложение доказано. ■

Таким образом, пространство модулей $\text{Bun}_{\nu, \text{Id}}(\mathcal{A}d_G^\nu(C_{\tilde{q}}))$ (4.12) обладает следующими свойствами:

- оно не зависит от ζ ;
- оно изоморфно фундаментальной области группы Бернштейна–Шварцмана (4.30),

$$\text{Bun}_{\nu, \text{Id}}(\mathcal{A}d_G^\nu(C_{\tilde{q}})) \sim \mathfrak{h}_0/\widetilde{W}'_{\text{BS}}(r). \quad (4.31)$$

Можно доказать, что данное факторпространство задается через кривую C_q и инвариантную подрешетку весов $\tilde{P}^\vee$:

$$\mathfrak{h}_0/\widetilde{W}'_{\text{BS}}(r) \sim (C_q \otimes \tilde{P}^\vee)/W_0, \quad q = \mathbf{e}(\tau). \quad (4.32)$$

Чтобы перейти от $\mathcal{A}d_G^\nu(C_{\tilde{q}})$ -расслоений к $\mathcal{A}d_G^g(C_{\tilde{q}})$ -расслоениям, нужно подействовать калибровочным преобразованием $t^{p\kappa}$ (см. формулу (4.9)) на сечения $\Gamma(\mathcal{A}d_G^\nu(C_{\tilde{q}}))$.

4.2. Голоморфное расслоение с недиагонализированными автоморфизмами. Рассмотрим голоморфное расслоение (4.2), (4.3), где $R(t)$ является не элементом подгруппы Картана $\mathcal{H}(G)$, как предполагалось в (4.13) и предложении 4.2, а принадлежит группе Вейля $W(G)$. Более точно, пусть $G = SL(N, \mathbb{C})$ с $N = 2n$, а ν – внешний автоморфизм алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$ (A.1), который приводит к инвариантной подалгебре $sp(n)$. Действие преобразования $R(t)$ порождается автоморфизмом λ расширенной диаграммы Дынкина (A.9) системы корней $\tilde{\Pi}^{\text{ext}}$ алгебры $A_{2n-1}^{(1)}$. Этот автоморфизм действует на корни посредством циклических перестановок $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_0$, и $R(t) = \Lambda = \lambda^n$.

Представим $x \in sl(N, \mathbb{C})$ в виде матрицы размера $2n \times 2n$:

$$x = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \in sl(N, \mathbb{C}). \quad (4.33)$$

Определим действие внешнего автоморфизма ν :

$$\nu(x) = \begin{pmatrix} -\tilde{D} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & -\tilde{A} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = jA^T j, \quad j = \{E_{jk} = \delta_{j, n-k+1}\}. \quad (4.34)$$

Автоморфизм λ действует как сопряжение с помощью оператора Λ ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Отметим, что преобразования ν и λ антикоммутируют,

$$\nu(\Lambda)\Lambda^{-1} = -\text{Id}_N. \quad (4.36)$$

4.2.1. *Специальный базис в $sl(N, \mathbb{C})$.* Поскольку $\nu^2 = \text{Id}$ и $\Lambda^2 = \text{Id}$, а также в силу соотношения (4.36) алгебра Ли $sl(N, \mathbb{C})$ (и, в более общем случае, алгебра $gl(N, \mathbb{C})$) приобретает $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -градуировку, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(a, b)\}$:

$$\text{Ad}_\Lambda x = \pm x, \quad \nu(x) = \pm x,$$

(a, b)	(Λ, ν)
$(0, 0)$	$(+, +)$
$(0, 1)$	$(+, -)$
$(1, 0)$	$(-, +)$
$(1, 1)$	$(-, -)$

(4.37)

Вместо согласованного с ν базиса (A.10), (A.14) в $sl(N, \mathbb{C})$ рассмотрим базис, связанный с градуировкой (4.37) и структурой (4.33). Рассмотрим орбиты в пространстве $gl(N, \mathbb{C})$ -базиса $\{E_{JK}\}$ под действием группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, порожденной ν и Ad_Λ . Пусть $\mathcal{O}_{jk}$ – орбита, проходящая через E_{jk} или $E_{j,n+k}$, $j, k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \{E_{J,K} \mid J, K = 1, \dots, N\} &= \bigcup_{j+k \leq n+1} \mathcal{O}_{jk}, \\ \#(\mathcal{O}_{jk}) &= \begin{cases} 4, & j+k < n+1, \\ 2, & j+k = n+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Введем в $gl(N, \mathbb{C})$ базис $\{T_{(a,b),jk}^\alpha \mid \alpha, a, b = 0, 1, j, k = 1, \dots, n\}$, выраженный через тензорное произведение матриц σ_k , $k = 0, 1, 2, 3$, на матрицы из $gl(n)$. Пусть E_{jk} – базис в $gl(n)$. Тогда базис $T_{(a,b)}^\alpha$ можно определить так. Для $j+k < n+1$ он принимает вид

$$\begin{aligned} T_{(0,a),jk}^0 &= \sigma_0 \otimes (E_{jk} - (-1)^a E_{n-k+1, n-j+1}), \\ T_{(0,a),jk}^1 &= \sigma_1 \otimes (E_{jk} + (-1)^a E_{n-k+1, n-j+1}), \\ T_{(1,a),jk}^0 &= \sigma_3 \otimes (E_{jk} - (-1)^a E_{n-k+1, n-j+1}), \\ T_{(1,a),jk}^1 &= \sigma_2 \otimes (E_{jk} + (-1)^a E_{n-k+1, n-j+1}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Если $j+k = n+1$, то

$$\begin{aligned} T_{(0,0),(j,n-j+1)}^1 &= 2\sigma_1 \otimes E_{j,n-j+1}, & T_{(0,1),(j,n-j+1)}^0 &= 2\sigma_0 \otimes E_{j,n-j+1}, \\ T_{(1,0),(j,n-j+1)}^1 &= 2\sigma_2 \otimes E_{j,n-j+1}, & T_{(1,1),(j,n-j+1)}^0 &= 2\sigma_3 \otimes E_{j,n-j+1}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Удобно выделить диагональные элементы $e_j = E_{jj}$ этого базиса. Для $n = 2l$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(0,a),j} &= T_{(0,a),jj}^0 = \sigma_0 \otimes (e_j - (-1)^a e_{n-j+1}), \\ \mathcal{H}_{(1,a),j} &= T_{(1,a),jj}^0 = \sigma_3 \otimes (e_j - (-1)^a e_{n-j+1}), \end{aligned} \quad 0 \leq j \leq l. \quad (4.41)$$

Для $n = 2l + 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{(0,a),j} &= \mathcal{T}_{(0,a),jj}^0 = \sigma_0 \otimes (e_j - (-1)^a e_{n-j+1} + \delta_{a,1} e_{l+1}), \\ \mathcal{H}_{(1,a),j} &= \mathcal{T}_{(1,a),jj}^0 = \sigma_3 \otimes (e_j - (-1)^a e_{n-j+1} + \delta_{a,0} e_{l+1}), \\ \mathcal{H}_{(0,1),l+1} &= \mathcal{T}_{(0,a),l+1,l+1}^0 = \sigma_0 \otimes e_{l+1}, \\ \mathcal{H}_{(1,0),l+1} &= \mathcal{T}_{(1,a),l+1,l+1}^0 = \sigma_3 \otimes e_{l+1}.\end{aligned}\quad 0 \leq j \leq l, \quad (4.42)$$

Рассмотрим действие автоморфизмов ν и λ на базис. Из формулы (4.34) найдем, что

$$\nu(\mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha) = (-1)^b \mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha, \quad (4.43)$$

а из формулы (4.35) следует, что присоединенное действие Λ принимает вид

$$\text{Ad}_\Lambda(\mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha) = \text{Ad}_{\sigma_1 \otimes \text{Id}_n}(\mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha). \quad (4.44)$$

Поэтому

$$\text{Ad}_\Lambda(\mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha) = (-1)^a \mathcal{T}_{(a,b)}^\alpha. \quad (4.45)$$

Форма Киллинга $\text{tr}(E_{JK}E_{IM}) = \delta_{KI} \delta_{JM}$ в $gl(N, \mathbb{C})$ приводит к следующей норме для генераторов:

$$\langle \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, \mathcal{T}_{(c,d),im}^\beta \rangle = 4\delta^{\alpha\beta} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{ki} \delta_{jm}. \quad (4.46)$$

Далее нам понадобятся коммутационные соотношения между $\mathcal{H}_{(0,0),i}$ и другими генераторами. Для $n = 2l + 1$ и $j \leq k$

$$[\mathcal{H}_{(0,0),i}, \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha] = \begin{cases} (\delta_{ij} - \delta_{ik}) \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, & j, k \leq l, \\ \delta_{ij} \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, & j \leq l, \quad k = l + 1, \\ (\delta_{ij} + \delta_{ik}) \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, & j \leq l, \quad k > l + 1, \\ \delta_{i,n-k+1} \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, & j = l + 1, \quad k \geq l + 1, \\ (\delta_{ij} - \delta_{ik}) \mathcal{T}_{(a,b),jk}^\alpha, & j, k > l + 1. \end{cases} \quad (4.47)$$

При $j \geq k$ правая часть меняет знак. Если $n = 2l$, то вторая и четвертая строчки отсутствуют.

4.2.2. Расслоение $\mathcal{A}_{SL}^{\nu,\Lambda}(C_{\tilde{q}})$. Расслоение $\mathcal{A}_{SL}^{\nu,\Lambda}(C_q)$ определяется операторами переклейки, действующими на его сечения $\Gamma(\mathcal{A}_{SL}^{\nu,\Lambda})$:

$$\Psi(-t) = \nu(\Psi(t)), \quad (4.48)$$

$$\Psi(\tilde{q}t) = \text{Ad}_\Lambda \Psi(t) \quad (4.49)$$

(ср. с (4.2), (4.3)). Эти условия совместны в силу равенства (4.36), которое, в частности, означает, что расслоение $\mathcal{A}_{SL}^{\nu,\Lambda}(C_q)$, введенное по формулам (4.48), (4.49), топологически нетривиально (см. формулу (4.4)).

Заметим, что ν -инвариантная подгруппа группы $SL(N, \mathbb{C})$ является симплектической группой $Sp(n, \mathbb{C})$. Ее подгруппа

$$G_0 = \{f \in Sp(n, \mathbb{C}) \mid \text{Ad}_\Lambda f = f\}$$

сохраняет равенство (4.36). Она играет роль группы постоянных калибровочных преобразований. Рассмотрим диагональные калибровочные преобразования. Пусть $\vec{u} = (u_1, \dots, u_l)$ и $\tilde{\vec{u}} = (u_l, \dots, u_1)$, где $l = [n/2]$. Введем диагональную матрицу $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{00} \subset \text{Lie}(G_0)$, где $\mathcal{H}_{00}$ задана формулами (4.41), (4.42):

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \text{diag}(\vec{u}, -\tilde{\vec{u}}, \vec{u}, -\tilde{\vec{u}}), & n = 2l, \\ \text{diag}(\vec{u}, 0, -\tilde{\vec{u}}, \vec{u}, 0, -\tilde{\vec{u}}), & n = 2l + 1. \end{cases} \quad (4.50)$$

Поскольку $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{00}$, можно заменить (4.49) более общим условием

$$\Psi(\tilde{q}t) = \text{Ad}_{\mathbf{e}(\mathbf{u})\Lambda} \Psi(t), \quad (4.51)$$

которое не разрушает условие совместности (4.36). При этом $\vec{u}$ есть вектор, касательный к пространству модулей расслоения $\text{Bun}(\mathcal{A}d_{SL}^{\nu, \Lambda}(C_{\tilde{q}}))$. Как и ранее, $\vec{u}$ определен с точностью до действия группы Бернштейна–Шварцмана.

Пусть W_0^Λ – Λ -инвариантная подгруппа группы Вейля $W(sp(n, \mathbb{C}))$ и пусть $P_0^\vee$ – Λ -инвариантная решетка ковесов алгебры $sp(n, \mathbb{C})$. Решетка $P_0^\vee$ имеет ранг $l = [n/2]$. Ее генераторы, выраженные через базисные векторы в $\mathfrak{h} \subset sl(N, \mathbb{C})$, имеют вид

$$\varpi_1^\vee = (e_1 - e_n + e_{n+1} - e_{2n}), \dots, \varpi_l^\vee = \sum_{k=1}^l (e_k - e_{n-k+1} + e_{n+k} - e_{2n-k+1}).$$

Введем группу Бернштейна–Шварцмана по формуле

$$W_{\text{BS}}^0(r) = W_0^\Lambda \ltimes (\tau P_0^\vee \oplus P_0^\vee). \quad (4.52)$$

В частности, сдвиги действуют на вектор $\mathbf{u}$ (4.50) как $\mathbf{u} \sim \mathbf{u} + \gamma_1 + \gamma_2 \tau$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in P_0^\vee$.

Таким образом, пространство модулей расслоения $\mathcal{A}d_{SL}^{\nu, \Lambda}(C_{\tilde{q}})$ определяется по формуле

$$\text{Bun}(\mathcal{A}d_{SL}^{\nu, \Lambda}(C_{\tilde{q}})) \sim \mathcal{H}_{00}/W_{\text{BS}}^0. \quad (4.53)$$

Представим сечения расслоения $\mathcal{A}d_{SL}^{\nu, \Lambda}(C_q)$ в виде

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \sum_{\alpha, a, b=0,1} \psi_{a,b}^\alpha(t) + \sum_{a,b=0,1} \xi_{a,b}(t). \\ \psi_{a,b}^\alpha(t) &= \sum_{j,k=1}^l \psi_{(a,b),jk}^\alpha(t) \mathcal{T}_{(ab),jk}^\alpha, \quad \xi_{a,b}(t) = \sum_{j=1}^l \xi_{(a,b),j}(t) \mathcal{H}_{(a,b),j}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Сечение принимает значение в $sl(N, \mathbb{C})$, если

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \xi_{(01),j}(t) &= 0 & \text{для } n = 2l, \\ 2 \sum_{j=1}^l \xi_{(01),j}(t) + \xi_{(01),l+1}(t) &= 0 & \text{для } n = 2l + 1. \end{aligned}$$

Свойства квазипериодичности сечений в этом базисе следуют из соотношений (4.43), (4.45), (4.47):

$$\begin{aligned} \psi_{a,b}^\alpha(-t) &= (-1)^b \psi_{a,b}^\alpha(t), & \psi_{(a,b),jk}^\alpha(\tilde{q}t) &= u_{jk} \psi_{(a,b),jk}^\alpha(t), \\ \xi_{a,b}(-t) &= (-1)^b \xi_{a,b}(t), & \xi_{a,b}(\tilde{q}t) &= (-1)^a \xi_{a,b}(t), \end{aligned} \quad (4.55)$$

где

$$u_{jk} = \begin{cases} u_j - u_k, & j, k \leq l, \\ u_j, & j \leq l, \quad k = l + 1, \\ u_j + u_k, & j \leq l, \quad k > l + 1, \\ u_{n-k+1}, & j = l + 1, \quad k \geq l + 1, \\ u_j - u_k, & j, k > l + 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

4.3. Скрученные векторные расслоения. Для построения векторных расслоений над $C_{\bar{q}}$ с нетривиальными характеристическими классами заменим присоединенное расслоение Ad_G (4.2) векторным расслоением E_G , введенным следующим образом. Рассмотрим (приводимое) представление π алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (A.1) в V . Пусть V_η – неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом $\eta \in P$. Предположим, что диаграммный автоморфизм ν действует так, что $\nu\eta \neq \eta$.

Модуль V является суммой высших модулей,

$$V = \bigoplus_{j=0}^{r-1} V_{\nu^j(\eta)}, \quad \eta \in P. \quad (4.57)$$

Примеры выбора представлений приведены в табл. 1.

Таблица 1. Примеры представлений, соответствующих нетривиальным расслоениям.

$\mathfrak{g}$	η	V_η	$\nu(\eta)$	$V_{\nu(\eta)}$
A_{n-1}	ϖ_1	$\underline{n}$	ϖ_{n-1}	$\bar{\underline{n}}$
D_n	ϖ_n	левые спиноры	ϖ_{n-1}	правые спиноры
E_6	ϖ_1	$\underline{27}$	ϖ_6	$\bar{\underline{27}}$
D_4	ϖ_1	$\underline{8}^V$	$\varpi_3, \nu^2(\eta) = \varpi_4$	$\underline{8}^L, \underline{8}^R$

Определим векторное расслоение $E_{\bar{G}}$ как ассоциированное расслоение:

$$E_{\bar{G}} = \mathcal{E}_{\bar{G}} \times_{\bar{G}} V.$$

Сечения $\psi(t) \in \Gamma(E_{\bar{G}})$ преобразуются следующим образом (ср. с (4.7)):

$$\psi(t\omega) = \nu(\psi(t)), \quad \omega = \mathbf{e}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (4.58)$$

$$\psi(\tilde{q}t) = R(t)\psi(t), \quad R \in \pi(g), \quad g \in \bar{G}. \quad (4.59)$$

Из соотношения (4.58) найдем, что действие автоморфизма ν меняет компоненты в разложении (4.57). Если, например, $\psi(t)$ принимает значение в $V_{\nu^i(\eta)}$, то $\psi(t\omega)$ принимает значение в $V_{\nu^{i+1}(\eta)}$.

Калибровочные преобразования сечений $\Gamma(E_{\bar{G}})$, сохраняющие условие совместности (4.11), имеют тот же вид (4.5), что и раньше. Тогда уравнение (4.11) локально принимает вид (4.14). Ключевым моментом является то, что в противоположность присоединенным расслоениям оператор переклейки R на векторных расслоениях

действует в модулях группы $\bar{G}$. Это означает, в частности, что вес ξ в уравнении (4.14) определен с точностью до $\gamma \in Q$.

Аналогично решетке P^Υ (4.17) введем решетку

$$Q^\Upsilon = \text{im}(\Upsilon), \quad Q^\Upsilon = \{\xi \in Q \mid \xi = \nu(\gamma) - \gamma, \gamma \in Q\}. \quad (4.60)$$

Рассмотрим вес ξ в правой части равенства (4.14). Он является элементом решетки P^Υ (4.17). С другой стороны, поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{e}(\mathbf{u})$ есть элемент подгруппы Картана $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{G}$, элемент $\mathbf{u} \in \mathfrak{h}$ определяется с точностью до элементов из Q . Q -действие на элемент $\mathbf{u}$ в формуле (4.14) означает, что ξ определяется с точностью до элементов из Q^Υ . Другими словами, ξ можно рассматривать как элемент факторгруппы:

$$\xi \in P^\Upsilon / Q^\Upsilon = \mathcal{Z}^\nu(\bar{G}) \subseteq \mathcal{Z}(\bar{G}) \sim P/Q.$$

Условие (4.18) позволяет выразить фактор-решетку в явном виде через базис фундаментальных весов. В приложении C доказано, что она имеет структуру, отраженную в табл. 2. Таким образом, для групп $SL(N, \mathbb{C})$ (где $N = 2n$) и Spin_{2n+2} группа $\mathcal{Z}^\nu(\bar{G})$ не совпадает с $\mathcal{Z}(\bar{G})$.

ТАБЛИЦА 2. Группа $\mathcal{Z}^\nu(\bar{G})$.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathcal{Z}^\nu(\bar{G}) = P^\Upsilon / Q^\Upsilon$	$\mathcal{Z}(\bar{G}) = P/Q$	Веса, порождающие $\mathcal{Z}^\nu(\bar{G})$
A_{2n-1}	C_n	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_{2n}$	ϖ_1
A_{2n}	B_n	$\mathbb{Z}_{2n+1}$	$\mathbb{Z}_{2n+1}$	ϖ_1
D_{n+1}	B_n	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	ϖ_n
D_4	G_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	ϖ_1, ϖ_3
E_6	F_4	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	ϖ_1

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Группа $\mathcal{Z}^\nu(\bar{G})$ не совпадает с центром $\mathcal{Z}(\bar{G}_0)$. Например, в первой строке табл. 2 $C_n \rightarrow \bar{G}_0 = Sp_n$, $\mathcal{Z}(Sp_n) = \mathbb{Z}_2$, тогда как $\mathcal{Z}^\nu(SL_{2n}) = \mathbb{Z}_n$.

Рассмотрим теперь преобразования элемента $\mathbf{u}$, сохраняющие равенство (4.14). Элементы $e^{2\pi i \gamma}$ при $\gamma \in \tilde{Q}^\vee$ являются единичными элементами в $\bar{G}_0$. Поэтому $\mathbf{u}$ в (4.24) есть элемент факторпространства:

$$\text{Re } \mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0^\mathbb{R} / \tilde{Q}^\vee, \quad \mathbf{u} + \gamma \sim \mathbf{u} \quad \text{для} \quad \gamma \in \tilde{Q}^\vee. \quad (4.61)$$

Таким образом, $\text{Re } \mathbf{u}$ можно выбрать из фундаментальной области в $\mathfrak{h}_0^\mathbb{R}$ действия аффинной группы Вейля $\bar{W}_{\text{aff}} = W_0 \ltimes \tilde{Q}^\vee$ (A.36).

Остаточные калибровочные преобразования элемента $\mathbf{u}$ представляют собой подгруппу $L_0(\bar{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{G}_\nu(C_q, \bar{G})$ (4.6) эквивариантных отображений в $\bar{\mathcal{H}}$ (см. соотношения (3.17) и (3.18)):

$$L_0(\bar{\mathcal{H}}) = \left\{ f(t) = t^\gamma h(t) \mid \gamma \in r\tilde{Q}^\vee, h(t) = \sum_k h_k t^k, h_k \in \bar{\mathcal{H}}, \nu(h_k) = \omega^{-k} h_k \right\}.$$

Аналогично (4.25) пространством модулей $E_{\bar{G}}$ -расслоения является множество пар $(\mathbf{u} \in \mathfrak{h}_0, \xi \in P)$, удовлетворяющих условию (4.14) и инвариантных по отношению к действию преобразований

$$\mathcal{P}_{E_{\bar{G}}} : \begin{aligned} \mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{u} + \gamma_1 + \gamma_2 \tau, & \gamma_1, \gamma_2 &\in \tilde{Q}^\vee, \\ \xi &\rightarrow \xi + \gamma_3, & \gamma_3 &\in Q^\vee. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Определим группу Бернштейна–Шварцмана, соответствующую решетке $\tilde{Q}^\vee$:

$$\widetilde{W}_{\text{BS}} = W_0 \ltimes (\tau \tilde{Q}^\vee \oplus \tilde{Q}^\vee). \quad (4.63)$$

Таким образом, пространство модулей можно отождествить с фундаментальной областью группы Бернштейна–Шварцмана $\widetilde{W}_{\text{BS}}$ при фиксированном $\zeta = \mathbf{e}(\xi) \in \mathcal{Z}^\nu(\bar{G})$:

$$\text{Bun}_{\sigma, \zeta}(E_{\bar{G}}(C_{\bar{q}})) \sim \mathfrak{h}_0 / \widetilde{W}_{\text{BS}}(r). \quad (4.64)$$

В результате общее решение уравнения (4.14) имеет вид

$$\mathbf{u} + \varpi_j, \quad \mathbf{u} \in \text{Bun}_{\sigma, \zeta}(E_{\bar{G}}(C_q)), \quad (4.65)$$

где ϖ_j – фундаментальный вес алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий уравнению

$$\nu(\varpi_j) - \varpi_j = \xi. \quad (4.66)$$

Решения этого уравнения приведены в пятом столбце табл. 2 (см. также приложение С). Элемент ξ определяет характеристический класс $E_{\bar{G}}$ -расслоения. Заметим, что пространство модулей не зависит от характеристического класса ζ .

Как и ранее, для перехода к общему автоморфизму $\sigma_{\tau, s} = \nu \mathbf{e}(\kappa)$, заданному формулами (3.5), (3.7), применим калибровочное преобразование $f = t^{p\kappa}$, где κ определена в (4.9).

5. РАССЛОЕНИЯ ХИГГСА

Расслоением Хиггса $\mathcal{H}(G, \Sigma_g)$ над римановой поверхностью Σ_g называется пара $(E_{\bar{G}}, \Phi)$, где $E_{\bar{G}} = \mathcal{E} \times_G V$ – голоморфное векторное G -расслоение, связанное с главным расслоением $\mathcal{E}$, а Φ – поле Хиггса. Это голоморфная 1-форма на Σ_g , принимающая значения в $\text{End } E_{\bar{G}}$. Расслоение Хиггса можно наделять симплектической формой. Группу автоморфизмов соответствующего векторного расслоения можно поднять на поле Хиггса так, что она будет действовать как симплектоморфизм расслоения Хиггса.

Далее мы описываем расслоения Хиггса, связанные с построенными выше тремя типами Ad_G , $Ad_{SL}^{\nu, \Lambda}$ и $E_{\bar{G}}$ голоморфных G -расслоений над эллиптическими кривыми.

5.1. Расслоения Хиггса, связанные с расслоениями Ad_G и $E_{\bar{G}}$. Расслоение Хиггса $\mathcal{H}(G, C_{\bar{q}})$ описывается парой $(R(t), \Phi(t))$, где $R(t)$ – оператор переклейки (4.3), а Φ – голоморфная 1-форма в окрестности $\mathcal{V}$ контура $\gamma_1 = \{|t| = |\bar{q}^{1/2}|\}$, принимающая значения в эндоморфизме расслоений:

$$\Phi = \Phi(t) \frac{dt}{t} \in \Omega^{(1,0)}(\mathcal{V}, \text{End}(\mathfrak{g})).$$

На $\mathcal{H}(G, C_{\bar{q}})$ существует хорошо определенная симплектическая форма

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \langle (D(R^{-1}(t)\Phi(t)) \wedge DR(t)) \rangle. \quad (5.1)$$

Предположим, что $\Phi(t) \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \nu)$ есть эквивариантное отображение, где $\mathcal{L}_0(\mathfrak{g}, t, \nu)$ задано в (3.9):

$$\nu(\Phi(t)) = \Phi(t\omega), \quad \omega = e^{2\pi i/r}. \quad (5.2)$$

Форма (5.1) инвариантна по отношению к $\mathcal{G}_\nu(G)$ -действию (4.5) и

$$\Phi(t) \rightarrow f(\tilde{q}t)\Phi(t)f^{-1}(\tilde{q}t). \quad (5.3)$$

Это симплектическое действие приводит к отображению моментов

$$\mu : \mathcal{H}(G, C_{\bar{q}}) \rightarrow \text{Lie}^*(\mathcal{G}_\sigma(G)),$$

которое задается функционалом

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \langle \Phi(t)\mathfrak{r}(\tilde{q}t) \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \langle R^{-1}(t)\Phi(t)R(t)\mathfrak{r}(t) \rangle, \quad \mathfrak{r}(t) \in \text{Lie}(\mathcal{G}_\sigma(G)).$$

Как и в работе [10], условие нулевого отображения момента означает возможность голоморфно продолжить Φ от границы ($\gamma_1 = \{|t| = |\tilde{q}|^{1/2}\}$, $\gamma_2 = \{|t| = |\tilde{q}|^{-1/2}\}$) внутрь кольца, при этом Φ имеет не более одного полюса (в точке $t = 1$) и на границе γ_1 удовлетворяет равенству

$$\Phi(\tilde{q}^{-1}t) = R^{-1}(t)\Phi(t)R(t). \quad (5.4)$$

Поскольку калибровочная группа сохраняет флаг в $t = 1$, из (5.3) получаем, что поле Хиггса $\Phi(t)$ имеет полюс в $t = 1$:

$$\text{Res } \Phi(t)|_{t=1} = \mathbf{S}, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{S}$ – элемент коприсоединенной G -орбиты, прикрепленной к точке $t = 1$. Подробности можно найти в работах [10], [32].

Действуя калибровочными преобразованиями (4.24) на $R(t)$, $R(t) \xrightarrow{f(t)} \mathbf{e}(\mathbf{u})$, мы в то же время преобразуем поле Хиггса: $\Phi(t) \xrightarrow{f(t)} L(t)$. Преобразованное поле Хиггса $L(t)$ играет роль оператора Лакса. В этих терминах уравнение (5.4) принимает вид

$$L(\tilde{q}^{-1}t) = \mathbf{e}(-\mathbf{u})L(t)\mathbf{e}(\mathbf{u}). \quad (5.6)$$

Решения $L = L(\mathbf{S}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$ этого уравнения и уравнения (5.5) зависят от дополнительного параметра $\mathbf{v} \in \mathfrak{h}_0^*$.

Редуцированное фазовое пространство может рассматриваться как пространство $T^*\text{Vin}_\zeta(C_{\bar{q}}, G)$, кокасательное к пространству модулей голоморфных расслоений с квазипараболической структурой при $t = 1$. Набор $(\mathbf{S}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ играет роль локальных координат в $T^*\text{Vin}_\zeta(C_{\bar{q}}, G)$. Здесь $\mathbf{S}$ – элемент симплектического факторпространства, полученного из коприсоединенной орбиты подгруппы G_0 в результате

действия подгруппы Картана. Мы вернемся к этому вопросу ниже. Координаты $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ являются каноническими,

$$\{v_j, u_k\} = \delta_{jk}, \quad (5.7)$$

и (см. соотношение (4.64))

$$\mathbf{u} \in \begin{cases} \text{Bun}_{\sigma,1}(\mathcal{A}d_G(C_{\bar{q}})) \sim \mathfrak{h}_0/\widetilde{W}_{\text{BS}}^{\text{ad}}, \\ \text{Bun}_{\sigma,\zeta}(E_{\bar{G}}(C_{\bar{q}})) \sim \mathfrak{h}_0/\widetilde{W}_{\text{BS}}^{\text{sc}}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Подводя итог, определим оператор Лакса с помощью следующих условий, полученных из (5.2) и (5.4):

$$\nu(L(t)) = L(t\omega^{-1}), \quad L(\tilde{q}^{-1}t) = \text{Ad}_{\mathbf{e}(\mathbf{u})} L(t), \quad \text{Res } L(t) = \mathbf{S}. \quad (5.9)$$

Здесь сохранено то же обозначение $\mathbf{S}$ для вычета оператора Лакса.

Рассмотрим первое из условий (5.9). Из разложения (A.2) имеем

$$L(t) = \sum_{m=0}^{r-1} L_m(t), \quad r = 2, 3, \quad (5.10)$$

$$L_m \in \mathfrak{g}_m \longleftrightarrow \nu(L_m) = \omega^m L_m, \quad L_m(t\omega) = \omega^{-m} L_m(t). \quad (5.11)$$

Чтобы ввести оператор Лакса, удовлетворяющий первому и второму из условий (5.9), используем корневой базис (A.12), (A.13). В корневом базисе

$$L_0(t) = L_{0|\mathfrak{h}}(t)\mathfrak{h}_0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} L_{0,\tilde{\alpha}}(t), \quad L_m(t) = L_{m|\mathfrak{h}}(t)\mathfrak{h}_m + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} L_{m,\tilde{\alpha}}(t).$$

Разложим вычет $\mathbf{S}$ оператора L из третьего условия в (5.9) по базису (A.16):

$$\mathbf{S} = \sum_{m=0}^{r-1} S_m, \quad S_0 = \sum_{k=1}^n S_0^k \mathfrak{e}_k^m + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} S_{\tilde{\alpha}} E_{\tilde{\alpha}}, \quad S_m = \sum_{k=1}^n S_m^k \mathfrak{e}_k^m + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} S_m^{\tilde{\alpha}} \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m.$$

Удобно представить картановскую часть S_0 в кокорневом базисе (A.27):

$$S_0^{\mathfrak{h}} = \sum_{k=1}^n S_0^k \mathfrak{e}_k^0 = \sum_{\tilde{\alpha} \in \Pi} S_0^{\tilde{\alpha}} H_{\tilde{\alpha}}. \quad (5.12)$$

Инвариантную компоненту оператора Лакса выразим через функции $g(s, t^r | q)$ (B.1) и $E_1(t^r | q)$ (B.11) как

$$L_0(t) = \sum_{k=1}^n (v_k + S_0^k E_1(t^r | q)) \mathfrak{e}_k^0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} S_{\tilde{\alpha}} g(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u}), t^r | q) E_{\tilde{\alpha}}, \quad s_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{u}) = e^{2\pi i \mathbf{u}_{\tilde{\alpha}}}. \quad (5.13)$$

Она удовлетворяет условиям (5.9) в силу соотношений (B.7), (B.10) и (B.3). Картановскую часть $L_0^{\mathfrak{h}}(t)$ перепишем в простом кокорневом базисе (см. формулу (5.12)):

$$L_0^{\mathfrak{h}}(t) = \sum_{k=1}^n (v_k + S_0^k E_1(t^r | q)) \mathfrak{e}_k^0 = \sum_{k=1}^n v_k \mathfrak{e}_k^0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Pi}} S_0^{\tilde{\alpha}} E_1(t^r | q) H_{\tilde{\alpha}}. \quad (5.14)$$

Члены $S_0^k E_1(t|q)\mathfrak{e}_k^0$ в (5.13) противоречат теореме о вычетах и в силу (B.12) разрушают симметрию, заданную вторым равенством в (5.9). Это противоречие объясняется наличием остаточной калибровочной симметрии. Действительно, эти члены исчезают после применения симплектической редукции по отношению к действию инвариантной подгруппы Картана $\mathcal{H}_0$. Условия $S_0^k = 0$ играют роль уравнений моментов (подробности см. в работе [8]). При вычислении гамильтонианов мы пренебрегаем этими членами. Описанная ниже r -матрица определяет скобки Пуассона до остаточной редукции, поэтому она содержит соответствующий аномальный член (см. равенство (6.3) ниже). Отметим, что L_0 – стандартный оператор Лакса для спиновой системы КМ, связанной с инвариантной подалгеброй $\mathfrak{g}_0$.

Другие компоненты оператора Лакса имеют следующий вид. Введем r функций

$$\begin{aligned} g^{(m)}(s, t|q) &= t^m g(sq^{m/r}, t^r|q), \quad m = 0, \dots, r-1, \\ g^{(m)}(s, t|q) &= \mathbf{e}\left(\frac{mz}{r}\right) \phi\left(u + \frac{m\tau}{r}, z \middle| \tau\right), \quad t = \mathbf{e}\left(\frac{z}{r}\right), \quad s = \mathbf{e}(u), \quad q = \tilde{q}^r. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Они являются квазипериодическими,

$$g^{(m)}(s, t\omega|q) = \omega^m g^{(m)}(s, t|q), \quad (5.16)$$

$$s\tilde{q}^m g^{(m)}(s, t\tilde{q}|q) - g^{(m)}(s, t|q) = \delta(t, 1) - 1. \quad (5.17)$$

По аналогии с формулами (B.3) имеем

$$\text{Res } g^{(m)}(s, t|q)|_{s=1} = 1, \quad \text{Res } g^{(m)}(s, t|q)|_{t=1} = 1. \quad (5.18)$$

Другие компоненты операторов Лакса можно выразить через эти функции следующим образом:

$$L_m(t) = \sum_{k=1}^n S_m^k g^{(-m)}(1, t^r|q)\mathfrak{e}_k^m + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} S_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\alpha}} g^{(-m)}(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u}), t^r|q)\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m. \quad (5.19)$$

В силу соотношений (5.16) и (5.17) эти компоненты имеют соответствующие свойства квазипериодичности (5.11).

Для $E_{\tilde{G}}$ -расслоений нужно заменить $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u} + \varpi_j$, где ϖ_j – решения уравнения (4.66), взятые из табл. 2. Тогда из выражений (5.13) и (5.19) получим

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \sum_{k=1}^n (v_k + S_0^k E_1(t^r|q))\mathfrak{e}_k^0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} S_{\tilde{\alpha}} g(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), t^r|q)E_{\tilde{\alpha}}, \\ L_m(t) &= \sum_{k=1}^n S_m^k g^{(-m)}(1, t^r|q)\mathfrak{e}_k^m + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} S_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\alpha}} g^{(-m)}(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), t^r|q)\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m. \end{aligned} \quad (5.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Аналогичным образом можно рассмотреть мероморфные поля Хиггса на $C_{\tilde{q}}$ с $n > 1$ простыми полюсами. В результате вместо твистованной эллиптической системы КМ, которая будет построена ниже, мы получим твистованную систему Годена. Квантовыми неавтономными аналогами последней системы являются уравнения КЗБ, рассмотренные в разделе 6.

5.2. Гамильтонианы. Квадратичный гамильтониан H можно найти из разложения $\text{tr } L^2(t)$. Это двоякопериодическая функция на $C_{\tilde{q}}$ с полюсом не выше второго порядка. Поэтому

$$\frac{1}{2} \text{tr } L^2(t) = H + E_2(t)C_2, \quad (5.21)$$

где C – вторая функция Казимира, соответствующая коприсоединенной G -орбите,

$$C_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{r-1} (\mathbf{S}, \mathbf{S}).$$

Для расчета гамильтониана используем соотношения (A.17), (A.26):

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{r-1} \text{tr}(L_m(t)L_{r-m}(t)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_0(t)L_0(t)) + \frac{1}{2}(L_1(t)L_1(t)), & r = 2, \\ \frac{1}{2}(L_0(t)L_0(t)) + (L_1(t)L_2(t)), & r = 3. \end{cases} \quad (5.22)$$

Тогда из тождества (B.14) следует, что

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{r-1} (L_m(t)L_{r-m}(t)) = E_2(t)C_2(\mathbf{S}) + H(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S})$$

и

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S}) = H_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S}) + H'(\mathbf{u}, \mathbf{S}), \quad (5.23)$$

где

$$H_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S}) = \text{const. part} \cdot \frac{1}{2}(L_0(t), L_0(t)),$$

$$H'(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \begin{cases} \text{const. part} \cdot \frac{1}{2}(L_1(t)L_1(t)), & r = 2, \\ \text{const. part} \cdot \frac{1}{2}(L_1(t)L_2(t)), & r = 3 \end{cases}$$

(здесь const. part – не зависящая от t часть гамильтониана). В явном виде

$$H_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k^2 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} S_0^{\tilde{\alpha}} S_0^{-\tilde{\alpha}} E_2(\mathbf{u}_{\tilde{\alpha}}),$$

$$H'(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \sum_{m \neq 0} \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k^m S_k^{r-m} E_2\left(\frac{m\tau}{r}\right) + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} S_m^{\tilde{\alpha}} S_{r-m}^{-\tilde{\alpha}} E_2\left(\mathbf{u}_{\tilde{\alpha}} - \frac{m\tau}{r}\right) \right).$$

Для $E_{\tilde{G}}$ -расслоений имеем

$$H_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k^2 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} S_0^{\tilde{\alpha}} S_0^{-\tilde{\alpha}} E_2(\mathbf{u}_{\tilde{\alpha}} + \varpi_{j \tilde{\alpha}}),$$

$$H'(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \sum_{m \neq 0} \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k^m S_k^{r-m} E_2\left(\frac{m\tau}{r}\right) + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} S_m^{\tilde{\alpha}} S_{r-m}^{-\tilde{\alpha}} E_2\left(\mathbf{u}_{\tilde{\alpha}} + \varpi_{j \tilde{\alpha}} - \frac{m\tau}{r}\right) \right).$$

5.3. Система КМ, соответствующая расслоению $Ad_{SL}^{\nu, \Lambda}(C_q)$. Фиксируем оператор Лакса условиями, аналогичными условиям (5.9):

$$\nu(L(t)) = L(-t), \quad L(q^{-1}t) = \text{Ad}_{\mathbf{e}(\mathbf{u})\Lambda} L(t), \quad \text{Res}_{t=1} L(t) = \mathbf{S}.$$

В данном случае вычет $\mathbf{S}$ разлагается по базису (4.39)–(4.42) как

$$\mathbf{S} = \sum_{a,b=0,1} \left(\sum_{j,k=1}^l \sum_{\alpha=0,1} S_{(a,b),jk}^{\alpha} \mathcal{T}_{(ab),jk}^{\alpha} + \sum_{j=1}^l S_{(a,b),j} \mathcal{H}_{(a,b),j} \right). \quad (5.24)$$

В соответствии с (4.54) разложим $L(t)$ следующим образом:

$$L(t) = \sum_{\alpha,a,b=0,1} L_{(a,b)}^{\alpha}(t) + \sum_{a,b=0,1} L_{(a,b)}^{\text{diag}}(t).$$

Рассмотрим диагональную часть оператора Лакса. Если $a = b = 0$, то

$$L_{(0,0)}^{\text{diag}}(t) = \sum_{j=1}^l (v_j + S_{(0,0),j} E_1(t^2|q)) \mathcal{H}_{(0,0),j},$$

в противном случае

$$L_{(a,b)}^{\text{diag}}(t) = \sum_{j=1}^l S_{(0,0),j} t^b g\left(\tilde{q}^b \mathbf{e}\left(\frac{a}{2}\right), t^2 \middle| q\right) \mathcal{H}_{(a,b),j}.$$

Недиагональная часть имеет вид

$$L_{(a,b)}^{\alpha}(t) = \sum_{j,k=1}^l L_{(a,b),jk}^{\alpha}(t) \mathcal{T}_{(ab),jk}^{\alpha},$$

ее элементы удовлетворяют условиям квазипериодичности

$$L_{(a,b),jk}^{\alpha}(-t) = (-1)^b L_{(a,b),jk}^{\alpha}(t), \quad L_{(a,b),jk}^{\alpha}(\tilde{q}t) = (-1)^a \mathbf{e}(u_{jk}) L_{(a,b),jk}^{\alpha}(t).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} L_{(a,b)jk}(t) &= S_{(a,b)jk}^{\alpha} t^b g\left(\mathbf{e}\left(-u_{jk} + \frac{a}{2}\right) \tilde{q}^b, t^2 \middle| q^2\right) = \\ &= S_{(a,b)jk}^{\alpha} \mathbf{e}\left(\frac{bz}{2}\right) \phi\left(-u_{jk} + \frac{a+b\tau}{2}, z \middle| \tau\right). \end{aligned}$$

Гамильтониан найдем из разложения (5.21), используя форму Киллинга (4.46) и тождество Фея (B.14). Как и ранее, предположим, что $S_{(0,0),j} = 0$ для $j = 1, \dots, l$.

Тогда гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{8} \text{const. part} \cdot \text{tr } L^2(t) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l v_j^2 + \sum_{a+b>0} \sum_{j=1}^l S_{(0,0),j}^2 E_2 \left(\frac{a+b\tau}{2} \middle| \tau \right) + \\
 &+ \sum_{\alpha, a, b} \left\{ \sum_{\substack{j \neq k, \\ j \neq n-k+1}}^l (S_{(a,b)jk}^\alpha)^2 E_2 \left(u_j \pm u_k + \frac{a+b\tau}{2} \middle| \tau \right) + \right. \\
 &\left. + \sum_{j=1}^l (S_{(a,b)j}^\alpha)^2 E_2 \left(u_j + \frac{a+b\tau}{2} \middle| \tau \right) + \sum_{j=1}^l (S_{(a,b)j}^\alpha)^2 E_2 \left(2u_j + \frac{a+b\tau}{2} \middle| \tau \right) \right\}. \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

6. КЛАССИЧЕСКИЕ r -МАТРИЦЫ И УРАВНЕНИЯ КЗБ

6.1. r -Матрица. Классическая r -матрица – это отображение $C_q \times C_q \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, удовлетворяющее классическому динамическому уравнению Янга–Бакстера (см. далее). Более точно, она представляет собой сечение $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ -расслоения над пространством модулей $\text{Bun}_{\sigma, \zeta}(\text{Ad}_G(C_q))$ (4.31) или над пространством $\text{Bun}_{\sigma, \zeta}(E_{\bar{G}}(C_{\bar{q}}))$ (4.64); это сечение определяется свойствами коэффициентов $g^{(-m)}(m/r, t^r|q)$ (5.16) и (5.18). Классическую r -матрицу можно ввести с помощью оператора Лакса:

$$r(t) = \frac{\partial L_1(t)}{\partial S_2}. \quad (6.1)$$

Начав с оператора Лакса, соответствующего нетривиальным характеристическим классам (5.20), мы приходим к r -матрице

$$r(\mathbf{u}, t) = \sum_{m=0}^{r-1} r_m(t), \quad r_m(t\omega, s) = \omega^{-m} r_m(t) \quad (6.2)$$

(здесь $r = 2, 3$). В выражении (6.2)

$$r_0(\mathbf{u}, t) = \sum_{k=1}^n E_1(t^r|q) \mathfrak{e}_k^0 \otimes \mathfrak{e}_k^0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} |\tilde{\alpha}|^2 g(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), t^r|q) E_{\tilde{\alpha}} \otimes E_{\tilde{\alpha}}, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 r_m(\mathbf{u}, t) &= \sum_{k=1}^n g^{(-m)}(1, t^r|q) \mathfrak{e}_k^m \otimes \mathfrak{e}_k^{r-m} + \\
 &+ \frac{1}{r} \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} |\tilde{\alpha}|^2 g^{(-m)}(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), t^r|q) \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m \otimes \mathfrak{t}_{-\tilde{\alpha}}^{r-m}, \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

где $E_{\tilde{\alpha}}$ определяется формулой (A.13), а функция $g^{(-m)}(m/r, t^r|q)$ – формулой (5.15).

По аналогии с работой [9] можно доказать, что $r(t)$ удовлетворяет классическому динамическому уравнению Янга–Бакстера

$$\begin{aligned} & [r_{12}(t_1, t_2), r_{13}(t_1, t_3)] + [r_{12}(t_1, t_2), r_{23}(t_2, t_3)] + [r_{13}(t_1, t_3), r_{23}(t_2, t_3)] - \\ & - \sqrt{r} \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} \frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2} \{ \mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}^m \otimes \mathbf{t}_{-\tilde{\alpha}}^{r-m} \otimes \mathbf{e}_{\alpha}^0 \partial_{\tilde{\alpha}(\mathbf{u})} g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), \frac{t_1^r}{t_2^r} \middle| q \right) - \\ & - \mathbf{t}_{\alpha}^m \otimes \mathbf{e}_{\alpha}^0 \otimes \mathbf{t}_{-\alpha}^{r-m} \partial_{\mathbf{u}} g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), \frac{t_1^r}{t_3^r} \middle| q \right) + \\ & + \mathbf{e}_{\alpha}^0 \otimes \mathbf{t}_{\alpha}^m \otimes \mathbf{t}_{-\alpha}^{r-m} \partial_{\mathbf{u}} g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), \frac{t_2^r}{t_3^r} \middle| q \right) \} = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из (B.7) и (B.12) следует, что r -матрица играет роль функции Грина $G(t/t_1)$ уравнения (4.23). Кроме того, r -матрица, заданная соотношениями (6.2)–(6.4), и оператор Лакса (5.20) определяют скобку Пуассона (5.7) с помощью RLL -уравнения:

$$\begin{aligned} \{L(t_1) \otimes 1, 1 \otimes L(t_2)\} &= \left[L(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes L(t_2), r \left(\frac{t_1}{t_2} \right) \right] - \\ &- \frac{\sqrt{r}}{2} \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} |\tilde{\alpha}|^2 \partial_{\mathbf{u}} g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u}), \frac{t_1^r}{t_2^r} \middle| q \right) (S^{\mathfrak{h}})_0^{\tilde{\alpha}} \mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}^m \otimes \mathbf{t}_{-\tilde{\alpha}}^{r-m}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Последний аномальный член исчезает после применения уравнения моментов $(S^{\mathfrak{h}})_0^{\tilde{\alpha}} = 0$.

6.2. Уравнения КЗБ. Пусть $\mathfrak{M}_l$ – пространство модулей комплексных структур эллиптической кривой с l отмеченными точками $t_1, \dots, t_l$. Открытая клетка в $\mathfrak{M}_l$ описывается координатами $q = \mathbf{e}(\tau), t_1, \dots, t_l$, где $\prod t_j = 1$. Уравнения КЗБ определяют плоскую связность в расслоении конформных блоков в теории ВЗВ на C_q над $\mathfrak{M}_l$ [18], [19], [33]. В нашем случае переменные теории ВЗВ задаются квазипериодическими условиями (4.2), (4.3). Поступая, как в работе [21], приходим к следующему описанию уравнений КЗБ.

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$\nabla_a = t_a \partial_{t_a} + \hat{\partial}^a + \sum_{c \neq a} r^{ac}, \quad \nabla_{\tau} = 2\pi i \partial_{\tau} + \Delta + \frac{1}{2} \sum_{b,d} f^{bd}. \quad (6.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r^{ac} &= \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} |\alpha|^2 g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), \frac{t_a^r}{t_c^r} \right) \mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}^{m,a} \otimes \mathbf{t}_{-\tilde{\alpha}}^{-m,c} + \\ &+ \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{k=1}^n g^{(-m)} \left(1, \frac{t_a^r}{t_c^r} \right) \mathbf{e}_k^{m,a} \otimes \mathbf{e}_k^{-m,c}, \\ f^{ac} &= \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} |\alpha|^2 \partial_{\tilde{\alpha}(\mathbf{u})} g^{(-m)} \left(s_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\mathbf{u} + \varpi_j), \frac{t_a^r}{t_c^r} \right) \mathbf{t}_{\tilde{\alpha}}^{m,a} \otimes \mathbf{t}_{-\tilde{\alpha}}^{-m,c} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{r-1} g^{(-m)} \left(1, \frac{t_a^r}{t_c^r} \right) \mathbf{e}_k^{m,a} \otimes \mathbf{e}_k^{-m,c} + \frac{1}{2} \left(E_1^2 \left(\frac{t_a^r}{t_c^r} \right) - \wp \left(\frac{t_a^r}{t_c^r} \right) \right) \mathbf{e}_k^{0,a} \otimes \mathbf{e}_k^{0,c}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{t}_\alpha^{k,a} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \mathbf{t}_\alpha^k \otimes 1 \cdots \otimes 1$ (множитель $\mathbf{t}_\alpha^k$ стоит на a -м месте) и аналогично для генераторов $\mathbf{e}_k^{m,a}$ (для краткости мы пишем $\mathbf{t}_\alpha^{k,a}$ и $\mathbf{e}_k^{m,a}$ вместо представления этих генераторов в пространстве V_{μ_a}), $g^{(0)}(1, t_a^r/t_c^r) = E_1(t_a^r/t_c^r)$, а функция Вейерштасса $\wp$ определяется в (B.13). В (6.7) использованы укороченные обозначения

$$\hat{\partial}^a = r \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Pi}} \mathbf{e}_{\tilde{\alpha}} \partial_{\tilde{\alpha}}, \quad \Delta = \frac{r}{2} \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Pi}} \partial_{u_{\tilde{\alpha}}}^2.$$

Как и в работе [21], можно доказать, что связность (6.7) является плоской.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Внешний автоморфизм простых алгебр

В этом разделе мы используем результаты из работ [27]–[29].

Пусть R – система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга l , $W(R)$ – группа Вейля. Пусть также $\text{Aut}(R) \supseteq W(R)$ – группа автоморфизмов системы R . Группа $\text{Out}(\mathfrak{g}) = \{\nu\}$ изоморфна факторгруппе $\text{Aut}(\Pi) \sim \text{Aut}(R)/W(R)$ (см. соотношение (3.1)). Эта группа нетривиальна для алгебры с однократными связями:

$$\begin{aligned} R = A_l, D_l, E_6, & \quad \text{Aut}(R)/W(R) \sim \mathbb{Z}_2, \\ R = D_4, & \quad \text{Aut}(R)/W(R) \sim \mathbb{Z}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Внешний автоморфизм обуславливает разложение алгебры $\mathfrak{g}$ на собственные пространства:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m=0}^{r-1} \mathfrak{g}_m, \quad \nu(\mathfrak{g}_m) = \omega^m \mathfrak{g}_m, \quad \omega = e^{2\pi i/r}, \quad (\text{A.2})$$

где $r = 2$ или $r = 3$ в случае D_4 . Подпространство $\mathfrak{g}_0$ есть инвариантная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{g}_j$ – неприводимые модули подалгебры $\mathfrak{g}_0$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, E_α – корневые подпространства и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R} \mathbb{C} E_\alpha$$

есть разложение по корням алгебры $\mathfrak{g}$. Действие группы $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$ (3.1) сохраняет это разложение. Теперь определим действие ν на R как $\nu \rightarrow \bar{\nu}\alpha$, $\bar{\nu} \in \text{Aut}(\Pi)^{(1)}$:

$$\nu E_\alpha = E_{\bar{\nu}\alpha}, \quad \alpha \in R = R^\vee. \quad (\text{A.3})$$

Представим подалгебру Картана в виде $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$. Пусть

$$\Pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_l), \quad l = \text{rank } \mathfrak{g}, \quad (\text{A.4})$$

есть система простых корней, порождающая R . Определим камеру Вейля в $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ как

$$C^+ = \{x \in \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \mid \langle x, \alpha \rangle > 0 \text{ для } \alpha \in \Pi\}. \quad (\text{A.5})$$

¹⁾Поскольку алгебры обладают однократными связями, системы их корней и весов совпадают с системами кокорней и ковесов. Подалгебры, инвариантные относительно внешнего автоморфизма, не обладают однократными связями, и для них эти системы различны.

Введем инвариантный базис в однородной компоненте $\mathfrak{g}_m$ алгебры $\mathfrak{g}$. Под действием $\bar{\nu}$ множество корней R расщепляется на орбиты длины 1 (инвариантное подмножество), орбиты O_2 длины 2 и орбиты O_3 длины 3 (для D_4). Для всех алгебр $\mathfrak{g}$ с нетривиальным внешним автоморфизмом, за исключением алгебры $sl(2n+1)$ (алгебры A_{2n}), введем два подмножества корней

$$\begin{aligned} R_\ell &= \{\tilde{\alpha} = \alpha \in R \mid \bar{\nu}(\alpha) = \alpha\}, \\ R_s &= \left\{ \tilde{\alpha} = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{r-1} \bar{\nu}^m(\alpha) \mid \alpha \in R, \bar{\nu}(\alpha) \neq \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Подмножество $\tilde{R} = R_\ell \cup R_s$ есть набор корней инвариантной подалгебры $\mathfrak{g}_0$ по отношению к подалгебре Картана $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$. Система простых корней инвариантной алгебры $\mathfrak{g}_0$

$$\tilde{\Pi} = \{\tilde{\alpha}_j \mid j = 1, \dots, n\} \quad (\text{A.7})$$

является базисом в $\tilde{R}$.

Пусть $\tilde{\alpha}_0$ – старший вес модуля $\mathfrak{g}_1$. Он разлагается по корневому базису следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_0 = \sum_{j=1}^n a_j \tilde{\alpha}_j, \quad n = \text{rank } \mathfrak{g}_0. \quad (\text{A.8})$$

Расширенная система корней

$$\tilde{\Pi}^{\text{ext}} = \tilde{\Pi} \cup \{-\tilde{\alpha}_0\} \quad (\text{A.9})$$

определяет твистованную аффинную диаграмму Дынкина.

Пусть

$$\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m = \sum_{j=0}^{r-1} \omega^{jm} E_{\bar{\nu}^j \alpha}, \quad \nu(\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m) = \omega^m \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m, \quad \tilde{\alpha} \in R_s, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathfrak{h} = \sum_{m=0}^{r-1} \mathfrak{h}_m, \quad \nu(\mathfrak{h}_m) = \omega^m \mathfrak{h}_m. \quad (\text{A.11})$$

Тогда подпространство $\mathfrak{g}_m$ в (A.2) имеет следующее разложение по системе корней:

$$\mathfrak{g}_m = \mathfrak{h}_m + \sum_{\tilde{\alpha} \in R_s} \mathbb{C} \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m, \quad m \neq 0. \quad (\text{A.12})$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 + \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} \mathbb{C} E_{\tilde{\alpha}}, \quad E_{\tilde{\alpha}} = \begin{cases} E_{\alpha}, & \alpha = \tilde{\alpha} \in R_\ell, \\ t_{\tilde{\alpha}}^0, & \tilde{\alpha} \in R_s. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

В этих обозначениях множество корневых подпространств алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$E_{\tilde{\alpha}} \text{ при } \tilde{\alpha} \in R_\ell, \quad t_{\tilde{\alpha}}^0 \text{ при } \tilde{\alpha} \in R_s, \quad \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m \text{ при } \tilde{\alpha} \in R_s.$$

Инвариантная подалгебра $\mathfrak{g}_0$ имеет следующий ранг:

$$\text{rank } \mathfrak{g}_0 = \begin{cases} n & \text{в случаях } A_{2n}, A_{2n-1}, D_{n+1}, \\ 4 & \text{в случае } E_6, \\ 2 & \text{в случае } D_4. \end{cases}$$

Пусть $(e_1, \dots, e_l)$ – канонический базис в $\mathfrak{h}$. Базис в $\mathfrak{h}_m$ для $m \neq 0$ имеет вид $\langle \mathfrak{e}_1^m, \dots, \mathfrak{e}_n^m \rangle$, где

$$\mathfrak{e}_k^m = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} \omega^{jm} e_{\nu^j k} \quad \text{при } \nu(e_k) \neq e_k, \quad \nu(\mathfrak{e}_k^m) = \omega^m \mathfrak{e}_k^m, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{A.14})$$

а n равно числу орбит ν -действия на $\mathfrak{h}$. В частности, мы имеем следующий базис в алгебре $\mathfrak{h}_0$:

$$\mathfrak{e}_k^0 = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=0}^{r-1} e_{\nu^j k} \quad \text{при } \nu(e_k) \neq e_k, \quad \mathfrak{e}_i^0 = e_i \quad \text{при } \nu(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i. \quad (\text{A.15})$$

В итоге получаем, что базис в $\mathfrak{g}$ определяется следующим набором генераторов T_a , $a = (\tilde{\alpha}, m, k)$:

$$T_a = \{ \mathfrak{g}_m, E_{\tilde{\alpha}}, \mathfrak{e}_k^m, \mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m \mid m = 0, \dots, r-1, k = 1, \dots, n \}, \quad (\text{A.16})$$

где $\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m$, и $E_{\tilde{\alpha}}$, $\mathfrak{e}_k^m$, $\mathfrak{e}_k^0$ заданы в формулах (A.10) и (A.13)–(A.15). Форма Киллинга на этих генераторах принимает вид

$$\begin{aligned} (\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^m, \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^n) &= r \delta^{m+n, r} \delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}}, \quad (E_{\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\beta}}) = \delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}}, \quad m, n = 0, \dots, r-1, \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in R_\ell, \\ (\mathfrak{e}_k^m, \mathfrak{e}_j^n) &= \delta^{m+n, r} \delta_{j, k}, \quad k, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

В случае алгебры $\mathfrak{g} = sl(2n+1)$ (алгебры A_{2n}) инвариантная подалгебра $\mathfrak{g}_0 = B_n$ и мы имеем

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{g}_0 = so(2n+1).$$

Внешний автоморфизм в фундаментальном представлении алгебры $sl(2n+1)$ определим следующим образом:

$$\nu(x) = -Jx^T J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = (E_{k, n-k+1}). \quad (\text{A.18})$$

Антиинвариантная часть имеет вид

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} A & \tilde{X}^T & B \\ Y & 0 & \tilde{X} \\ C & \tilde{Y}^T & \tilde{A}^T \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{A} = jA j, \quad \tilde{X} = X j, \quad \tilde{Y} = Y j, \quad B = -\tilde{B}^T, \quad C = -\tilde{C}^T.$$

Система корней подалгебры $\mathfrak{g}_0$ имеет вид $\tilde{R}_{B_n} = R_\ell \cup R_s$ со следующими длинными и короткими корнями:

$$\begin{aligned} R_\ell &= \left\{ \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha + \nu(\alpha)) \mid \alpha \neq \nu(\alpha) \text{ и } (\alpha, \nu(\alpha)) = 0 \right\}, \\ R_s &= \left\{ \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha + \nu(\alpha)) \mid \alpha \neq \nu(\alpha) \text{ и } (\alpha, \nu(\alpha)) \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Пусть $\text{ht}(\alpha)$ – высота корня $\alpha \in R$. Имеем следующее корневое пространство подалгебры $\mathfrak{g}_0$:

$$E_{\tilde{\alpha}} = \begin{cases} E_{\alpha} - (-1)^{\text{ht}(\alpha)} E_{\nu(\alpha)}, & \alpha \in R_{\ell}, \\ \sqrt{2}(E_{\alpha} - (-1)^{\text{ht}(\alpha)} E_{\nu(\alpha)}), & \alpha \in R_s. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Другие корневые подпространства имеют вид

$$\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^1 = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j E_{\nu^j \alpha}. \quad (\text{A.21})$$

В представлении (A.18)

$$\begin{aligned} R_{\ell} &= \left\{ \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(e_j \pm e_k - (e_{2n+2-j} \pm e_{2n+2-k})) \mid j = 1 \dots, n \right\}, \\ R_s &= \left\{ \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(e_j - e_{2n+1-j}) \mid j = 1 \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

и

$$E_{\tilde{\alpha}} = \begin{cases} E_{jk} - E_{2n+2-k, 2n+2-j}, & \tilde{\alpha} \in R_{\ell}, \\ E_{j, n+k} - E_{2n+2-k, 2n+2-j}, & \tilde{\alpha} \in R_{\ell}, \\ E_{n+k, j} - E_{2n+2-j, 2n+2-k}, & \tilde{\alpha} \in R_{\ell}, \\ \sqrt{2}(E_{j, n+1} - E_{n+1, 2n+2-j}), & \tilde{\alpha} \in R_s, \\ \sqrt{2}(E_{n+1, j} - E_{2n+2-j, n+1}), & \tilde{\alpha} \in R_s; \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^1 = \begin{cases} E_{jk} + E_{2n+2-k, 2n+2-j}, & \text{длинные корни}, \\ E_{j, n+k} + E_{2n+2-k, 2n+2-j}, & \text{длинные корни}, \\ E_{n+k, j} + E_{2n+2-j, 2n+2-k}, & \text{длинные корни}, \\ \sqrt{2}(E_{j, n+1} + E_{n+1, 2n+2-j}), & \text{короткие корни}, \\ \sqrt{2}(E_{n+1, j} + E_{2n+2-j, n+1}), & \text{короткие корни}. \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Твистованный канонический базис в $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2n+1)$ задается как

$$\mathfrak{e}_k^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2n+1-k}), \quad \mathfrak{e}_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2n+1-k}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.25})$$

Базис в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n+1)$ определен выражениями (A.23), (A.24) с формой Киллинга

$$\begin{aligned} (E_{\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\beta}}) &= 4\delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}} \text{ при } \tilde{\alpha} \in R_{\ell}, & (E_{\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\beta}}) &= 8\delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}} \text{ при } \tilde{\alpha} \in R_s, \\ (\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^1, \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^1) &= 4\delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}} \text{ для длинных корней}, \\ (\mathfrak{t}_{\tilde{\alpha}}^1, \mathfrak{t}_{\tilde{\beta}}^1) &= 8\delta_{\tilde{\alpha}, -\tilde{\beta}} \text{ для коротких корней}, \\ (\mathfrak{e}_k^m, \mathfrak{e}_j^n) &= 4\delta^{m+n, r} \delta_{j, k}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Перейдем от канонического базиса (A.15), (A.25) в $\mathfrak{h}_0$ к базису простых кокорней

$$\tilde{\Pi}^{\vee} = \left\{ H_{\tilde{\alpha}_j} \equiv H_j = \frac{2\tilde{\alpha}_j}{(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j)} \mid \tilde{\alpha}_j \in \tilde{\Pi} \right\}, \quad (\text{A.27})$$

где Π определена в (A.4). Пусть Ξ – система фундаментальных весов алгебры $\mathfrak{g}$,

$$\Xi = \{\varpi_1, \dots, \varpi_l \mid \langle \varpi_j, \alpha_k \rangle = \delta_{jk}, \alpha_k \in \Pi\}. \quad (\text{A.28})$$

Тогда фундаментальные ковесы $\tilde{\Xi}$ инвариантной подалгебры $\mathfrak{g}_0$ можно ввести следующим образом:

$$\tilde{\varpi}_j^\vee = \begin{cases} \varpi_j^\vee, & \nu(\alpha_j) = \alpha_j, \\ \sum_{m=0}^{r-1} \nu^m(\varpi_j^\vee), & \nu(\alpha_j) \neq \alpha_j. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Система $\tilde{\Psi}^\vee = \{\tilde{\varpi}_j^\vee\}$ является дуальной к системе простых корней $\tilde{\Pi}$ подалгебры $\mathfrak{g}_0$ (мы имеем $\langle \tilde{\varpi}_j^\vee, \tilde{\alpha}_k \rangle = \delta_{jk}$).

Пусть $\tilde{P}^\vee$ – решетка ковесов подалгебры $\mathfrak{g}_0$, порожденная фундаментальными ковесами,

$$\tilde{P}^\vee = \sum_{j=1}^n m_j \tilde{\varpi}_j^\vee, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.30})$$

и $\tilde{Q}^\vee \subseteq \tilde{P}^\vee$ – решетка кокорней,

$$\tilde{Q}^\vee = \sum_{j=1}^n m_j \tilde{\alpha}_j^\vee, \quad m_j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.31})$$

Из формул (A.6) и (A.29) следует, что обе решетки ν -инвариантны:

$$\nu(\tilde{P}^\vee) = \tilde{P}^\vee, \quad \nu(\tilde{Q}^\vee) = \tilde{Q}^\vee. \quad (\text{A.32})$$

Более того, $\tilde{P}^\vee \subset P$, тогда как $\tilde{Q}^\vee \not\subseteq Q$.

Пусть

$$\tilde{C}^+ = \{x \in \mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}} \mid \langle \tilde{\alpha}, x \rangle > 0\} \quad (\text{A.33})$$

есть положительная камера Вейля и W_0 – группа Вейля, порожденная отражениями системы корней $\tilde{R}$. Тогда любой регулярный элемент из $\text{Re } \mathfrak{h}_0$ принадлежит W_0 -орбите элемента $\mathbf{u} \in \tilde{C}^+$.

Введем афинную группу Вейля $\widetilde{W}_{\text{aff}} = W_0 \ltimes \tilde{Q}^\vee$, действующую на $\text{Re } \mathfrak{h}_0$ следующим образом:

$$x \rightarrow x - \langle \tilde{\alpha}, x \rangle \tilde{\alpha}^\vee + k \tilde{\beta}^\vee, \quad \tilde{\alpha}^\vee, \tilde{\beta}^\vee \in \tilde{R}^\vee, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.34})$$

Альковы Вейля – это связанные компоненты множества $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{R}} \setminus \{\langle \tilde{\alpha}, x \rangle \in \mathbb{Z}\}$. Их замыкание является фундаментальной областью $\widetilde{W}_{\text{aff}}$ -действия. Группа $\widetilde{W}_{\text{aff}}$ действует транзитивно на множестве альковов Вейля.

Введем полупрямое произведение с помощью $\tilde{P}^\vee$:

$$\widetilde{W}'_{\text{aff}} = W_0 \ltimes \tilde{P}^\vee \supseteq \widetilde{W}_{\text{aff}}. \quad (\text{A.35})$$

Связанные компоненты факторгруппы $\text{Re } \mathfrak{h}_0 / \widetilde{W}'_{\text{aff}}$ являются альковами,

$$\tilde{C}'_{\text{alc}} = \text{Re } \mathfrak{h}_0 / \widetilde{W}'_{\text{aff}}. \quad (\text{A.36})$$

Факторгруппа задается как $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{P}^\vee / \tilde{Q}^\vee \sim \tilde{W}'_{\text{aff}} / \tilde{W}_{\text{aff}}$. Эти группы имеют следующую структуру:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \mathfrak{g} = A_{2n+1}, D_{n+1}, \\ \text{Id}, & \mathfrak{g} = A_{2n}, D_4, E_6. \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Некоторые эллиптические функции

В этом разделе мы используем результаты из книги [34] и статьи [35].

Основным ингредиентом является функция Кронекера, заданная на $s, t \in \mathbb{C}^*$:

$$g(s, t|q) = - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{t^m}{1 - q^m s}, \quad 1 > |t| > |q|. \quad (\text{B.1})$$

Если, кроме того, $1 > |s| > |q|$, то

$$g(s, t|q) = 1 - \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-s} + \sum_{i, n < 0} s^i q^{in} t^n - \sum_{i, n > 0} s^i q^{in} t^n. \quad (\text{B.2})$$

Тогда

$$\text{Res } g(s, t|\tilde{q})|_{s=1} = 1, \quad \text{Res } g(s, t|q)|_{t=1} = 1. \quad (\text{B.3})$$

Перепишем равенство (B.2) в виде

$$g(s, t|q) = 1 + g^+(t) + g^-(t) \quad \text{при} \quad 1 > |s| > |q|, \quad 1 > |t| > |q|, \quad (\text{B.4})$$

где

$$g^+(s, t) = - \sum_{i, n \geq 0} s^i q^{in} t^n, \quad g^-(s, t) = \sum_{i, n < 0} s^i q^{in} t^n.$$

Рассмотрим распределение в пространстве $\mathbb{C}[t, t^{-1}] = \{\psi(t) = \sum_l c_l t^l\}$ полиномов Лорана, определяемое функционалом $\delta(t, t_1)$:

$$\text{Res}(\delta(t, t_1) \psi(t_1))|_{t_1=0} = \psi(t). \quad (\text{B.5})$$

Оно представимо в виде формального степенного ряда

$$\delta(t_1, t_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t_1^k t_2^{-k-1} = \delta_+(t_1, t_2) + \delta_-(t_1, t_2),$$

где

$$\begin{aligned} \delta_+(t_1, t_2) &= \frac{1}{t_2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^n = \frac{1}{t_1 - t_2} \quad \text{при} \quad |t_2| < |t_1|, \\ \delta_-(t_1, t_2) &= \frac{1}{t_2} \sum_{n > 0} \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^n = -\frac{1}{t_1 - t_2} \quad \text{при} \quad |t_2| > |t_1|. \end{aligned}$$

Фиксируем $t \in \mathbb{C}^*$. Определим в $\mathbb{C}^*$ два контура с противоположной ориентацией,

$$\gamma_1 = \{|s| = |t|(1 + \varepsilon)\}, \quad \gamma_2 = \{|s| = |t|(1 - \varepsilon)\}, \quad \varepsilon > 0,$$

и положим $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Тогда согласно (B.5)

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \psi(t_1) \delta(t, t_1) \frac{dt_1}{t_1}. \quad (\text{B.6})$$

Из определения (B.1) следует, что функция Кронекера играет роль функции Грина для разностного оператора:

$$sg(s, qt|q) - g(s, t|q) = \delta(t, 1) - 1. \quad (\text{B.7})$$

Пусть $\psi(t)$ – голоморфная функция в окрестности контура γ , такая что

$$\text{Res} \frac{\psi(t)}{t} \Big|_{t=1} = 0.$$

Тогда существует голоморфное в $\mathbb{C}^*$ решение $x(t)$ разностного уравнения

$$sx(qt) - x(t) = \psi(t). \quad (\text{B.8})$$

Оно определяется интегралом

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \psi(t_1) g\left(s, \frac{t}{t_1} \Big| q\right) \frac{dt_1}{t_1}. \quad (\text{B.9})$$

Функцию Кронекера можно выразить через дзета-функцию следующим образом:

$$g(s, t|q) = \frac{X(ts|q)P^2(q)}{X(t|q)X(s|q)},$$

где

$$\begin{aligned} P(q) &= \prod_{n>0} (1 - q^n), \\ X(t|q) &= 4iq^{1/8}(t^{1/2} - t^{-1/2}) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n t)(1 - q^n t^{-1})(1 - q^n) = \\ &= i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n-1/2)^2/2} t^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

В переменных (u, z) (где $s = \mathbf{e}(u)$, $t = \mathbf{e}(z)$) функция $X(t|q)$ есть нечетная тета-функция, $X(t|q)|_{t=\mathbf{e}(z)} = \theta(z|\tau)$, а

$$g(s, t|q) \Big|_{\substack{s=\mathbf{e}(u) \\ t=\mathbf{e}(z)}} = \phi(u, z|\tau) = \frac{\theta(u+z)\theta'(0)}{\theta(u)\theta(z)}.$$

Первый ряд Эйзенштейна введем следующим образом:

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \ln \theta(z|\tau).$$

Он имеет простой полюс на решетке, а именно

$$\text{Res} E_1(z|\tau) \Big|_{z=m+n\tau} = 1. \quad (\text{B.10})$$

Используя переменную $t = \mathbf{e}(z)$, мы можем определить ряд Эйзенштейна в кольце $1 > |t| > |q|$ как

$$E_1(t|q) = \pi i + 2\pi i \sum_{m \neq 0} \frac{t^m}{q^m - 1}. \quad (\text{B.11})$$

Функция $-(1/2\pi i)E_1(t|q)$ играет роль функции Грина для разностного оператора на C_q :

$$-\frac{1}{2\pi i}E_1(tq|q) + \frac{1}{2\pi i}E_1(t|q) = \delta(t, 1) - 1, \quad (\text{B.12})$$

где $\delta(t, 1)$ задана в (B.6). Это позволяет продолжить $E_1(t|q)$ с кривой C_q на $\mathbb{C}^*$.

Пусть $E_2(t|q)$ – второй ряд Эйзенштейна:

$$E_2(t|q) = -\partial_t E_1(t|\tau) = 4\pi^2 \sum_n \frac{q^{nt}}{(1 - q^{nt})^2} = -\partial_z^2 \ln \theta(z|q).$$

Пусть

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n), \quad \eta_1(q) = \frac{24}{2\pi i} \frac{\partial_\tau \eta(q)}{\eta(q)}.$$

Тогда функция Вейерштрасса принимает вид

$$\wp(q, \tau) = E_2(q, \tau) - 2\eta_1(q). \quad (\text{B.13})$$

Функция g удовлетворяет тождествам Фея

$$g(s, t|q)g(s^{-1}, t|q) = E_2\left(\frac{1}{2\pi i} \ln t \middle| q\right) - E_2\left(\frac{1}{2\pi i} \ln s \middle| q\right), \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} g(s_1, t|q)s_2 \partial_{s_2} g(s_2, t|q) - g(s_2, t|q)s_1 \partial_{s_1} g(s_1, t|q) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left(E_2\left(\frac{1}{2\pi i} \ln s_2 \middle| q\right) - E_2\left(\frac{1}{2\pi i} \ln s_1 \middle| q\right) \right) g(s_1 s_2, t|q). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Структура таблицы 2

Группу $\mathcal{Z}(\bar{G}) = P/Q$ можно определить через матрицу Картана $a_{jk} = (\alpha_j, \alpha_k)$. Фундаментальные веса ϖ_j , генерирующие решетку весов P , образуют в $\mathfrak{h}^*$ базис, дуальный базису простых корней, $(\alpha_j, \varpi_k) = \delta_{jk}$, таким образом, между двумя базисами на решетках P и Q возникает связь $\varpi_k = (a)_{kj}^{-1} \alpha_j$. В частности, мы имеем $\text{ord}(\mathcal{Z}(\bar{G})) = \det a$.

Из определения (4.17) следует, что фундаментальные веса ϖ_j дают базис в P^Υ ,

$$\{\eta_j = \sigma(\varpi_j) - \varpi_j\}, \quad (\text{C.1})$$

а элементы решетки корней $Q(\mathfrak{g})$

$$\{\delta_j = \sigma(\alpha_j) - \alpha_j \mid \alpha_j \in \Pi(\mathfrak{g})\} \quad (\text{C.2})$$

образуют базис в Q^Υ . Сравнивая эти два базиса, найдем структуру факторгруппы $\mathcal{Z}^\sigma(\bar{G})$.

Построим табл. 2 построчно.

С.1. Группа $SL(N, \mathbb{C})$ (алгебры Ли A_{2n-1}, A_{2n}). Используем канонический базис $(e_1, \dots, e_N)$. Поскольку фундаментальные веса алгебры A_{N-1} имеют вид

$$\varpi_1 = \left(\frac{N-1}{N}, -\frac{1}{N}, \dots, -\frac{1}{N} \right), \quad \varpi_2 = \left(\frac{N-2}{N}, \frac{N-2}{N}, \dots, -\frac{2}{N} \right), \quad \dots, \\ \varpi_j = \left(\frac{N-j}{N}, \dots, \frac{N-j}{N}, -\frac{j}{N}, \dots, -\frac{j}{N} \right), \quad \dots, \quad \varpi_{N-1} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1-N}{N} \right),$$

мы можем найти генераторы решетки $P^\Upsilon(A_{N-1})$:

$$\eta_j = - \left(\underbrace{1 - \frac{2j}{N}, \dots, 1 - \frac{2j}{N}}_j, \underbrace{-\frac{2j}{N}, \dots, -\frac{2j}{N}}_{N-2j}, \underbrace{1 - \frac{2j}{N}, \dots, 1 - \frac{2j}{N}}_j \right), \quad (\text{C.3})$$

где

$$j = \begin{cases} 1, \dots, n-1 & \text{для } N = 2n, \\ 1, \dots, n & \text{для } N = 2n+1. \end{cases}$$

С другой стороны, поскольку $\Pi(A_{N-1}) = \{e_j - e_{j+1} \mid j = 1, \dots, N-1\}$, мы получаем из (C.2), что

$$\delta_j = \begin{cases} (0, \dots, -1, 1, 0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0) & \text{для } j = 1, \dots, n-1, \quad N = 2n, 2n+1, \\ (0, \dots, -1, 2, -1, \dots, 0) & \text{для } j = n, \quad N = 2n+1. \end{cases}$$

Отсюда и из (C.3) следует, что факторгруппа $\mathbb{Z}^\sigma(SL(N, \mathbb{C})) = P^\Upsilon(A_{N-1})/Q^\Upsilon(A_{N-1})$ порождается элементом η_1 . Для $N = 2n$ она имеет порядок n , а для нечетных N факторгруппа имеет порядок N . Таким образом, мы получили две первые строки таблицы.

С.2. Группа $SO(2n+2, \mathbb{C})$ (алгебра Ли D_{n+1}). Выберем в подалгебре Картана $\mathfrak{h}(D_{n+1})$ канонический базис $(e_1, \dots, e_{n+1})$ и систему простых корней

$$\Pi(D_{n+1}) = \{\alpha_j = e_j - e_{j+1} \mid j = 1, \dots, n, \alpha_{n+1} = e_n + e_{n+1}\}. \quad (\text{C.4})$$

Дуальная система фундаментальных весов принимает вид

$$\varpi_j = e_1 + e_2 + \dots + e_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \varpi_n = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n - e_{n+1}), \quad \varpi_{n+1} = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n + e_{n+1}). \quad (\text{C.5})$$

Внешний автоморфизм действует следующим образом:

$$\sigma(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_j, & j = 1, \dots, n-1, \\ \alpha_n \longleftrightarrow \alpha_{n+1}, \end{cases} \quad \sigma(\varpi_j) = \begin{cases} \varpi_j, & j = 1, \dots, n-1, \\ \varpi_n \longleftrightarrow \varpi_{n+1}. \end{cases}$$

Следуя формулам (C.1), (C.2), найдем генераторы решеток $P^\Upsilon(D_{n=1})$ и $Q^\Upsilon(D_{n=1})$:

$$\eta_n = \sigma(\varpi_n) - \varpi_n = e_{n+1}, \quad \delta = 2e_{n+1}. \quad (\text{C.6})$$

Таким образом, факторгруппа $\mathbb{Z}^\sigma(\text{Spin}_{2n+2}) \sim \mathbb{Z}_2$ порождается генератором η .

С.3. Группа Spin_8 (алгебра Ли D_4). В данном случае мы имеем внешний автоморфизм третьего порядка. Используя обозначения (C.4) и (C.5) при $n = 3$, запишем его действие следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_1) &= \alpha_3, & \sigma(\alpha_2) &= \alpha_2, & \sigma(\alpha_3) &= \alpha_4, & \sigma(\alpha_4) &= \alpha_1, \\ \sigma(\varpi_1) &= \varpi_3, & \sigma(\varpi_2) &= \varpi_2, & \sigma(\varpi_3) &= \varpi_4, & \sigma(\varpi_4) &= \varpi_1. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Тогда P^Υ порождается весами

$$\eta_1 = \varpi_1 - \varpi_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1), \quad \eta_2 = \varpi_3 - \varpi_4 = -(0, 0, 0, 1), \quad (\text{C.8})$$

тогда как Q^Υ порождается элементами $\delta_1 = (1, -1, -1, 1)$ и $\delta_2 = -2(0, 0, 0, 1)$. Следовательно, η_1 и η_2 – генераторы двух групп

$$\mathbb{Z}^\sigma(\text{Spin}_4) = P^\Upsilon(D_4)/Q^\Upsilon(D_4) \sim \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

С.4. Алгебра Ли E_6 . Внешний автоморфизм алгебры Ли E_6 соответствует симметрии простых корней $\Pi(E_6) = (\alpha_j)$ вида

$$\sigma: \alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_5, \quad \alpha_2 \longleftrightarrow \alpha_4, \quad \alpha_{3,6} \longleftrightarrow \alpha_{3,6}.$$

Симметрия фундаментальных весов

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6), \\ \varpi_2 &= \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5 + 6\alpha_6), \\ \varpi_3 &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6, \\ \varpi_4 &= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 10\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6), \\ \varpi_5 &= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6), \\ \varpi_6 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 \end{aligned}$$

имеет похожий вид:

$$\sigma: \varpi_1 \longleftrightarrow \varpi_5, \quad \varpi_2 \longleftrightarrow \varpi_4, \quad \varpi_{3,6} \longleftrightarrow \varpi_{3,6}.$$

Решетка $P^\Upsilon(E_6)$ порождается двумя элементами решетки весов $P(E_6)$, имеющими вид

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varpi_1 - \varpi_5 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5), \\ \eta_2 &= \varpi_2 - \varpi_4 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_4 - \alpha_5), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

а $Q^\Upsilon(E_6)$ – двумя элементами решетки корней $Q(E_6)$

$$\delta_1 = \alpha_1 - \alpha_5, \quad \delta_2 = \alpha_2 - \alpha_4.$$

Факторгруппа $\mathbb{Z}^\sigma(E_6) = P^\Upsilon(E_6)/Q^\Upsilon(E_6) \sim \mathbb{Z}_3$ порождается одним из элементов η_1 или η_2 , заданных в (C.9).

Список литературы

- [1] A. J. Bordner, R. Sasaki, K. Takasaki, *Progr. Theoret. Phys.*, **101**:3 (1999), 487–518, arXiv: hep-th/9809068; A. J. Bordner, E. Corrigan, R. Sasaki, *Prog. Theoret. Phys.*, **102**:3 (1999), 499–529, arXiv: hep-th/9905011.
- [2] E. D’Hoker, D. H. Phong, *Nucl. Phys. B*, **530**:3 (1998), 537–610; 611–640, arXiv: hep-th/9804124.
- [3] P. Etingof, O. Schiffmann, *Commun. Math. Phys.*, **218**:3 (2001), 633–663, arXiv: math/0003109.
- [4] L. Fehér, B. G. Puztai, *Nucl. Phys. B*, **621**:3 (2002), 622–642, arXiv: math/0109132.
- [5] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Elliptic Calogero–Moser system from two dimensional current algebra*, arXiv: hep-th/9401021.
- [6] B. Enriques, V. Rubtsov, *Math. Res. Lett.*, **3**:3 (1996), 343–357.
- [7] N. Nekrasov, *Commun. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 587–604, arXiv: hep-th/9503157.
- [8] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **316**:1 (2012), 1–44, arXiv: 1006.0702.
- [9] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *J. Geom. Phys.*, **62**:8 (2012), 1810–1850, arXiv: 1007.4127.
- [10] H. W. Braden, V. A. Dolgushev, M. A. Olshanetsky, A. V. Zotov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:25 (2003), 6979–7000, arXiv: hep-th/0301121.
- [11] A. В. Зотов, А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий, Ю. Б. Черняков, *ТМФ*, **156**:2 (2008), 163–183, arXiv: 0710.1072.
- [12] J. Gibbons, T. Hermesen, *Phys. D*, **11**:3 (1984), 337–348.
- [13] L.-C. Li, P. Xu, *Commun. Math. Phys.*, **231**:2 (2002), 257–286.
- [14] S. Wojciechowski, *Phys. Lett. A*, **111**:3 (1985), 101–103.
- [15] P. Etingof, O. Schiffmann, *Math. Res. Lett.*, **8**:1–2 (2001), 157–170, arXiv: math/0005282.
- [16] J. C. Hurtubise, E. Markman, *Commun. Math. Phys.*, **223**:3 (2001), 533–552.
- [17] S. P. Kumar, J. Troost, *JHEP*, **01** (2002), 020, 17 pp., arXiv: hep-th/0112109.
- [18] G. Felder, “The KZB equations on Riemann surfaces”, *Symétries Quantiques* (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, 687–725, arXiv: hep-th/9609153.
- [19] G. Felder, Ch. Wierczkowski, *Commun. Math. Phys.*, **176**:1 (1996), 133–162, arXiv: hep-th/9411004.
- [20] G. Kuroki, T. Takebe, *Commun. Math. Phys.*, **190**:1 (1997), 1–56.
- [21] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. V. Smirnov, A. V. Zotov, *SIGMA*, **8** (2012), 095, 37 pp., arXiv: 1207.4386.
- [22] M. Atiyah, *Proc. London Math. Soc.*, **7**:1 (1957), 414–452.
- [23] И. Н. Бернштейн, О. В. Шварцман, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:4 (1978), 79–80.
- [24] E. Looijenga, *Invent. Math.*, **38**:1 (1976), 17–32.
- [25] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, *Ann. Math.*, **82**:3 (1965), 540–567.
- [26] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [27] В. Г. Кац, *Функц. анализ и его прил.*, **3**:3 (1969), 94–96.
- [28] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.

- [29] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, “Основы теории групп Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 5–101.
- [30] Э. Пресли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [31] G. Pappas, M. Rapoport, *Adv. Math.*, **219**:1 (2008), 118–198.
- [32] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133, arXiv: nlin/0110045.
- [33] G. Felder, K. Gawedzki, A. Kupiainen, *Commun. Math. Phys.*, **117**:1 (1988), 127–158.
- [34] Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [35] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.

Поступила в редакцию 14.07.2015