Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. К. Саввиди, С-системы Аносова и генераторы случайных чисел, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 2, 223–243

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:56:19

© 2016 г.

Г. К. Саввиди*

С-СИСТЕМЫ АНОСОВА И ГЕНЕРАТОРЫ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Развивается сделанное ранее предложение о применении гиперболических С-систем Аносова для генерации псевдослучайных чисел и для использования их при вычислениях методом Монте-Карло в физике частиц высоких энергий. Все траектории гиперболических динамических систем обладают экспоненциальной неустойчивостью, и поэтому в С-системах происходит смешивание всех порядков, они имеют счетнократный лебеговский спектр и положительную энтропию Колмогорова. Эти исключительные свойства эргодичности вытекают из С-условия, введенного Аносовым. Данное условие выделяет богатый класс динамических систем, образующих открытое множество в пространстве всех динамических систем. Важным свойством С-систем оказывается то, что в них имеется счетное множество всюду плотных периодических траекторий и плотность этих траекторий экспоненциально возрастает с энтропией. Особенно интересными оказываются С-системы, определенные на торах высоких размерностей. Такие С-системы являются замечательными кандидатами для использования в вычислениях методом Монте-Карло. Недавно был построен эффективный алгоритм, позволяющий с большой скоростью генерировать длинные траектории С-систем. Эти траектории обладают хорошими статистическими свойствами и могут применяться при вычислениях в квантовой хромодинامي́ке и физике частиц высоких энергий.

Ключевые слова: С-системы Аносова, гиперболические динамические системы, энтропия Колмогорова, метод Монте-Карло, физика высоких энергий, элементарные частицы, квантовая хромодинامي́ка на решетке.

DOI: 10.4213/tmf9012

Работа была частично поддержана European Union's Horizon 2020, грант Marie Skłodowska-Curie (договор № 644121).

*Institute of Nuclear and Particle Physics, National Research Center “Demokritos”, Athens, Greece. E-mail: savvidy@inp.demokritos.gr

*Посвящается светлой памяти
академика Дмитрия Викторовича Аносова*

1. ВВЕДЕНИЕ

В своей основополагающей работе [1], посвященной геодезическим потокам на замкнутых римановых многообразиях V^n отрицательной кривизны, Д. В. Аносов подчеркивал, что основным свойством геодезического потока на таких многообразиях оказывается *равномерная неустойчивость всех траекторий*, что на языке физики означает, что в окрестности каждой фиксированной траектории ближайшие траектории ведут себя аналогично траекториям в окрестности точки перевала (см. рис. 1).

Рис. 1. Интегральные кривые в случае седловой точки $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$. Ось t задается пересечением двух плоскостей интегральных кривых, которые при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к плоскости (x, t) и при $t \rightarrow -\infty$ — к плоскости (y, t) . Остальные интегральные кривые расходятся как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Похожее поведение имеет место в окрестностях почти всех траекторий С-системы [1].

Другими словами, гиперболическая неустойчивость динамической системы $\{T^t\}$, задаваемой уравнениями¹⁾

$$\dot{w} = f(w), \quad (1)$$

проявляется при всех решениях $\delta w \equiv \omega$ уравнения в вариациях

$$\dot{\omega} = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w(t)=T^t w} \omega \quad (2)$$

в окрестности произвольной фазовой траектории $w(t) = T^t w$, где $w \in W^m$.

Экспоненциальная неустойчивость геодезических на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны исследовалась многими авторами, начиная с Лобачевского и Адамара, и особенно Хедлунгом [2] и Хопфом [3]. Концепция

¹⁾Предполагается, что на многообразии фазового пространства W^m задана инвариантная мера Лиувилля [1].

экспоненциальной неустойчивости каждой траектории динамической системы оказалась исключительно богатой, так что Аносов предложил рассматривать эту концепцию как фундаментальное свойство, определяющее новый класс динамических систем, которые он назвал С-системами²⁾. Блестящая идея рассмотреть динамические системы, обладающие *локальной и однородной гиперболической неустойчивостью всех траекторий*, апеллирует к интуиции и имеет вместе с тем весьма глубокое физическое содержание. Богатство этой концепции связано с тем, что С-системы занимают ненулевой объем в пространстве динамических систем³⁾ [1].

Аносов предъявил обширный список С-систем [1]. Важными примерами С-систем оказываются: 1) геодезические потоки на римановых многообразиях с *переменной отрицательной кривизной*; 2) С-каскады – итерации гиперболических автоморфизмов торов.

Уже из интуитивного определения С-систем становится понятно, что в этих системах имеет место очень сильная неустойчивость траекторий, и на самом деле эта неустойчивость настолько сильна, насколько это возможно в принципе [4]. Расстояние между инфинитезимально близкими траекториями увеличивается экспоненциально, и на компактном фазовом пространстве динамической системы это приводит к однородному распределению почти всех траекторий по всему фазовому пространству. Поэтому динамическая система, удовлетворяющая С-условию, обладает весьма обширными и богатыми свойствами эргодичности [1], такими как *смешивание всех порядков, счетнократный лебеговский спектр и положительная энтропия* [1].

Эти свойства вытекают из теорем, доказанных Аносовым и утверждающих, что С-системы, за одним исключением⁴⁾, являются коломгоровскими К-системами [5]–[7]. Поэтому С-условие в большинстве случаев оказывается достаточным условием, указывающим на то, что динамическая система одновременно оказывается также и К-системой. В этом смысле С-системы задают обширный и богатый список конкретных примеров К-систем [1]. В то же время имеются примеры К-систем, не являющихся С-системами, так что в пространстве векторных полей $\{f(w)\}$, задающих динамические системы $\dot{w} = f(w)$, эти два класса динамических систем пересекаются, но не совпадают (см. также ниже сноску 5).

Другим важным свойством С-систем оказывается то, что между равномерно распределенными траекториями имеется счетное множество периодических траекторий. Пространство точек периодических траекторий всюду плотно в многообразии фазового пространства W^m [1]. Картина заполнения фазового пространства С-системы периодическими траекториями и равномерно распределенными траекториями очень похожа на заполнение вещественной прямой рациональными и иррациональными числами.

Определим теперь С-условие для динамических систем с дискретным временем [1]. Определим понятие *каскада* на m -мерном компактном фазовом пространстве W^m с помощью диффеоморфизма $T: W^m \rightarrow W^m$. Итерации задаются многократным

²⁾Буква С в названии связана с тем, что эти системы удовлетворяют “С-свойству” (см. ниже формулу (3)) [1].

³⁾Это свойство контрастирует со свойствами интегрируемых систем, в которых лишь часть траекторий остаются на инвариантных торах в соответствии с теоремой Колмогорова–Арнольда–Мозера.

⁴⁾Исключением являются С-потоки, порождаемые с помощью стандартной конструкции из соответствующих С-каскадов [1] (см. также приложение).

Рис. 2. Касательный вектор $\omega \in R_w$ в точке $w \in W^2$ разлагается в сумму $R_w = X_w \oplus Y_w$, в которой пространства X_w и Y_w задаются соответствующими собственными векторами (2×2) -матрицы T (54). Автоморфизм T индуцирует отображение касательных пространств $\tilde{T}X_w = X_{T_w}$, $\tilde{T}Y_w = Y_{T_w}$. Он уменьшает расстояния в X_w и увеличивает расстояния в Y_w .

повторением действия оператора $\{T^n, -\infty < n < +\infty\}$, где n – целое число. Касательное пространство в точке $w \in W^m$ обозначается как R_w^m , а касательное векторное расслоение – как $\mathcal{R}(W^m)$. Диффеоморфизм $\{T^n\}$ индуцирует отображение касательных пространств $\tilde{T}^n: R_w^m \rightarrow R_{T^n w}^m$.

Каскад $\{T^n\}$ на m -мерном фазовом пространстве W^m называется C -каскадом [1], если любое его касательное пространство R_w^m разлагается в прямую сумму

$$C1: \quad R_w^m = X_w^k \oplus Y_w^l \quad (3)$$

таких линейных пространств X_w^k и Y_w^l , что:

$$C2: \quad \begin{aligned} \text{а) } |\tilde{T}^n \xi| &\leq a|\xi|e^{-cn}, \quad n \geq 0, & |\tilde{T}^n \xi| &\geq b|\xi|e^{-cn}, \quad n \leq 0, & \xi &\in X_w^k, \\ \text{б) } |\tilde{T}^n \eta| &\geq b|\eta|e^{cn}, \quad n \geq 0, & |\tilde{T}^n \eta| &\leq a|\eta|e^{cn}, \quad n \leq 0, & \eta &\in Y_w^l, \end{aligned}$$

где величины a , b и c положительны и одни и те же для всех $w \in W^m$ и всех $\xi \in X_w^k$, $\eta \in Y_w^l$. Длины касательных векторов $|\xi|$ и $|\eta|$ определяются римановой метрикой ds на W^m .

Линейные пространства X_w^k и Y_w^l инвариантны относительно отображения дифференцирования $\tilde{T}^n X_w^k = X_{T^n w}^k$, $\tilde{T}^n Y_w^l = Y_{T^n w}^l$ и задают *линейные пространства сжатия и растяжения* (см. рис. 2). C -условие описывает поведение всех траекторий $\tilde{T}^n \omega$ на касательном векторном расслоении $\omega \in R_w^m$. Аносов доказал, что векторные поля X_w^k и Y_w^l представляют собой непрерывные функции координаты w и что они являются векторными полями для слоений Σ^k и Σ^l , которые *трансверсальны к траекториям* $T^n w$ на W^m (см. рис. 3). Сжимающие и растягивающие слоения Σ^k и Σ^l инвариантны относительно каскада T^n в том смысле, что под действием этих преобразований слоение переходит в слоение, и в общем случае – в слоение, отличное от исходного [1].

Рис. 3. В каждой точке w С-системы касательное пространство R_w^m разлагается в прямую сумму двух линейных пространств Y_w^l и X_w^k . Растягивающие и сжимающие геодезические потоки суть γ^+ и γ^- . Растягивающие и сжимающие инвариантные слоения Σ_w^l и Σ_w^k трансверсальны к геодезическому потоку, а соответствующие им касательные пространства суть Y_w^l и X_w^k .

Интерес к гиперболическим С-системам Аносова связан с предпринятыми Крыловым попытками объяснить стремление к статистическому равновесию в системе жестких рассеивающихся сфер, а также с проблемой обоснования статистической механики [8]. Гиперболические системы проявляют сильные статистические свойства и могут помочь в понимании причины возникновения турбулентности в механике жидкости [9], неинтегрируемости классической механики Янга–Миллса [10], [11], а также динамических свойств гравитирующих систем N частиц и релаксационных явлений движения звезд в галактиках [12], [13]. Настоящая работа посвящена С-системам Аносова, заданным на торе, и их применению для генерации псевдослучайных чисел, используемых при вычислениях методом Монте-Карло [14]. Генераторы псевдослучайных чисел, основанные на С-системах, обладают хорошими статистическими свойствами [15] и применяются в программном обеспечении, используемом в ЦЕРН [16].

В следующих разделах исследуются свойства С-систем, заданных на торе, и их использование при генерации высококачественных псевдослучайных чисел для вычислений методом Монте-Карло. В разделе 2 определяется линейный диффеоморфизм на торе, который удовлетворяет С-условию, и описываются свойства распределения его периодических траекторий. В разделе 3 дается определение энтропии Колмогорова динамической системы и вычисляется значение этой энтропии для диффеоморфизмов тора. В разделе 4 показано, что интегралы по фазовому пространству можно вычислять в виде суммы по точкам бесконечно длинных периодических траекторий. В разделе 5 собраны последние результаты по эффективному применению определенной С-системы для генерации псевдослучайных чисел при компьютерных вычислениях методом Монте-Карло и по их применению в физике высоких энергий [15], [17].

2. АВТОМОРФИЗМЫ ТОРА

Рассмотрим динамическую систему T с фазовым пространством W^m , представляющим собой m -мерный тор и возникающим при факторизации евклидова пространства E^m с координатами $(w_1, \dots, w_m)$ по целочисленной решетке. Тогда систему T можно интерпретировать как линейное преобразование евклидова пространства E^m , сохраняющее решетку L точек с целочисленными координатами. Автоморфизмы тора задаются линейными преобразованиями

$$w_i \rightarrow \sum_{j=1}^m T_{i,j} w_j \pmod{1}, \quad (4)$$

в которых целочисленная матрица T имеет единичный детерминант, $\text{Det } T = 1$. Чтобы автоморфизм тора (4) удовлетворял С-условию, необходимо и достаточно, чтобы матрица T не имела собственных значений на единичной окружности. Поэтому спектр $\{\Lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ матрицы T должен удовлетворять следующим двум условиям [1]:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{Det } T = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m = 1; \\ 2) \quad & |\lambda_i| \neq 1 \quad \forall i. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку матрица T имеет единичный детерминант, мера Лиувилля $d\mu = dw_1 \cdots dw_m$ инвариантна относительно действия T . Обратная матрица T^{-1} также целочисленная, поскольку $\text{Det } T = 1$. Тем самым T оказывается автоморфизмом тора W^m на себя. У этого автоморфизма имеется фиксированная точка p , соответствующая началу координат в пространстве E^m .

Условия (5) на собственные значения матрицы T оказываются достаточными для доказательства того факта, что данная система лежит в классе С-систем Аносова⁵⁾. Для этого разобьем собственные значения матрицы T на два набора $\{\lambda_\alpha\}$ и $\{\lambda_\beta\}$ с модулями меньше и больше единицы:

$$0 < |\lambda_\alpha| < 1 < |\lambda_\beta|. \quad (6)$$

Рассмотрим два семейства плоскостей $X = \{X_\alpha\}$ и $Y = \{Y_\beta\}$, параллельных соответствующим собственным векторам $\{e_\alpha\}$ и $\{e_\beta\}$. Отображение дифференцирования $\tilde{T}$ отображает эти плоскости сами на себя, сжимая расстояния между точками на плоскости X_α в λ_α раз и растягивая расстояния между точками на плоскости Y_β в λ_β раз (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} |\tilde{T}\xi| &\leq |\lambda_\alpha| |\xi|, & \xi \in X_\alpha, \\ |\tilde{T}\eta| &\geq |\lambda_\beta| |\eta|, & \eta \in Y_\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому автоморфизм T удовлетворяет С-условию (3) с $a = b = 1$, $e^c = \lambda$, где

$$\lambda = \min \left(\frac{1}{\max |\lambda_\alpha|}, \min |\lambda_\beta| \right). \quad (8)$$

⁵⁾Если среди собственных значений матрицы T нет корней из единицы, то автоморфизм T тора задает К-систему [18]. Следовательно, некоторые из собственных значений матрицы T могут лежать на единичной окружности, в отличие от С-условий (5). Поэтому К-системы занимают другую область в пространстве динамических систем $\{\dot{w} = f(w)\}$. В пространствах размерностей 2 и 3 условие (5) эквивалентно отсутствию собственных значений, совпадающих с корнями из единицы, поэтому в этих случаях К- и С-условия совпадают, но в размерностях $m \geq 4$ имеются К-системы, не являющиеся С-системами [1].

Рис. 4. Матрица T (54) имеет два иррациональных собственных значения $\lambda_\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ и $\lambda_\beta = (3 + \sqrt{5})/2$. Соответствующие собственные векторы $\{e_\alpha\}$ и $\{e_\beta\}$ задают два семейства параллельных прямых $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\beta\}$ на двумерном торе, которые инвариантны относительно автоморфизмов T . Автоморфизм T уменьшает расстояния между точками на прямых, принадлежащих множеству $\{X_\alpha\}$, и увеличивает расстояния между точками на прямых, принадлежащих множеству $\{Y_\beta\}$. а – Параллельные прямые множеств $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\beta\}$; б – положения этих прямых после действия автоморфизма T .

Другими словами, инвариантные плоскости матрицы T , для которых собственные значения лежат внутри или вне единичной окружности, задают сжимающиеся или расширяющиеся инвариантные пространства условия С2 (3), так что фазовые траектории динамической системы расширяются или сжимаются при преобразовании T по экспоненциальному закону. Слоения Σ_α и Σ_β , ортогональные фазовым траекториям, разбиваются на сжимающиеся и расширяющиеся слоения, а касательные плоскости к этим слоениям образуют сжимающиеся и расширяющиеся плоскости $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\beta\}$. Слоения могут быть построены, если последовательно заполнить евклидово пространство E^m плоскостями, параллельными $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\beta\}$, а затем спроецировать их обратно на тор W^m .

Рассмотрим образ множества F пространства W^m , возникающий при преобразовании T^n . Этот образ представляет собой гиперболический поворот множества F : его точки растягиваются в направлениях e_β в $|\lambda_\beta|^n = e^{n \ln |\lambda_\beta|}$ раз и сжимаются в направлении e_α в $|\lambda_\alpha|^n = e^{-n \ln (1/|\lambda_\alpha|)}$ раз. В результате при больших n образ множества $T^n F$ будет представляться длинной лентой, вытянутой в направлении максимального собственного значения $\tilde{\lambda}_\beta$ и равномерно распределенной по фазовому пространству W^m , в виде, схожем с однородно распределенной траекторией уравнения $\dot{w} = \Omega$ на торе с нерезонансным вектором Ω ⁶⁾. Поэтому при больших n мера пересечения образов $T^n F$ с произвольной областью $G \subset W^m$ пропорциональна ее объему $\mu(G)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n F \cap G) = \mu(F)\mu(G). \quad (9)$$

⁶⁾Вектор Ω не является резонансным, если уравнение $n_1\Omega_1 + \dots + n_m\Omega_m = 0$ не имеет решений с целыми $(n_1, \dots, n_m)$.

Это уравнение выражает *свойство смешивания* динамической системы T . Если ввести множество функций $\{g(w)\}$ на фазовом пространстве W^m , то уравнение (9) можно представить в виде⁷⁾ [19]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(T^n w) g(w) d\mu(w) = \int f(w) d\mu(w) \int g(w) d\mu(w). \quad (10)$$

Это свойство известно в физике как факторизация, или расщепление, двухточечной корреляционной функции. Так как в С-системах наблюдается перемешивание всех порядков [1], получается, что в С-системах происходит факторизация корреляционных функций произвольного порядка.

Сильная неустойчивость траекторий динамической С-системы приводит к тому, что ее поведение имеет статистическую природу [20]. В результате экспоненциальной неустойчивости движения в фазовом пространстве среднее по времени от функции $g(w)$ на W^m

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n w) \quad (11)$$

имеет поведение, характерное для суперпозиции величин, слабо связанных статистически. Поэтому для С-систем на торе было показано, что отклонения средних по времени (11) от интеграла по фазовому пространству

$$\int_{W^m} g(w) dw, \quad (12)$$

умноженные на $\sqrt{N}$, подчиняются при $N \rightarrow \infty$ гауссову закону распределения [20]:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left\{ w : \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n w) - \int_{W^m} g(v) dv \right) < z \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2\sigma_g^2} dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Появление множителя $\sqrt{N}$ можно понять с помощью следующих рассуждений. Разность в круглых скобках в (13) ограничена сверху с помощью распределения Колмогорова $D_N(T)$ [14], [21]:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n w) - \int_{W^m} g(v) dv \right| \leq C \frac{D_N(T)}{N}, \quad (14)$$

где C – постоянная, а $D_N(T)$ растёт как $\sqrt{N}$. Поэтому после умножения величины в круглых скобках в (13) на $\sqrt{N}$ она будет ограничена сверху константой. Теорема утверждает, что отклонения временных средних от пространственных средних, умноженное на корень из N , при больших N имеет гауссово распределение.

⁷⁾Уравнение (9) вытекает из (10), если рассмотреть функции на фазовом пространстве, равные единице во всех точках, принадлежащих множествам F и G , и равные нулю в точках, не принадлежащих этим множествам.

В нижеследующих разделах будет продемонстрировано богатство периодических траекторий С-систем, которое определяется их энтропией [1], [22]–[27]. В следующем разделе приводится определение энтропии Колмогорова и вычисляется ее значение для различных автоморфизмов тора.

3. ЭНТРОПИЯ АВТОМОРФИЗМОВ T

Колмогоров в работах [5], [6] ввел класс динамических систем, которые он называл квазирегулярными, или К-системами, и определил понятие энтропии для таких систем. Рассмотрим динамические системы с дискретным временем. Пусть $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$, где I – конечное или счетное множество, – измеряемое разбиение фазового пространства W^m (на пространстве W^m задана положительно определенная мера μ), т. е.

$$\mu\left(W^m \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0, \quad \mu(A_i \cap A_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (15)$$

Тогда энтропию разбиения α можно определить следующим выражением:

$$h(\alpha) = - \sum_{i \in I} \mu(A_i) \ln \mu(A_i). \quad (16)$$

Оказывается, что в случае, когда два разбиения α_1 и α_2 различаются на множестве меры нуль, их энтропии совпадают. *Наименьшее разбиение*

$$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_k \quad (17)$$

набора разбиений $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ задается пересечением всех их образующих множеств A_i :

$$\alpha = \left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \mid A_i \in \alpha_i \text{ для всех } i \right\}. \quad (18)$$

Энтропией разбиения α относительно автоморфизма T определяется предел [5]–[7], [18], [28], [29]

$$h(\alpha, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(\alpha \vee T\alpha \vee \dots \vee T^{n-1}\alpha)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Это число совпадает с энтропией наименьшего разбиения

$$\beta = \alpha \vee T\alpha \vee \dots \vee T^{n-1}\alpha, \quad (20)$$

которое получается с помощью итераций разбиения α под действием автоморфизма T . Наконец, определим энтропию автоморфизма T как точную верхнюю грань:

$$h(T) = \sup_{\{\alpha\}} h(\alpha, T), \quad (21)$$

где максимум вычисляется по всем конечным измеряемым разбиениям $\{\alpha\}$ пространства W^m . Из этого определения следует, что вычисление этого числа для данной динамической системы представляется исключительно сложной задачей. Теорема, доказанная Колмогоровым [5], [6], утверждает, что если удастся найти так

называемое *образующее разбиение* β для автоморфизма T , обладающее свойством⁸⁾

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M}, \quad (22)$$

где $\mathcal{M}(\beta)$ – сигма-алгебра разбиения $\beta = \{B_i\}_{i \in I}$, а $\mathcal{M}$ – сигма-алгебра всех измеримых подмножеств пространства W^m , тогда

$$h(T) = h(\beta, T). \quad (23)$$

Отсюда следует, что точная верхняя грань в (21) на самом деле достигается на образующем разбиении β . В некоторых случаях построение образующего разбиения β позволяет явно вычислить энтропию данной динамической системы [30], [31].

Имеются альтернативные способы вычисления энтропии С-системы. Наиболее удобным для целей настоящей работы способом ее вычисления оказывается взятие интеграла по всему фазовому пространству от логарифма скорости расширения объема $\lambda(w)$ l -мерного инфинитезимального куба, погруженного в слоение Σ_w^l . Отображение дифференцирования $\tilde{T}$ отображает линейное пространство Y_w^l в пространство Y_{Tw}^l , и если скорость расширения объема l -мерного куба равна $\lambda(w)$, то имеем [1], [7], [29]–[31]

$$h(T) = \int_{W^m} \ln \lambda(w) dw. \quad (24)$$

Здесь объем пространства W^m считается равным единице. Для автоморфизмов тора (4) коэффициент $\lambda(w)$ не зависит от координат фазового пространства w и равен произведению собственных значений $\{\lambda_\beta\}$ с абсолютными величинами, большими единицы (6):

$$\lambda(w) = \prod_{\beta=1}^l \lambda_\beta. \quad (25)$$

Таким образом, для автоморфизмов Аносова тора (4), (5) с помощью соотношений (24), (25) можно вычислить энтропию, которая оказывается равной сумме

$$h(T) = \sum_{|\lambda_\beta| > 1} \ln |\lambda_\beta|. \quad (26)$$

Интересно понять, что происходит, если автоморфизм тора задается k -й степенью T^k матрицы T . В этом случае автоморфизм порождает каскад вида $\{(T^k)^n\}$, и можно задаться вопросом об энтропии этого автоморфизма. Ответ на этот вопрос

⁸⁾Сигма-алгебра $\mathcal{M}(\alpha)$ на W^m задается семейством подмножеств $\{A_i\}_{i \in I} \in \alpha$ разбиения α , которое замкнуто относительно операций объединения счетного числа подмножеств и операции дополнения $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

можно получить с помощью вычисления собственных значений этой новой матрицы, и, таким образом,

$$h(T^k) = \sum_{|\lambda_\beta| > 1} \ln |\lambda_\beta|^k = k \sum_{|\lambda_\beta| > 1} \ln |\lambda_\beta| = kh(T). \quad (27)$$

Отсюда видно, что энтропия возрастает линейно с показателем степени матрицы k , и, как будет показано ниже, такой способ повышения энтропии С-систем, применяемый при вычислениях методом Монте-Карло, оказывается весьма “дорогостоящим” и требующим длительного времени для своей реализации.

В следующем разделе будет представлено альтернативное вычисление приведенных выше результатов, в котором используется связь энтропии с разнообразным и богатым набором периодических траекторий С-систем [1], [25]–[27].

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ С-СИСТЕМ АНОСОВА

Покажем теперь, что в С-системе имеется счетное множество периодических траекторий [1]. Накрытие E^m тора W^m позволяет перевести любое множество точек на торе в множество точек в евклидовом пространстве E^m , а пространство функций на торе – в периодические функции на E^m . Каждой замкнутой кривой γ на торе отвечает кривая $\phi: [0, 1] \rightarrow E^m$, для которой $\phi(0) = \phi(1) \pmod{1}$, и если $\phi(1) - \phi(0) = (p_1, \dots, p_m)$, то соответствующие числа накруток на торе равны $p_i \in Z$.

Все траектории с рациональными координатами $(w_1, \dots, w_m)$, и только такие траектории, являются периодическими траекториями автоморфизмов тора (4). Зафиксируем целое число N . Тогда точки на торе с координатами с знаменателем N образуют конечное множество $\{p_1/N, \dots, p_m/N\}$. Автоморфизм (5) с целыми элементами переводит это множество точек само в себя, а потому все эти точки принадлежат периодическим траекториям. Пусть $w = (w_1, \dots, w_m)$ – точка траектории с периодом $n > 1$. Тогда

$$T^n w = w + p, \quad (28)$$

где p – целочисленный вектор. Это уравнение относительно w имеет ненулевой определитель, а потому компоненты w оказываются рациональными числами.

Итак, периодические траектории автороморфизма T , имеющие период n , задаются решением уравнения (28), в котором $p \in Z^m$ – целочисленный вектор, а $w = (w_1, \dots, w_m) \in W^m$. Варьируя p в Z^m , получим, что решения уравнения (28) задают фундаментальную область D_n в накрывающем евклидовом пространстве E^m , имеющую объем $\mu(D_n) = 1/|\text{Det}(T^n - 1)|$. Поэтому число всех точек N_n на периодических траекториях с периодом n задается соответствующим обратным объемом [22]–[26]:

$$N_n = |\text{Det}(T^n - 1)| = \left| \prod_{i=1}^m (\lambda_i^n - 1) \right|. \quad (29)$$

С помощью теоремы Боэна [26], [27], утверждающей, что энтропия автоморфизма T может быть представлена в терминах числа N_n , задаваемого соотношением (29),

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_n, \quad (30)$$

заново получим формулу для энтропии (26) автоморфизма T в терминах его собственных значений:

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^m (\lambda_i^n - 1) \right| \right) = \sum_{|\lambda_\beta| > 1} \ln |\lambda_\beta|. \quad (31)$$

Обозначим число периодических траекторий, имеющих n точек, через $\pi(n)$. Тогда число всех точек N_n на периодических траекториях с периодом n можно представить в следующем виде:

$$N_n = \sum_{l \mid n} l \pi(l), \quad (32)$$

где l – делитель n . Снова применяя результат Бозна (30), получим

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{l \mid n} l \pi(l) \right) \quad (33)$$

или

$$N_n = \sum_{l \mid n} l \pi(l) \sim e^{nh(T)}. \quad (34)$$

Этот результат можно переформулировать как утверждение о том, что число точек N_n на периодических траекториях периода n возрастает экспоненциально с ростом энтропии.

Исключив траектории, являющиеся делителями n (например, $T^n w = T^{l_2}(T^{l_1}w)$, где $n = l_1 l_2$ и $T^{l_i} w = w$), получим число периодических траекторий с периодом n . Для этого надо представить $\pi(n)$ в следующем виде:

$$\pi(n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{l \mid n} l \pi(l) - \sum_{l \mid n, l < n} l \pi(l) \right), \quad (35)$$

и тогда из (35) и (34) получим, что

$$\pi(n) \sim \frac{e^{nh(T)}}{n} \left(1 - \frac{\sum_{l \mid n, l < n} l \pi(l)}{\sum_{l \mid n} l \pi(l)} \right) \sim \frac{e^{nh(T)}}{n}, \quad (36)$$

поскольку отношение в скобках строго меньше единицы. Из этого результата следует, что системы с большей энтропией $\Delta h = h(T_1) - h(T_2) > 0$ более плотно заселены периодическими траекториями с тем же самым периодом n :

$$\frac{\pi_1(n)}{\pi_2(n)} \sim e^{n\Delta h}. \quad (37)$$

Следующее важное следствие теоремы Бозна [26], [27] гласит, что

$$\int_{W^m} f(w) d\mu(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \sum_{w \in \Gamma_n} f(w), \quad (38)$$

где Γ_n – множество всех точек на траекториях с периодом n . Полное число точек в множестве Γ_n было ранее определено как N_n .

Этот результат приводит к важным следствиям для вычисления интегралов на многообразии W^m , поскольку, как следует из (38), интегрирование в данном случае сводится к суммированию по всем точкам периодических траекторий. Интересно рассмотреть периодические траектории с периодом n , который оказывается простым числом. Поскольку каждая бесконечная подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же самому пределу, в соотношении (38) можно рассматривать только члены с простыми периодами. В этом случае $N_n = n\pi(n)$ и формула (38) принимает вид

$$\int_{W^m} f(w) d\mu(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi(n)} \sum_{j=1}^{\pi(n)} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i w_j), \quad (39)$$

где суммирование идет по всем точкам на траектории $T^i w_j$ и по всем различным траекториям с периодом n , занумерованным индексом j . Здесь w_j – начальная точка траектории j^9 . Из предыдущего рассмотрения следует, что сходимости имеет место, если производить суммирование по всем траекториям с одинаковым периодом n . Можно предположить, что все $\pi(n)$ траекторий с достаточно большим периодом n дают одинаковые вклады в сумму (39), а потому интегрирование в выражении (39) можно свести к сумме по фиксированной траектории

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i w). \quad (40)$$

Такая процедура приведения выглядит вполне правдоподобной, но даже в этом случае вычисление выражения (40) вряд ли представляется возможным, поскольку периоды С-систем, применяемых при вычислениях методом Монте-Карло, имеют порядок $n \sim 10^{4000}$ [15]. Поэтому вычисления интегралов методом Монте-Карло выполняются на некоторых отрезках длины N внутри длинных траекторий [21], [32]–[34]. В этом случае приближение интегралов регулируется колмогоровским распределением $D_N(T)$ в формуле (14). Поведение $D_N(T)$ как функции от N существенно зависит от свойств динамической системы T , поскольку распределение увеличивается медленнее в С-системах, периодические траектории которых распределены однородно и всюду плотно в фазовом пространстве W^m [1], [14]. В связи с этим было высказано предположение, что С-системы Аносова [1], заданные на торе очень высокой размерности, прекрасно подходят на роль генераторов псевдослучайных чисел (ГПСЧ) [14]. В следующем разделе мы продемонстрируем, как эти результаты могут применяться в практических вычислениях, и в особенности в физике частиц высоких энергий.

5. ПРИМЕНЕНИЕ С-СИСТЕМ АНОСОВА В ВЫЧИСЛЕНИЯХ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Современные мощные компьютеры открыли новую эру в применении метода Монте-Карло [14], [21], [32]–[37] при моделировании сложных физических систем с большим числом степеней свободы. Вычисления методом Монте-Карло пред-

⁹⁾ Ответ на вопрос о том, лежат ли два вектора w_1 и w_2 на одной или на разных траекториях, оказывается сложной математической задачей.

ставляют собой важный вычислительный прием, находящий приложения в самых разных областях естественных наук, в том числе в физике частиц и в ядерной физике, квантовой физике, статистической физике, квантовой химии, науке о материалах и в многочисленных междисциплинарных применениях. В основе вычислений методом Монте-Карло лежат ГПСЧ.

Обычно псевдослучайные числа генерируются с помощью детерминистской рекуррентной процедуры [14], [21], [32]–[34]. Такая процедура имеет своим результатом псевдослучайные числа, и построение ГПСЧ, производящих последовательности высокого качества, оказывается весьма сложной задачей. Хотя многочисленные ГПСЧ, построенные в последнее десятилетие, удовлетворяют большинству требований и находят многочисленные применения в компьютерных вычислениях, в каждом отдельном случае такие генераторы имеют слабые стороны, искажающие результаты вычислений [38], что делает их менее пригодными в таких исключительно сложных компьютерных вычислениях, как те, которые проводятся в экспериментах по физике высоких энергий в ЦЕРН и других исследовательских центрах. ГПСЧ играют существенную роль в программах ROOT и GEANT, применяемых при моделировании экспериментов и при статистической обработке экспериментальных данных [16].

Чтобы удовлетворить этим высоким требованиям, необходимо обеспечить прочное теоретическое и математическое обоснование соответствующего ГПСЧ, который должен обладать длинным периодом, быть статистически устойчивым, эффективным, достаточно компактным, он также должен допускать возможность изменения и настройки своих внутренних характеристик, чтобы обеспечить возможность его применения при решении конкретных задач высокой сложности.

В работе [14] было высказано предположение о том, что С-системы Аносова [1], заданные на торе высокой размерности, должны быть замечательными кандидатами на роль ГПСЧ. С-система, рассмотренная в работе [14], является системой, в которой реализуется линейный автоморфизм T , задаваемый соотношением (4)¹⁰:

$$w_i \rightarrow \sum_{j=1}^N T_{i,j} w_j \pmod{1}. \quad (41)$$

Частный выбор матрицы в работе [39] при всех $N \geq 3$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3+s & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & N-1 & N-2 & \dots & 2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Матрица T с целочисленными элементами имеет размер $N \times N$ и имеет единичный определитель. Она задается рекуррентными соотношениями, так как матрица размера $(N+1) \times (N+1)$ содержит внутри себя матрицу размера $N \times N$. Единственным изменяемым элементом матрицы служит $T_{32} = 3+s$, где s следует выбрать

¹⁰) Для удобства обозначений в этом разделе размерность m фазового пространства W^m обозначена через N .

Рис. 5. Логарифм модулей собственных значений MIXMAX матрицы порядка $N = 256$. Площадь под кривой пропорциональна энтропии (26).

таким способом, чтобы предотвратить попадание собственных значений на единичную окружность. Чтобы получить псевдослучайные векторы $w_n = T^n w$, следует выбрать начальный вектор $w = (w_1, \dots, w_m)$, называемый *зерном* и содержащий хотя бы одну ненулевую компоненту, таким образом, чтобы не попасть в начало координат – фиксированную точку автоморфизма T .

Собственные значения матрицы T (42) широко разбросаны при всех N (см. рис. 5, взятый из работы [15]). Спектр, таким образом, оказывается “многомасштабным”, с траекториями, демонстрирующими экспоненциальную неустойчивость на различных масштабах [14]. Энтропия отображения T удовлетворяет ограничению [15]

$$\frac{4}{9}N \ln 4 < h < N \ln 4, \quad (43)$$

из которого следует, что энтропия отображения T возрастает линейно пропорционально порядку N . Из обсуждения в предыдущем разделе можно заключить, что в данном случае имеется богатый набор периодических траекторий с большими периодами и множество таких траекторий имеет мощность, возрастающую экспоненциально с ростом порядка N матрицы T . Для матрицы порядка $N = 256$ энтропия имеет вид $h \simeq 164.4$ [15], и, таким образом, получим

$$\pi(n) \sim \frac{e^{164n}}{n}. \quad (44)$$

При расчете марковских цепей методом Монте-Карло следует пользоваться генератором случайных чисел с временем декорреляции $\tau_0 = 1/h$, которое должно быть гораздо меньше временных корреляций в марковской цепи [14].

При компьютерной реализации автоморфизма (41) исходный вектор имеет рациональные компоненты $u_i = a_i/p$, где a_i и p – натуральные числа. Поэтому оказывается удобно представлять числа u_i с помощью их числителей a_i в памяти компьютера и определять итерации в терминах a_i [40]:

$$a'_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} a_j \pmod{p}. \quad (45)$$

Если знаменатель p выбирается в виде простого числа [40], то рекуррентные соотношения реализуются на расширенных полях Галуа $GF[p^N]$ [41], [42], что позволяет найти период траектории, который определяется числом p и свойствами характеристических многочленов $P(x)$ матрицы T [40]. Если характеристический многочлен $P(x)$ матрицы T оказывается неразложимым относительно расширенного поля Галуа $GF[p^N]$, то [40], [42], [43]

$$T^q = p_0 \mathbb{I}, \quad \text{где } q = \frac{p^N - 1}{p - 1}, \quad (46)$$

где p_0 – свободный член многочлена $P(x)$, одновременно являющийся простым элементом поля $GF[p]$. Поскольку матрица T имеет $p_0 = \text{Det } T = 1$, многочлен $P(x)$ матрицы T не может быть простым. Решение этой задачи, предложенное в работе [15], состоит в том, чтобы определить необходимые и достаточные условия, при которых период q достигает своего максимума. Эти условия имеют следующий вид:

- 1) $T^q = \mathbb{I} \pmod{p}$, где $q = (p^N - 1)/(p - 1)$;
- 2) $T^{q/r} \neq \mathbb{I} \pmod{p}$ для всех r , являющихся простыми делителями числа q .

Первое условие эквивалентно условию неприводимости характеристического многочлена. Второе условие можно проверить в случае, когда доступна целочисленная факторизация q [15], при этом период последовательности равен (46) и не зависит от выбора зерна рекурсии. Имеются в точности $p - 1$ различных траекторий, которые в совокупности заполняют все узлы решетки $GF[p^N]$:

$$q(p - 1) = p^N - 1. \quad (47)$$

В работе [15] значение p было выбрано равным $p = 2^{61} - 1$ – максимальному числу Мерсенны, которое выражается как натуральное число в архитектуре современных 64-битных компьютеров. Для матрицы порядка $N = 256$ период в этом случае равен $q \approx 10^{4600}$.

В работе [15] предложены эффективный алгоритм, позволяющий свести матричное умножение к $O(N)$ операциям, и способ его внедрения в программное обеспечение современных компьютеров. Другое достоинство этой реализации состоит в том, что она позволяет совершать “скачки” в произвольную точку периодической траектории без предварительного вычисления всех предшествующих координат данной траектории, имеющей обычно громадный период $q \approx 10^{4600}$. Этот генератор случайных чисел MIXMAX теперь доступен в своей портативной версии на языке C на сайте herforge.org [17]; он внедрен в программные обеспечения ROOT и GEANT, которые широко используется в экспериментах, проводимых в ЦЕРН [16].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор настоящей работы имел счастливую возможность встретиться с профессором Дмитрием Викторовичем Аносовым в Математическом институте им. В. А. Стеклова в 1986 г. и обсудить с ним его фундаментальные работы по гиперболическим динамическим системам. Неизгладимое впечатление оставила удивительная простота и ясность, с которой профессор Аносов объяснял сложные математические конструкции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе [1] Аносов показал, как вложить произвольный С-каскад на торе в некоторый С-поток. Вложение задавалось отождествлением (48), а соответствующий С-поток на гладком римановом многообразии W^{m+1} с метрикой (56) задавался уравнениями (50). Исследуем геодезический поток на том же самом римановом многообразии W^{m+1} . Геодезический поток имеет другую динамику (57), и, как будет показано ниже, в нем имеются интересные гиперболические компоненты, отличные от (50).

Рассмотрим С-каскад на торе W^m (см. определение в разделе 2), увеличим размерность m на единицу, построив цилиндр $W^m \times [0, 1]$, где $[0, 1] = \{u \mid 0 \leq u \leq 1\}$, и отождествим $W^m \times \{0\}$ с $W^m \times \{1\}$ по формуле

$$(w, 1) \equiv (Tw, 0). \quad (48)$$

Здесь T – диффеоморфизм (4):

$$w^i \rightarrow \sum T_{i,j} w^j \pmod{1}. \quad (49)$$

При этом компактное риманово многообразие обладает структурой расслоения с базой S^1 и слоями, изоморфными W^m (см. рис. 6). Локальными координатами на многообразии W^{m+1} являются $\tilde{w} = (w^1, \dots, w^m, u)$.

С-поток T^t на многообразии W^{m+1} задается уравнениями [1]

$$\frac{dw^1}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dw^m}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = 1. \quad (50)$$

Для такого потока касательное пространство $R_{\tilde{w}}^{m+1}$ представляется прямой суммой трех подпространств – линейных подпространств сжатия и расширения $X_{\tilde{w}}^k$ и $Y_{\tilde{w}}^l$ и пространства $Z_{\tilde{w}}$:

$$R_{\tilde{w}}^{m+1} = X_{\tilde{w}}^k \oplus Y_{\tilde{w}}^l \oplus Z_{\tilde{w}}. \quad (51)$$

Линейное пространство $X_{\tilde{w}}^k$ представляет собой касательное пространство слоя $W^m \times u$ – оно параллельно собственным векторам, отвечающим собственным значениям, лежащим внутри единичной окружности ($0 < |\lambda_\alpha| < 1$), а пространство $Y_{\tilde{w}}^l$ является касательным к слою $W^m \times u$ – оно параллельно собственным векторам, отвечающим собственным значениям, лежащим вне единичной окружности ($1 < |\lambda_\beta|$). Подпространство $Z_{\tilde{w}}$ коллинеарно вектору скорости в фазовом пространстве (50). Под действием отображения дифференцирования (50) векторы (58) из $X_{\tilde{w}}^k$ и $Y_{\tilde{w}}^l$ соответственно сжимаются и растягиваются:

$$|\tilde{T}^t v_1| = \lambda_2^t |v_1|, \quad |\tilde{T}^t v_2| = \lambda_1^t |v_2|. \quad (52)$$

Это отождествление пространств сжатия и растяжения показывает, что отображение (50) действительно задает С-поток [1].

Также интересно исследовать геодезический поток на римановом многообразии $V^n \equiv W^{m+1}$ ($n = m + 1$). Уравнения геодезического потока на V^n

$$\frac{d^2 \tilde{w}^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\tilde{w}^\nu}{dt} \frac{d\tilde{w}^\rho}{dt} = 0 \quad (53)$$

отличаются от уравнений потока, задаваемых уравнениями (50), и наша цель состоит в определении того, проявляет ли данный геодезический поток свойства С-потока. Ответ на этот вопрос не очевиден и требует исследования структуры кривизны многообразия V^n . Если все секционные кривизны на V^n отрицательны, то геодезический поток задает С-поток [1].

Для простоты рассмотрим двумерный случай, задаваемый матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Метрика на соответствующем многообразии V^3 задается формулой [44]

$$ds^2 = e^{2u}[\lambda_1 dw^1 + (1 - \lambda_1) dw^2]^2 + e^{2u}[\lambda_2 dw^1 + (1 - \lambda_2) dw^2]^2 + du^2 = g_{\mu\nu} d\tilde{w}^\mu d\tilde{w}^\nu,$$

в которой $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ – собственные значения матрицы (54), а также выполнены соотношения $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$. Метрика инвариантна относительно преобразования

$$w^1 = 2w'^1 - w'^2, \quad w^2 = -w'^1 + w'^2, \quad u = u' - 1 \quad (55)$$

и тем самым совместна с отождествлением (48). Тензор метрики имеет вид

$$g_{\mu\nu}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2+2u} + \lambda_2^{2+2u} & (1 - \lambda_1)\lambda_1^{1+2u} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{1+2u} & 0 \\ (1 - \lambda_1)\lambda_1^{1+2u} + (1 - \lambda_2)\lambda_2^{1+2u} & (1 - \lambda_1)^2\lambda_1^{2u} + (1 - \lambda_2)^2\lambda_2^{2u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

а соответствующие геодезические уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{w}^1 + 2 \frac{(\lambda_1 - 1) \ln \lambda_1}{\lambda_1 + 1} \dot{w}^1 \dot{u} - 4 \frac{(\lambda_1 - 1) \ln \lambda_1}{\lambda_1 + 1} \dot{w}^2 \dot{u} &= 0, \\ \ddot{w}^2 - 2 \frac{(\lambda_1 - 1) \ln \lambda_1}{\lambda_1 + 1} \dot{w}^2 \dot{u} - 4 \frac{(\lambda_1 - 1) \ln \lambda_1}{\lambda_1 + 1} \dot{w}^1 \dot{u} &= 0, \\ \ddot{u} + \frac{(1 - \lambda_1^{4u+4}) \ln \lambda_1}{\lambda_1^{2u+2}} \dot{w}^1 \dot{w}^1 + 2 \frac{(1 + \lambda_1^{4u+3})(\lambda_1 - 1) \ln \lambda_1}{\lambda_1^{2u+2}} \dot{w}^1 \dot{w}^2 + \\ + \frac{(1 - \lambda_1^{4u+2})(\lambda_1 - 1)^2 \ln \lambda_1}{\lambda_1^{2u+2}} \dot{w}^2 \dot{w}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Можно проверить, что эти уравнения инвариантны относительно преобразования (55). Для исследования стабильности геодезического потока необходимо вычислить секционные кривизны. Выберем ортогональную систему отсчета с осями в направлениях линейных подпространств $X_{\tilde{w}}^1$, $Y_{\tilde{w}}^1$ и $Z_{\tilde{w}}$. Соответствующие векторы имеют вид

$$v_1 = (\lambda_1 - 1, \lambda_1, 0), \quad v_2 = (\lambda_2 - 1, \lambda_2, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1), \quad (58)$$

и в метрике (56) их длины равны

$$|v_1|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_2^{2u}, \quad |v_2|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1^{2u}, \quad |v_3|^2 = 1. \quad (59)$$

Соответствующие секционные кривизны суть

$$\begin{aligned} K_{12} &= \frac{R_{\mu\nu\lambda\rho} v_1^\mu v_2^\nu v_1^\lambda v_2^\rho}{|v_1 \wedge v_2|^2} = \ln^2 \lambda_1, \\ K_{13} &= \frac{R_{\mu\nu\lambda\rho} v_1^\mu v_3^\nu v_1^\lambda v_3^\rho}{|v_1 \wedge v_3|^2} = -\ln^2 \lambda_2, \\ K_{23} &= \frac{R_{\mu\nu\lambda\rho} v_2^\mu v_3^\nu v_2^\lambda v_3^\rho}{|v_2 \wedge v_3|^2} = -\ln^2 \lambda_1. \end{aligned} \quad (60)$$

Из приведенных выше уравнений следует, что геодезический поток экспоненциально неустойчив в плоскостях $(1, 3)$ и $(2, 3)$ и стабилен в плоскости $(1, 2)$. Это поведение дополнительно к поведению потока (50), который неустойчив в плоскости $(1, 2)$ и стабилен в плоскостях $(1, 3)$ и $(2, 3)$. Скалярная кривизна имеет вид

$$R = R_{\mu\nu\lambda\rho} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} = 2(K_{12} + K_{13} + K_{23}) = -2\ln^2 \lambda_1 = -2h(T)^2, \quad (61)$$

где $h(T)$ – энтропия автоморфизма T (54).

Благодарности. Автор благодарит Л. Монете, Й. Апостолакиса, Дж. Харвея, О. Азатряна, О. Бабуяна, Р. Погосяна, Р. Манвеляна и К. Саввиди за ценные обсуждения. Автор благодарит за теплое гостеприимство Отделение PH-SFT CERN и Национальную лабораторию им. А. Алиханяна (г. Ереван), где была выполнена часть настоящей работы.

Список литературы

- [1] Д. В. Аносов, *Тр. МИАН*, **90** (1967), 3–210.
- [2] G. A. Hedlund, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45**:4 (1939), 241–246.
- [3] E. Hopf, *Math. Ann.*, **117** (1940), 590–608.
- [4] Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, *УМН*, **22**:5(137) (1967), 107–172.
- [5] А. Н. Колмогоров, *Докл. АН СССР*, **119**:5 (1958), 861–865.
- [6] А. Н. Колмогоров, *Докл. АН СССР*, **124**:4 (1959), 754–755.
- [7] Я. Г. Синай, *Докл. АН СССР*, **124**:4 (1959), 768–771.
- [8] Н. С. Крылов, *Работы по обоснованию статистической физики*, Из-во АН СССР, М., 1950.
- [9] V. Arnold, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **16**:1 (1966), 319–361.
- [10] G. K. Savvidy, *Phys. Lett. B*, **130**:5 (1983), 303–307.
- [11] G. Savvidy, *Nucl. Phys. B*, **246**:2 (1984), 302–304.
- [12] V. G. Gurzadyan, G. K. Savvidy, *Astron. Astrophys.*, **160** (1986), 203–210.
- [13] G. W. Gibbons, *Class. Quantum Grav.*, **33**:2 (2015), 025004, 14 pp., arXiv: 1508.06755.
- [14] G. K. Savvidy, N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidy, *J. Comput. Phys.*, **97**:2 (1991), 566–572; *On the Monte Carlo simulation of physical systems*, Preprint EFI-865-16-86-YEREVAN, EFI, Yerevan, 1986.
- [15] K. G. Savvidy, *Comput. Phys. Commun.*, **196** (2015), 161–165, arXiv: 1404.5355.
- [16] *MIXMAX Network Meeting*, <https://indico.cern.ch/event/404547>; *The ROOT project*, <http://ph-dep-sft.web.cern.ch/project/root>; *The GEANT4 project*, <http://ph-dep-sft.web.cern.ch/project/geant4>.
- [17] *European Union's Horizon 2020*, <http://mixmax.hepforge.org>; <http://www.inp.demokritos.gr/~savvidy/mixmax.php>.

- [18] В. А. Рохлин, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **28**:4 (1964), 867–874.
- [19] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [20] В. П. Леонов, *Докл. АН СССР*, **135**:2 (1960), 258–261.
- [21] И. М. Соболев, *Численные методы Монте-Карло*, Наука, М., 1973.
- [22] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [23] Я. Г. Синай, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**:1 (1968), 64–89.
- [24] Г. А. Маргулис, *Функц. анализ и его прил.*, **4**:1 (1970), 62–76.
- [25] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, **470**, Springer, Berlin, 1975.
- [26] R. Bowen, *Amer. J. Math.*, **94**:1 (1972), 1–30.
- [27] R. Bowen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377–397.
- [28] В. А. Рохлин, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **13**:4 (1949), 329–340.
- [29] В. А. Рохлин, *ТВП*, **6**:3 (1961), 351–352.
- [30] Ya. G. Sinai, “Probabilistic ideas in ergodic theory”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Stockholm, 15–22 August, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1963, 540–559.
- [31] А. Л. Генис, *Докл. АН СССР*, **138**:5 (1961), 991–993.
- [32] N. C. Metropolis, S. Ulam, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **44**:247 (1949), 335–341.
- [33] N. C. Metropolis, G. Reitwiesner, J. von Neumann, *Math. Tables and Other Aids to Computation*, **4** (1950), 109–111.
- [34] J. von Neumann, *J. Res. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser.*, **12** (1951), 36–38.
- [35] F. James, “Finally, a theory of random number generation”, *Scattering and Biomedical Engineering: Modeling and Applications*, Fifth International Workshop on Mathematical Methods in Scattering Theory and Biomedical Technology (Corfu, Greece, 18–19 October, 2001), eds. D. Fotiadis, C. Massalas, World Sci., Singapore, 2002, 114–121.
- [36] V. Demchik, *Comput. Phys. Commun.*, **182**:3 (2011), 692–705, arXiv:1003.1898.
- [37] M. Falcioni, L. Palatella, S. Pigolotti, A. Vulpiani, *Phys. Rev. E*, **72**:1 (2005), 016220, 10 pp.
- [38] P. L’Ecuyer, R. Simard, *ACM Trans. Math. Software*, **33**:4 (2007), 22, 40 pp.
- [39] N. Z. Akopov, G. K. Savvidy, N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidy, *J. Comput. Phys.*, **97**:2 (1991), 573–579; *Matrix generator of pseudorandom numbers*, EFI-867-18-86-YEREVAN, EFI, Yerevan, 1986.
- [40] G. G. Athanasiu, E. G. Floratos, G. K. Savvidy, *Internat. J. Modern Phys. C*, **8** (1997), 555–565.
- [41] N. Niki, *Proc. Inst. Statist. Math.*, **32**:2 (1984), 231–239.
- [42] H. Niederreiter, *Math. Japon.*, **31**:5 (1986), 759–774.
- [43] R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite Fields*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **20**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983; “Finite fields, pseudorandom numbers, and quasirandom points”, *Finite Fields, Coding Theory, and Advances in Communications and Computing* (Las Vegas, NV, 1991), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **141**, eds. G. L. Mullen, P. J. S. Shiue, Dekker, New York, 1993, 375–394.
- [44] V. Arnol’d, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York, 1968.