Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Продольный электрический ток в столкновительной плазме, генерируемый поперечным электромагнитным полем, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 127–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:48:56

© 2016 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ПРОДОЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ ПОПЕРЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассматривается столкновительная плазма с произвольной степенью вырождения электронного газа. Плазма находится во внешнем электромагнитном поле. Требуется определить электрический ток, генерируемый в плазме электромагнитным полем. Показано, что электрический ток имеет две ненулевые компоненты. Одна компонента представляет собой поперечный ток, получаемый при линейном анализе. Вторая компонента представляет собой продольный ток, направленный вдоль волнового вектора и ортогональный поперечному току. Исследован случай малых волновых чисел. Когда частота столкновений стремится к нулю, все полученные формулы переходят в формулы, известные для бесстолкновительной плазмы. Проводится графическое исследование безразмерной плотности тока в зависимости от волнового числа, частоты колебаний электромагнитного поля и частоты столкновений электронов с частицами плазмы.

Ключевые слова: уравнение Власова, столкновительная плазма, электромагнитное поле, метод последовательных приближений, поперечный и продольный ток.

DOI: 10.4213/tmf9008

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе выводятся формулы для вычисления электрического тока в столкновительной плазме Ферми–Дирака. Для описания поведения плазмы используется уравнение Власова с интегралом столкновений. В качестве интеграла столкновений используется известный интеграл столкновений Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [1], [2]. При решении кинетического уравнения Власова, описывающего поведение плазмы, мы учитываем величины, пропорциональные квадрату напряженности внешнего электрического поля. При этом мы используем квадратичные разложения функции распределения, самосогласованного электромагнитного поля и интеграла столкновений.

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

При таком нелинейном подходе оказалось, что электрический ток имеет две ненулевые компоненты. Одна компонента электрического тока направлена вдоль напряженности электрического поля и пропорциональна его величине. Эта компонента электрического тока в точности та же самая, что и в линейном анализе. Это поперечный ток. Следовательно, в линейном анализе мы получаем известное выражение поперечного электрического тока. Вторая ненулевая компонента электрического тока пропорциональна квадрату напряженности электрического поля. Она направлена вдоль волнового вектора, перпендикулярно напряженности электрического поля. Этот ток ортогонален первой компоненте тока. Это продольный ток.

Генерирование в плазме продольного тока поперечным электромагнитным полем выявляется при нелинейном анализе взаимодействия электромагнитного поля с плазмой. Нелинейные эффекты в плазме изучаются длительное время [3]–[7].

В работе [4] показано, что вероятности процессов распада могут быть найдены непосредственно из нелинейного тока плазмы. Заметим, что на существование нелинейного тока вдоль волнового вектора указано в работе [5] (см. формулу (2.9) в этой работе).

В экспериментальной работе [8] выяснен вклад нормальной компоненты поля в нелинейный поверхностный ток в сигнале второй гармоники. В работах [9], [10] изучалась генерация нелинейного поверхностного тока при взаимодействии лазерного импульса с металлом. Найдены медленно изменяющиеся во времени нелинейные токи в скин-слое металла, изучено низкочастотное поле, спектральный состав, энергия и форма импульса низкочастотного излучения.

Столкновительная плазма изучалась в работах [11]–[13].

В работах [14]–[16] было исследовано генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой бесстолкновительной плазме. В работе [14] рассматривалась плазма Ферми–Дирака, в [15] – максвелловская плазма, а в [16] – вырожденная плазма.

В настоящей работе выведены формулы для вычисления продольного тока, генерируемого поперечным электромагнитным полем, в классической столкновительной плазме при любой температуре, т. е. при любой степени вырожденности электронного газа.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Покажем, что в классической плазме, описываемой уравнением Власова, генерируется продольный ток поперечным электрическим полем, и вычислим его плотность. На существование этого тока указывалось более полувека тому назад [5].

Рассмотрим уравнение Власова, описывающее поведение столкновительной плазмы с интегралом столкновений БГК,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f^{(0)} - f). \quad (1)$$

Здесь f – функция распределения электронов плазмы, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – компоненты электромагнитного поля, c – скорость света, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс-электронов, $\mathbf{v}$ – скорость электронов, ν – эффективная частота столкновений электронов с частицами плазмы, $f^{(0)} = f_{\text{eq}}(\mathbf{r}, v)$ – локально-равновесная функция распределения Ферми–Дирака,

$$f_{\text{eq}}(\mathbf{r}, v) = [1 + e^{(\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r}))/k_B T}]^{-1} = [1 + e^{P^2 - \alpha(\mathbf{r})}]^{-1} = f_{\text{eq}}(\mathbf{r}, P),$$

$\mathcal{E} = mv^2/2$ – энергия электронов, $\mu(\mathbf{r})$ – химический потенциал электронного газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, $\mathbf{P} = \mathbf{P}/p_T = \mathbf{v}/v_T$ – безразмерный импульс (скорость) электронов, $p_T = mv_T$, v_T – тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2k_B T/m}$, $\alpha(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r})/k_B T$ – безразмерный (приведенный) химический потенциал, $k_B T = \mathcal{E}_T = mv_T^2/2$ – тепловая энергия электронов.

Будем считать, что в плазме имеется электромагнитное поле, представляющее собой бегущую гармоническую волну $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Электрическое и магнитное поля связаны между собой векторным потенциалом:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Для определенности будем считать, что волновой вектор направлен вдоль оси x , а электрическое поле направлено вдоль оси y , т. е. $\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$, $\mathbf{E} = E_y(x, t)(0, 1, 0)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{ck}{\omega} E_y \cdot (0, 0, 1), \quad [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = \frac{ck}{\omega} E_y \cdot (v_y, -v_x, 0), \\ e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{e}{\omega} E_y \left[kv_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right], \end{aligned}$$

а также

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

так как $\partial f_0 / \partial \mathbf{p} \sim \mathbf{v}$.

Рассмотрим линеаризацию локально-равновесной функции распределения

$$f_{\text{eq}}(P, x) = f_0(P) + g(P) \delta\alpha(x),$$

где

$$\begin{aligned} f_0(P) &= [1 + e^{P^2 - \alpha}]^{-1}, \quad \alpha(x) = \alpha + \delta\alpha(x), \quad \alpha = \text{const}, \\ g(P) &= \frac{\partial f_0(P)}{\partial \alpha} = \frac{e^{P^2 - \alpha}}{(1 + e^{P^2 - \alpha})^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE_y}{\omega} \left[kv_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] + \nu f = \nu f_0(P) + g(P) \nu \delta\alpha(x). \quad (2)$$

Величина $\delta\alpha(x)$ может быть найдена из закона сохранения числа частиц

$$\int (f_{\text{eq}} - f) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем

$$\delta\alpha(x) = \int [f - f_0(P)] d^3 P \left[\int g(P) d^3 P \right]^{-1}.$$

Заметим, что

$$\int g(P) d^3P = 2\pi \int_0^\infty \frac{dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \pi \int_{-\infty}^\infty \frac{dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \pi \hat{f}_0(\alpha),$$

где

$$\hat{f}_0(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = 2 \int_0^\infty \frac{dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}}.$$

Следовательно,

$$\delta\alpha(x) = \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int [f - f_0(P)] d^3P.$$

Уравнение (2) может быть преобразовано теперь к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \nu f = \nu f_0(P) - \frac{eE_y}{\omega} \left[kv_y \frac{\partial f}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f}{\partial p_y} \right] + \\ + \nu g(P) \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int [f - f_0(P)] d^3P. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$f = f_0(P) + f_1 + f_2, \quad (4)$$

где

$$f_1 \sim E_y \sim e^{i(kx - \omega t)}, \quad f_2 \sim E_y^2 \sim e^{2i(kx - \omega t)}.$$

В задаче имеются три параметра размерности длины $l_1 = v_T/\omega$, $l_2 = 1/k$ и $l_3 = v_T\tau$ ($\tau = 1/\nu$ – характерное время между двумя последовательными столкновениями электронов). Будем полагать, что на всех длинах l_1 , l_2 и l_3 изменение энергии электрона под действием электрического поля E много меньше тепловой энергии электронов $k_B T$, т. е. будем считать малыми параметры $\alpha_1 = |eE|v_T/\omega k_B T$, $\alpha_2 = |eE|/k k_B T$ и $\alpha_3 = |eE|v_T/\nu k_B T$.

Будем действовать методом последовательных приближений, считая, что $\alpha_j \ll 1$, $j = 1, 2, 3$. Тогда с помощью соотношения (4) заключаем, что уравнение (3) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \nu f_1 = - \frac{eE_y}{\omega} \left[kv_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] + \\ + \nu g(P) \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int f_1 d^3P \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_2}{\partial x} + \nu f_2 = - \frac{eE_y}{\omega} \left[kv_y \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f_1}{\partial p_y} \right] + \\ + \nu g(P) \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int f_2 d^3P. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения (5) получаем

$$(\nu - i\omega + ikv_x)f_1 = - \frac{eE_y}{\omega} \left[kv_y \frac{\partial f_0}{\partial p_x} + (\omega - kv_x) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \right] + \nu g(P)A_1,$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int f_1 d^3 P. \quad (7)$$

Введем безразмерные параметры

$$\Omega = \frac{\omega}{k_T v_T}, \quad y = \frac{\nu}{k_T v_T}, \quad q = \frac{k}{k_T},$$

где q – безразмерное волновое число, $k_T = mv_T/\hbar$ – тепловое волновое число, Ω – безразмерная частота колебаний электромагнитного поля.

В уравнении (7) перейдем к безразмерным параметрам:

$$i(qP_x - z)f_1 = -\frac{eE_y}{\Omega k_T p_T v_T} \left[qP_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega - qP_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \right] + yg(P)A_1, \quad (8)$$

где $z = \Omega + iy = (\omega + i\nu)/k_T v_T$. Заметим, что $\partial f_0/\partial P_x \sim P_x$, $\partial f_0/\partial P_y \sim P_y$. Следовательно,

$$qP_y \frac{\partial f_0}{\partial P_x} + (\Omega - qP_x) \frac{\partial f_0}{\partial P_y} = \Omega \frac{\partial f_0}{\partial P_y}.$$

Теперь из уравнения (8) находим

$$f_1 = \frac{ieE_y}{k_T p_T v_T} \cdot \frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} - iy \cdot \frac{g(P)}{qP_x - z} A_1. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (7), получаем равенство

$$A_1 \left(1 + iy \int \frac{g(P) d^3 P}{qP_x - z} \right) = \frac{ieE_y}{k_T p_T v_T} \int \frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} d^3 P.$$

Легко видеть, что интеграл в правой части этого равенства равен нулю. Следовательно, $A_1 = 0$. Значит, согласно (9) функция f_1 построена и определяется равенством

$$f_1 = \frac{ieE_y}{k_T p_T v_T} \cdot \frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z}. \quad (10)$$

Во втором приближении подставим f_1 согласно (10) в уравнение (6). Получим уравнение

$$(\nu - 2i\omega + 2ikv_x)f_2 = \nu g(P)A_2 - \frac{ie^2 E_y^2}{k_T p_T v_T \omega} \left[kv_y \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} \right) + (\omega - kv_x) \frac{\partial}{\partial p_y} \left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} \right) \right],$$

где

$$A_2 = \frac{1}{\pi \hat{f}_0(\alpha)} \int f_2 d^3 P. \quad (11)$$

Перейдем в этом уравнении к безразмерным параметрам:

$$2i \left(qP_x - x - \frac{iy}{2} \right) f_2 = -\frac{ie^2 E_y^2}{\Omega k_T^2 p_T^2 v_T^2} \left[qP_x \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} \right) + (\Omega - qP_x) \frac{\partial}{\partial P_y} \left(\frac{\partial f_0/\partial P_y}{qP_x - z} \right) \right] + yg(P)A_2.$$

Вводя обозначение

$$z' = \Omega + \frac{iy}{2} = \frac{\omega}{k_T v_T} + i \frac{\nu}{2k_T v_T} = \frac{\omega + i\nu/2}{k_T v_T},$$

из последнего уравнения находим

$$f_2 = -\frac{e^2 E_y^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega} \left[qP_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) + \frac{\Omega - qP_x}{qP_x - z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \frac{1}{qP_x - z'} - \frac{iy}{2} \cdot \frac{g(P)}{qP_x - z'} A_2. \quad (12)$$

Для нахождения A_2 подставим (12) в (11). Из полученного соотношения находим

$$A_2 = -\frac{e^2 E_y^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega} \cdot \frac{J_1}{\pi \hat{f}_0(\alpha) + (iy/2)J_0},$$

где

$$J_0 = \int \frac{g(P) d^3 P}{qP_x - z'},$$

$$J_1 = \int \left[qP_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) + \frac{\Omega - qP_x}{qP_x - z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \frac{d^3 P}{qP_x - z'}.$$

Подставляя A_2 в (12), окончательно находим f_2 в явном виде:

$$f_2 = -\frac{e^2 E_y^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega} \left[qP_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) + \frac{\Omega - qP_x}{qP_x - z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \frac{1}{qP_x - z'} + \gamma \frac{e^2 E_y^2}{2k_T^2 p_T^2 v_T^2 \Omega} \cdot \frac{g(P)}{qP_x - z'}, \quad (13)$$

где

$$\gamma = \frac{(iy/2)J_1}{\pi \hat{f}_0(\alpha) + (iy/2)J_0}. \quad (14)$$

3. ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Найдем плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (15)$$

Из равенств (4)–(6) мы видим, что вектор плотности тока имеет две компоненты: $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$, где j_y – плотность поперечного тока,

$$j_y = e \int v_y f \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_y f_1 \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Этот ток направлен вдоль электрического поля, его плотность определяется только первым приближением функции распределения. Второе приближение функции

распределения не вносит вклада в плотность тока. Плотность поперечного тока определяется равенством

$$j_y = \frac{2ie^2 p_T^2}{(2\pi\hbar)^3 k_T} E_y(x, t) \int \frac{(\partial f_0 / \partial P_y) P_y}{qP_x - z} d^3 P.$$

Этот ток пропорционален первой степени величины напряженности электрического поля.

Для плотности продольного тока по определению имеем

$$j_x = e \int v_x f \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = e \int v_x f_2 \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2ev_T p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int P_x f_2 d^3 P.$$

С помощью (6) отсюда получаем

$$j_x = \frac{e^3 E_y^2 m}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left\{ - \int \left[qP_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) + \frac{x - qP_x}{qP_x - z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \frac{P_x}{qP_x - z'} d^3 P + \gamma \int \frac{P_x g(P)}{qP_x - z'} d^3 P \right\}. \quad (16)$$

В интеграле от второго слагаемого в квадратных скобках в (16) внутренний интеграл по P_y равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} dP_y = \frac{\partial f_0}{\partial P_y} \Big|_{P_y=-\infty}^{P_y=+\infty} = 0.$$

В первом интеграле в квадратных скобках в (16) внутренний интеграл по P_x вычисляется по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) \frac{P_x}{qP_x - z'} dP_x = z' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial P_y}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} dP_x.$$

Следовательно, равенство (16) упрощается:

$$j_x = \frac{e^3 E_y^2 m}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left[-z' q \int \frac{P_y (\partial f_0 / \partial P_y)}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} d^3 P + \gamma \int \frac{P_x g(P)}{qP_x - z'} d^3 P \right].$$

Внутренний интеграл по переменной P_y вычислим по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y \frac{\partial f_0}{\partial P_y} dP_y = P_y f_0 \Big|_{P_y=-\infty}^{P_y=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P) dP_y = - \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P) dP_y.$$

Таким образом, получим выражение для продольного тока

$$j_x = \frac{e^3 E_y^2 m}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left[z' q \int \frac{f_0(P)}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} d^3 P + \gamma \int \frac{P_x g(P)}{qP_x - z'} d^3 P \right]. \quad (17)$$

Внутренний интеграл в плоскости (P_y, P_z) вычислим в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \int \frac{f_0(P)}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} d^3 P &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_x}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P) dP_y dP_z = \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - P_x^2})}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} dP_x, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(P) dP_y dP_z = \pi \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2}).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int \frac{P_x g(P)}{qP_x - z'} d^3P &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_x f_0(P_x)}{qP_x - z'} dP_x = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{(1 + e^{\tau^2 - \alpha})(q\tau - z')} d\tau = \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha - \tau^2} \tau}{(1 + e^{\alpha - \tau^2})(q\tau - z')} d\tau = -\frac{\pi q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q\tau - z')^2} d\tau. \end{aligned}$$

Интегралы в равенстве (17) сводятся к одномерным интегралам:

$$j_x = \frac{\pi e^3 E_y^2 m q}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left[z' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(qP_x - z)(q\tau - z')^2} d\tau - \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q\tau - z')^2} d\tau \right].$$

Перепишем предыдущее равенство в виде

$$j_x = \frac{\pi e^3 E_y^2 m q}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left[z' J_{12} - \frac{\gamma}{2} J_{02} \right], \quad (18)$$

где

$$J_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(qP_x - z)(q\tau - z')^2} d\tau, \quad J_{02} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q\tau - z')^2} d\tau.$$

Вернемся к рассмотрению величины γ . Вычислим интегралы, входящие в (14). Вычислим первый интеграл:

$$J_1 = \int \left[qP_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) + \frac{x - qP_x}{qP_x - z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial P_y^2} \right] \frac{d^3P}{qP_x - z'}.$$

Как уже указывалось, интеграл от второго слагаемого равен нулю. Второй интеграл, как и ранее, вычислим по частям. В результате получаем

$$J_1 = q \int P_y \frac{\partial}{\partial P_x} \left(\frac{\partial f_0 / \partial P_y}{qP_x - z} \right) \frac{d^3P}{qP_x - z'} = q^2 \int \frac{P_y [\partial f_0 / \partial P_y]}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} d^3P.$$

Теперь вычислим по частям внутренний интеграл по переменной P_y :

$$J_1 = -q^2 \int \frac{f_0(P)}{(qP_x - z)(qP_x - z')^2} d^3P.$$

Этот интеграл был вычислен ранее. Следовательно,

$$J_1 = -\pi q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(qP_x - z)(q\tau - z')^2} d\tau = -\pi q^2 J_{12}.$$

Вычислим второй интеграл из (14):

$$J_0 = \int \frac{g(P)}{qP_x - z'} d^3P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_x}{qP_x - z'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(P) dP_y dP_z.$$

Для внутреннего двойного интеграла получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(P) dP_y dP_z = \pi \frac{1}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \pi f_0(P).$$

Следовательно,

$$J_0 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\tau)}{q\tau - z'} d\tau,$$

так что

$$\pi \hat{f}_0(\alpha) + \frac{iy}{2} J_0 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\tau - \Omega}{q\tau - z'} f_0(\tau) d\tau.$$

Таким образом, константа γ найдена:

$$\gamma = -\frac{iy}{2} q^2 \left(\frac{J_{12}}{J_{01}} \right),$$

где

$$J_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\tau - \Omega}{q\tau - z'} f_0(\tau) d\tau.$$

Теперь формулу (18) можно представить в виде

$$j_x = \frac{\pi e^3 E_y^2 m q}{(2\pi\hbar)^3 k_T^2 \Omega} \left[\Omega + \frac{iy}{2} + \frac{iy}{4} q^2 \frac{J_{02}}{J_{01}} \right] J_{12}. \quad (19)$$

Найдем числовую плотность (концентрацию) частиц плазмы, отвечающую распределению Ферми–Дирака:

$$N = \int f_0(P) \frac{2 d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha - P^2} P^2 dP}{1 + e^{\alpha - P^2}} = \frac{k_T^3}{2\pi^2} l_0(\alpha),$$

где

$$l_0(\alpha) = \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau.$$

В выражении перед интегралом в (19) выделим плазменную (ленгмюровскую) частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ и числовую плотность (концентрацию) N , последнюю выразим через тепловое волновое число. Получим

$$j_x^{\text{long}} = \left(\frac{e\Omega_p^2}{k_T p_T} \right) \frac{k E_y^2}{16\pi l_0(\alpha) \Omega} \left[\Omega + \frac{iy}{2} + \frac{iy}{4} q^2 \frac{J_{02}}{J_{01}} \right] J_{12}, \quad (20)$$

где

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{k_T v_T} = \frac{\hbar \omega_p}{m v_T^2}$$

– безразмерная плазменная частота.

Равенство (20) перепишем в виде

$$j_x^{\text{long}} = J(\Omega, y, q) \sigma_{1,\text{tr}} k E_y^2, \quad (21)$$

где $\sigma_{1,\text{tr}}$ – продольно-поперечная проводимость, $J(\Omega, y, q)$ – безразмерная часть тока,

$$\sigma_{1,\text{tr}} = \frac{e\Omega_p^2}{p_T k_T} = \frac{e\hbar}{p_T^2} \left(\frac{\hbar\omega_p}{mv_T^2} \right)^2 = \frac{e}{k_T p_T} \left(\frac{\omega_p}{k_T v_T} \right)^2,$$

$$J(\Omega, y, q) = \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)\Omega} \left[\Omega + \frac{iy}{2} + \frac{iy}{4} q^2 \frac{J_{02}}{J_{01}} \right] J_{12}.$$

Если ввести поперечное поле

$$\mathbf{E}_{\text{tr}} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{E}\mathbf{k})}{k^2} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{E}\mathbf{q})}{q^2}, \quad \mathbf{k}\mathbf{E}_{\text{tr}} = \frac{\omega}{c} [\mathbf{E}, H],$$

то равенство (21) можно представить в инвариантной форме

$$\mathbf{j}^{\text{long}} = J(\Omega, y, q) \sigma_{1,\text{tr}} \mathbf{k} \mathbf{E}_{\text{tr}}^2 = J(\Omega, y, q) \sigma_{1,\text{tr}} \frac{\omega}{c} [\mathbf{E}, H].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из формулы (19) (или (20)) видно, что при $y = 0$ (или $\nu = 0$), т. е. когда частота столкновений стремится к нулю и плазма становится бесстолкновительной ($z \rightarrow \Omega$, $z' \rightarrow \Omega$), эта формула в точности переходит в соответствующую формулу из работы [14] для бесстолкновительной плазмы

$$j_x^{\text{long}} = \sigma_{1,\text{tr}} k E_y^2 \frac{1}{16\pi l_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{(q\tau - \Omega)^2 (q\tau - \Omega)} d\tau.$$

Перейдем к рассмотрению случая малых значений волновых чисел. Из выражения (19) при малых значениях волновых чисел получаем

$$j_x^{\text{long}} = -\sigma_{1,\text{tr}} k E_y^2 \frac{1}{16\pi l_0(\alpha) \Omega z z'} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau =$$

$$= -\frac{\sigma_{1,\text{tr}} k E_y^2}{8\pi \Omega z z'} = -\frac{e}{8\pi m \omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{k E_y^2}{(1 - i\nu/\omega)(1 - i\nu/2\omega)}. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\nu = 0$ из формулы (22) в точности вытекает соответствующая формула из работы [14] для продольного тока в случае малых значений волновых чисел в бесстолкновительной плазме.

На рис. 1 показано поведение действительной (рис. 1а) и мнимой (рис. 1б) частей плотности безразмерного продольного тока при $\Omega = 1$, $y = 0.01$ в зависимости от безразмерного волнового числа q при различных значениях безразмерного химического потенциала. При малых и больших значениях параметра q кривые для разных значений α сближаются и становятся неразличимыми. Действительная часть имеет сначала минимум, а затем максимум. С ростом безразмерного химического потенциала мнимая часть плотности тока имеет один максимум.

Далее графическое исследование величины плотности продольного тока проведем для случая нулевого химического потенциала: $\alpha = 0$ (рис. 2, 3).

Рис. 1. Действительная (а) и мнимая (б) части плотности безразмерного продольного тока, $\Omega = 1$, $y = 0.01$.

Рис. 2. Действительная (а) и мнимая (б) части плотности безразмерного продольного тока, $\Omega = 1$, $\alpha = 0$.

Рис. 3. Действительная (а) и мнимая (б) части плотности безразмерного продольного тока, $y = 0.01$, $\alpha = 0$.

На рис. 2 представлено поведение действительной (рис. 2а) и мнимой (рис. 2б) частей плотности продольного тока в зависимости от безразмерного волнового числа q в случае $\Omega = 1$ при различных значениях безразмерной частоты столкновений электронов. При малых и при больших значениях безразмерного волнового числа кривые для разных значений y сближаются и становятся неразличимыми.

На рис. 3 представлено поведение действительной (рис. 3а) и мнимой (рис. 3б) частей плотности продольного тока в зависимости от безразмерного волнового числа q при различных значениях безразмерной частоты колебаний электромагнитного поля Ω . При возрастании безразмерного волнового числа q кривые для разных значений Ω сближаются и при $q \geq 1$ практически совпадают.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено влияние нелинейного характера взаимодействия электромагнитного поля с классической столкновительной плазмой. Рассматривается случай произвольной температуры, т. е. произвольной степени вырождения электронного газа.

Оказалось, что наличие нелинейности электромагнитного поля приводит к генерированию электрического тока, ортогонального к направлению поля. Этот продольный ток перпендикулярен к известному поперечному классическому току.

В дальнейшем авторы намерены рассмотреть задачу плазменных колебаний и задачу о скин-эффекте с использованием квадрата векторного потенциала в разложении функции распределения.

Список литературы

- [1] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**:3 (1954), 511–525.
- [2] P. Welander, *Ark. Fys.*, **7** (1954), 507–553.
- [3] В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, *УФН*, **70**:2 (1960), 201–246.
- [4] В. Н. Цытович, *УФН*, **90**:11 (1966), 435–489.
- [5] Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, *ЖЭТФ*, **47**:4 (1965), 1454–1462.
- [6] В. Н. Цытович, *Нелинейные эффекты в плазме*, Ленанд, М., 2014.
- [7] П. К. Шукла, Б. Элиассон, *УФН*, **180**:1 (2010), 55–82.
- [8] N. N. Akhmediev, I. V. Mel'nikov, L. J. Robur, *Laser Phys.*, **4**:6 (1994), 1194–1197.
- [9] С. Г. Бежанов, С. А. Урюпин, *Квант. электроника*, **43**:11 (2013), 1048–1054.
- [10] В. Е. Гришков, С. А. Урюпин, “Генерация нелинейного тока вдоль направления распространения короткого лазерного импульса”, *XLI Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу* (10–14 февраля 2014 г.), ЗАО НТЦ “Плазмаиофан”, М., 2014, 95.
- [11] N. D. Mermin, *Phys. Rev. B*, **1**:5 (1970), 2362–2363.
- [12] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 132–143.
- [13] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **178**:1 (2014), 147–160.
- [14] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Физика плазмы*, **41**:9 (2015), 778–787.
- [15] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа*, **50**:6 (2015), 126–133.
- [16] A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, *Generation of longitudinal electric current by transversal electromagnetic field in degenerate plasmas*, [arXiv:1503.08700](https://arxiv.org/abs/1503.08700).

Поступила в редакцию 18.07.2015,
после доработки 17.10.2015