Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Нагиев, Функция Вигнера для релятивистской частицы в зависящем от времени линейном потенциале, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 76–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:48:07

© 2016 г.

Ш. М. Нагиев*

ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Построены фазовые представления для релятивистской частицы при наличии как постоянного, так и зависящего от времени линейного потенциала. Получены явные выражения для функций распределения Вигнера данных систем и найдены корректные нерелятивистские пределы и пределы свободной частицы для этих функций. Выведены релятивистское динамическое уравнение, которое управляет временным развитием функции распределения Вигнера, и релятивистское уравнение, определяющее функцию распределения Вигнера стационарных состояний. Вычислены амплитуды переходов между энергетическими состояниями.

Ключевые слова: релятивистская частица, линейный потенциал, функция Вигнера, динамическое уравнение.

DOI: 10.4213/tmf9014

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что в течение последних нескольких десятилетий нестационарным нерелятивистским квантовым системам уделялось много внимания, только в нескольких случаях временные уравнения Шредингера можно решить точно. Гармонический осциллятор, зависящий от времени, представляет собой хороший пример точно решаемой модели и применений во многих областях физики (см., например, статью [1]).

Другая точно решаемая модель – зависящий от времени линейный потенциал в нерелятивистской квантовой механике [2]–[9]. Она привлекла к себе внимание, поскольку является хорошим и простым примером точно решаемой модели и применима во многих областях физики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Республики Азербайджан (грант EIF-2012-2(6)-39/08/1).

*Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.
E-mail: smnagiyev@physics.ab.az

Недавно мы построили точно решаемую релятивистскую модель зависящего от времени линейного потенциала [10], которая была сформулирована в рамках конечно-разностной версии релятивистской квантовой механики (см., например, работу [11]). Конечно-разностная релятивистская квантовая механика имеет много общих черт с нерелятивистской квантовой механикой, но ее существенная особенность заключается в том, что волновая функция относительного движения удовлетворяет конечно-разностному уравнению с шагом, равным комптоновской длине волны $\lambda = \hbar/mc$ частицы. Например, в одномерном случае уравнение для волновой функции в релятивистском конфигурационном x -пространстве имеет вид

$$[H_0 + V(x)]\psi(x) = E\psi(x),$$

где конечно-разностный оператор $H_0 = mc^2 \text{ch}(i\lambda\partial_x)$ является релятивистским свободным гамильтонианом.

Переход в одномерное релятивистское конфигурационное x -пространство

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p, x) \phi(p) d\Omega_p$$

осуществляется с помощью разложения по матричным элементам унитарного представления одномерной группы Лоренца

$$\xi(p, x) = \left(\frac{p_0 - p}{mc} \right)^{-ix/\lambda}. \quad (1.1)$$

Пространством импульсов p в нашем случае является одномерное пространство Лобачевского, реализованное на массовой гиперболе $p_0^2 - p^2 = m^2 c^2$, $p_0 > 0$. В гиперболических координатах $p_0 = mc \text{ch} \chi$, $p = mc \text{sh} \chi$, $d\Omega_p = mc dp/p_0 = mc d\chi$, и мы имеем равенство $\xi(p, x) = e^{ix\chi/\lambda}$, в котором $\chi = \ln[(p_0 + p)/mc]$ – быстрота. Функции (1.1) подчиняются условиям полноты и ортогональности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p, x) \xi^*(p, x') d\Omega_p &= \delta(x - x'), \\ \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p, x) \xi^*(p', x) dx &= \delta(p(-)p') = \frac{1}{mc} \delta(\chi - \chi'). \end{aligned}$$

Целью настоящей статьи является вычисление функции распределения Вигнера [12] и амплитуды переходов между энергетическими состояниями для релятивистской частицы, движущейся в зависящем от времени линейном потенциале [10]. Функция распределения Вигнера W зависит от импульса p , координаты частицы x и в общем случае от времени t : $W = W(p, x, t)$, и играет центральную роль при построении фазовой картины квантовой механики. Представление квантовой механики в фазовом пространстве является альтернативой обычному описанию с помощью координатных или импульсных волновых функций. Впервые введенная в 1932 г., функция Вигнера с тех пор широко применялась для описания различных физических систем (см., например, работы [13]–[16]). Как известно, она выражается через нерелятивистскую волновую функцию Шредингера $\psi_N(x, t)$:

$$W_N(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_N^* \left(x + \frac{x'}{2}, t \right) \psi_N \left(x - \frac{x'}{2}, t \right) e^{ipx'/\hbar} dx'.$$

Данная статья построена следующим образом. В разделах 2 и 4 мы проводим краткий обзор результатов статей [17] и [10] соответственно. В разделах 3 и 5 представлены явные выражения для функций распределения Вигнера для релятивистской квантовой частицы при наличии как постоянного, так и нестационарного линейных потенциалов соответственно. Раздел 6 посвящен выводу релятивистских уравнений для зависящей от времени функции Вигнера и для функции Вигнера стационарных состояний. Амплитуды переходов между энергетическими уровнями найдены в разделе 7. В приложении к настоящей статье приведены выводы некоторых формул, используемых в тексте.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА ПРИ НАЛИЧИИ ПОСТОЯННОГО ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Движение релятивистской частицы при наличии постоянного линейного потенциала описывается в конфигурационном x -пространстве посредством конечно-разностного уравнения [17]:

$$(H_0 - F_0 x)\psi^{(0)}(x) = E\psi^{(0)}(x), \quad (2.1)$$

где F_0 является постоянной силой, действующей на частицу. В нерелятивистском пределе уравнение (2.1) переходит в соответствующее уравнение Шредингера. Решения уравнения (2.1), отвечающие энергии E , выражаются через функции Макдональда

$$\psi_E^{(0)}(x) = c_0 e^{\pi x_1 / 2\lambda} K_{ix_1 / \lambda}(z_0), \quad (2.2)$$

где $c_0 = (\pi\lambda\sqrt{F_0})^{-1}$, $x_1 = x + E/F_0$, $z_0 = mc^2/\lambda F_0$. Функции (2.2) подчиняются условиям полноты и ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_E^{(0)*}(x) \psi_{E'}^{(0)}(x') dE &= \delta(x - x'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_E^{(0)*}(x) \psi_{E'}^{(0)}(x) dx &= \delta(E - E'). \end{aligned}$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ПОСТОЯННОГО ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Для наших расчетов мы используем следующее определение функции Вигнера для релятивистских систем [18], [19]:

$$W(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x + \frac{1}{2}x'; t\right) \psi\left(x - \frac{1}{2}x'; t\right) e^{ixx'/\hbar} dx'. \quad (3.1)$$

После подстановки выражения (2.2) в (3.1) можно провести интегрирование с помощью формулы [20]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} K_{\nu+ix}(b) K_{\nu-ix}(c) dx &= \pi \left(\frac{b + ce^p}{be^p + c} \right) K_{2\nu}(\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{ch} p}), \\ |\arg b| + |\arg c| + |\operatorname{Im} p| &< \pi, \end{aligned}$$

и мы получаем функцию Вигнера для релятивистской частицы при наличии постоянного линейного потенциала (2.1):

$$W_E^{(0)}(p, x) = \frac{mc}{\pi^2 \hbar^2 F_0} e^{\pi x_1/\lambda} K_{2ix_1/\lambda}(2z_0 \operatorname{ch} \chi). \quad (3.2)$$

Как обычно, функция Вигнера (3.2) является вещественной, но не строго положительной. Однако она обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_E^{(0)}(p, x) d\Omega_p = |\psi_E^{(0)}(x)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W_E^{(0)}(p, x) dx = |\phi_E^{(0)}(p)|^2, \quad (3.3)$$

где $\phi_E^{(0)}(p)$ – волновая функция в импульсном представлении. Чтобы вывести соотношение (3.3), мы использовали интегральные формулы [20]

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2}\right) K_{ix}(c) dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_{2\nu}(2a \operatorname{ch} x) dx = |K_{\nu}(a)|^2.$$

В пределе свободной частицы при $F_0 \rightarrow 0$ функция (3.2) благодаря формуле (П.3) преобразуется в функцию

$$\widetilde{W}_E^{(0)}(p, x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta(mc^2 \operatorname{ch} \chi - E). \quad (3.4)$$

Используя уравнения (П.2) и (П.4), можно показать, что при $c \rightarrow \infty$ релятивистская функция Вигнера (3.2) определяется следующим выражением (см. статью [15]):

$$\lim_{c \rightarrow \infty} W_E^{(0)}(p, x) = \frac{\sigma_B}{2\pi\hbar} \operatorname{Ai}\left[\sigma_B \left(\frac{p^2}{2m} - F_0 x - E_N\right)\right]. \quad (3.5)$$

Нерелятивистский предел формулы (3.4) записывается как

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \widetilde{W}_E^{(0)}(p, x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta\left(\frac{p^2}{2m} - E_N\right).$$

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Движение релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала описывается уравнением [10]

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = [H_0 - F(t)x] \psi(x, t). \quad (4.1)$$

Запишем формальное решение уравнения (4.1) с помощью оператора временной эволюции рассматриваемой системы: $\psi(x, t) = U(x, t) \psi_0(x)$, где $\psi_0(x) = \psi(x, 0)$ – начальная волновая функция. Используя явное выражение для оператора $U(x, t)$, приведенное в статье [10], мы можем написать следующее представление для зависящей от времени волновой функции:

$$\psi(x, t) = e^{ix\delta_R(t)/\lambda} \exp(-i[\sigma(t) \operatorname{ch}(i\lambda\partial_x) - \gamma_0(t) \operatorname{sh}(i\lambda\partial_x)]) \psi_0(x). \quad (4.2)$$

Здесь

$$\delta_R(t) = \frac{1}{mc} \int_0^t F(t') dt', \quad \sigma(t) = \frac{mc^2}{\hbar} \int_0^t \operatorname{ch} \delta_R(t') dt', \quad \gamma_0(t) = \frac{mc^2}{\hbar} \int_0^t \operatorname{sh} \delta_R(t') dt'.$$

Таким образом, выбирая различные начальные волновые функции $\psi_0(x)$, мы получаем из формулы (4.2) различные зависящие от времени волновые функции $\psi(x, t)$, и, следовательно, используя выражение (3.1), находим различные зависящие от времени функции Вигнера для рассматриваемых релятивистских систем. Здесь и далее в качестве начальной волновой функции мы выбираем волновую функцию (2.2) стационарной задачи. В этом случае волновая функция $\psi(x, t)$, описывающая движение релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала, записывается как

$$\psi_E(x, t) = c_0 e^{ix\delta_R(t)/\lambda} e^{x_1[\pi/2 - iq(t)]/\lambda} K_{ix_1/\lambda}(\sqrt{\gamma^2(t) - \sigma^2(t)}), \quad |\gamma(t)| > |\sigma(t)|, \quad (4.3)$$

где $\gamma(t) = \gamma_0(t) + z_0$ и $\operatorname{th} q(t) = \sigma(t)/\gamma(t)$. Система функций (4.3) является полной и ортогональной. Если положить $t = 0$ (или $F(t) = F_0 = \operatorname{const}$), то мы видим, что функция (4.3) совпадает с (2.2). Сравнивая эти выражения, мы заключаем, что, как и в нерелятивистском случае [2], в релятивистском случае плотность вероятности $|\psi_E(x, t)|^2$ с течением времени сохраняет свой вид.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Как и в разделе 3, интегрирование после подстановки выражения (4.3) в (3.1) дает следующее выражение для одной из функций Вигнера релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала, соответствующее начальной волновой функции (2.2):

$$W_E(p, x, t) = \frac{mc}{\pi^2 \hbar^2 F_0} e^{\pi x_1/\lambda} K_{2ix_1/\lambda}(\omega(t)), \quad (5.1)$$

где

$$\omega(t) = 2[\sigma(t) \operatorname{sh}(\chi - \delta_R(t)) + \gamma(t) \operatorname{ch}(\chi - \delta_R(t))].$$

Функция Вигнера (5.1) удовлетворяет свойствам, аналогичным (3.3). Очевидно, что при $t = 0$ (или $F(t) = F_0 = \operatorname{const}$) функция (5.1) совпадает с (3.2). В пределе $F_0 \rightarrow 0$ функция (5.1) благодаря формуле (П.3) преобразуется в функцию

$$\widetilde{W}_E(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta(mc^2 \operatorname{ch}[\chi - \delta_R(t)] - E). \quad (5.2)$$

В нерелятивистском пределе из (5.1) мы получаем функцию Вигнера для нерелятивистской частицы, движущейся при наличии зависящего от времени линейного потенциала (ср. со статьей [4]):

$$\lim_{c \rightarrow \infty} W_E(p, x, t) = \frac{\sigma_B}{2\pi\hbar} \operatorname{Ai} \left(\sigma_B \left[\frac{(p - \delta(t))^2}{2m} + \frac{(p - \delta(t))F_0 t}{m} + \frac{F_0 \delta_1(t)}{m} - F_0 x - E_N \right] \right). \quad (5.3)$$

Для вывода предельного соотношения (5.3) мы должны учесть формулы (II.2), (II.4). В том же пределе для функции (5.2) имеем соотношение

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \widetilde{W}_E(p, x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta\left(\frac{[p - \delta(t)]^2}{2m} - E_N\right).$$

6. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Теперь построим релятивистское уравнение эволюции для зависящей от времени функции Вигнера $W(p, x, t)$ (3.1). Так как динамика релятивистской квантовой системы в этом случае определяется конечно-разностным уравнением вида

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = [H_0 + V(x, t)e^{i\alpha\lambda\partial_x}] \psi(x, t),$$

функция Вигнера также удовлетворяет конечно-разностному уравнению эволюции:

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \left\{ -2mc^2 \operatorname{sh} \chi \operatorname{sh} \left(\frac{i\lambda}{2} \partial_x \right) + [V(\widehat{X}^*, t)e^{i\alpha\lambda\partial_x/2} - V^*(\widehat{X}, t)e^{-i\alpha\lambda\partial_x/2}]e^{-\alpha\chi} \right\} W, \quad (6.1)$$

где $\widehat{X} = x - i\lambda\partial_x/2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Функцию Вигнера стационарных состояний $W_E(p, x)$ можно определить из выражения

$$\left\{ 2mc^2 \operatorname{ch} \chi \operatorname{ch} \left(\frac{i\lambda}{2} \partial_x \right) + [V(\widehat{X}^*)e^{i\alpha\lambda\partial_x/2} + V^*(\widehat{X})e^{-i\alpha\lambda\partial_x/2}]e^{-\alpha\chi} \right\} W_E = 2EW_E, \quad (6.2)$$

где параметр E обозначает энергию системы (ср. с работами [21], [22]).

Если $c \rightarrow \infty$, то уравнения (6.1) и (6.2) переходят в следующие нерелятивистские уравнения:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial W_N}{\partial t} &= \left[-i\hbar \frac{p}{m} \partial_x + V\left(x + \frac{i\hbar}{2} \partial_p, t\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p, t\right) \right] W_N(p, x, t), \\ \left[-\frac{\hbar^2}{4m} \partial_x^2 + \frac{p^2}{m} + V\left(x + \frac{i\hbar}{2} \partial_p\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p\right) \right] W_{NE} &= 2E_N W_{NE}(p, x). \end{aligned}$$

Следует заметить, что, как и в нерелятивистском случае [21], релятивистская функция Вигнера стационарных состояний, которая является решением (6.2), должна одновременно удовлетворять (6.1). Другими словами, решая совместно уравнения (6.1) и (6.2), мы можем найти собственные функции и собственные значения уравнения (6.2).

В случае зависящего от времени линейного потенциала $V(x, t) = -F(t)x$ уравнение эволюции (6.1) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{2mc^2}{i\hbar} \operatorname{sh} \chi \operatorname{sh} \left(\frac{i\lambda}{2} \partial_x \right) W - \frac{1}{mc} F(t) \partial_x W. \quad (6.3)$$

Легко проверить, что функция Вигнера (5.1) ему удовлетворяет. В случае не зависящего от времени линейного потенциала $V(x, t) = -F_0 x$ соотношение (6.2) упрощается:

$$\left[mc^2 \operatorname{ch} \chi \operatorname{ch} \left(\frac{i\lambda}{2} \partial_x \right) - F_0 x \right] W_E = EW_E. \quad (6.4)$$

Функция Вигнера стационарных состояний (3.2) является решением уравнений (6.3) и (6.4), которые в нерелятивистском пределе преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial W_N}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W_N}{\partial x} - F(t) \frac{\partial W_N}{\partial p}, \quad (6.5)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{8m} \partial_x^2 + \frac{p^2}{2m} - F_0 x \right] W_{NE} = E_N W_{NE}. \quad (6.6)$$

Функция (5.3) является решением уравнения (6.5), а функция (3.5) – решением обоих уравнений (6.5) и (6.6).

7. АМПЛИТУДЫ ПЕРЕХОДОВ

То, что мы знаем оператор эволюции, дает нам возможность вычислить амплитуды переходов между энергетическими состояниями $|E_i\rangle$ и $|E_f\rangle$, соответствующими постоянным значениям сил F_i для $t \leq 0$ и F_f при $t \rightarrow \infty$:

$$K(E_f, E_i; t) = \langle E_f, t | \hat{U}(t) | E_i, t = 0 \rangle = \frac{1}{2\pi\lambda\sqrt{F_i F_f}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(E_f t - \frac{E_i}{F_f} \delta(t) \right) \right] J, \quad (7.1)$$

где

$$J = \begin{cases} i\pi e^{\nu[\pi/2 - q_1(t)]} H_{i\nu}^{(m)}(\sqrt{\mu^2(t) - \lambda^2(t)}) & \text{при } |\mu| > |\lambda|, \\ 2e^{\nu[\pi/2 - q_2(t)]} K_{i\nu}(\sqrt{\lambda^2(t) - \mu^2(t)}) & \text{при } |\lambda| > |\mu|, \end{cases}$$

th $q_1 = \lambda/\mu$, th $q_2 = \mu/\lambda$, $m = (3 - \text{sgn } \mu)/2$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$ – функции Ханкеля. Здесь мы применили обозначения

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{E_i}{F_i} - \frac{E_f}{F_f} \right), \\ \mu &= \frac{mc^2}{\lambda F_i} \text{sh}(\delta_R(t)) - \frac{mc^2}{\hbar} \int_0^t \text{ch}(\delta_R(t) - \delta_R(t')) dt', \\ \lambda &= \frac{mc^2}{\lambda F_f} - \frac{mc^2}{\lambda F_i} \text{ch}(\delta_R(t)) + \frac{mc^2}{\hbar} \int_0^t \text{sh}(\delta_R(t) - \delta_R(t')) dt'. \end{aligned}$$

Если $F_i = F_f = 0$, но $F(t) \neq 0$, то амплитуда перехода из состояния

$$\delta(p(-)p_i) = \delta(mc(\chi - \chi_i))$$

в состояние

$$\delta(p(-)p_f) \exp \left(\frac{-iE_f}{\hbar} t \right) = \exp \left[-\frac{imc^2}{\hbar} t \text{ch } \chi_f \right] \delta(mc(\chi - \chi_f))$$

равна

$$K(p_f, p_i; t) = \exp \left[i \left(\frac{mc^2}{\hbar} t \text{ch } \chi_f - \sigma \text{ch } \chi_i - \gamma_0 \text{sh } \chi_i \right) \right] \delta(mc(\chi_f - \chi_i) - \delta(t)). \quad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) при $c \rightarrow \infty$ совпадают с соответствующими формулами статьи [4].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено представление Вигнера для релятивистской частицы, движущейся при наличии как постоянного, так и зависящего от времени линейного потенциала. Хотя системы управляются конечно-разностным уравнением, волновые функции и их функции Вигнера являются непрерывными. Показано, что выражения для функций Вигнера имеют корректный нерелятивистский предел. В результате получены две предельные формулы для функции Макдональда и явный вид функции Вигнера для нерелятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала. Также выведены релятивистские уравнения эволюции для зависящей от времени функции Вигнера и для функции Вигнера стационарных состояний. Найдены явные формулы для амплитуд переходов, связывающих энергетические состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. С помощью интегральных представлений для функций Макдональда и Эйри

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z \operatorname{sh} y - py)} dy = 2e^{\pi p/2} K_{ip}(z), \quad \operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux + u^3/3)} du \quad (\text{П.1})$$

можно показать, что для этих функций имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{\pi(a^3 + ac)} K_{2i(a^3 + ac)}(2(a^3 + ab)) = \pi \operatorname{Ai}(2(b - c)). \quad (\text{П.2})$$

Действительно, в интеграле (П.1), определяющем функцию Макдональда, существенна только та область значений параметра интегрирования y , в которой экспонента имеет порядок единицы. Если в (П.1) $z = 2(a^3 + ab)$ и $p = 2(a^3 + ac)$, то при $a \rightarrow \infty$ является существенной только область малых y , для которых справедливо выражение $\varphi = z \operatorname{sh} y - py \simeq 2(b - c)u + u^3/3$ для фазы, совпадающее с выражением для фазы в представлении (П.1) для функции Эйри при $u = ay$.

2. Подобно тому, как получено (П.2), мы можем доказать другое предельное соотношение:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{\pi ac/2} K_{iac}(ab) = \pi \delta(b - c), \quad (\text{П.3})$$

где $\delta(b - c)$ является δ -функцией Дирака.

3. В нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$ мы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{2x_1}{\lambda} &\simeq 2a^3 + a\sigma_B(F_0x + E_N), & 2z_0 \operatorname{ch} \chi &\simeq 2a^3 + \frac{a\sigma_B p^2}{2m}, \\ \sigma(t) &\simeq \frac{mc^2}{\hbar}t + \frac{\delta_2(t)}{2m\hbar}, & \gamma_0(t) &\simeq \frac{c\delta_1(t)}{\hbar}, & \operatorname{sh}(\chi - \delta_R(t)) &\simeq \frac{p - \delta(t)}{mc}, \\ \operatorname{ch}(\chi - \delta_R(t)) &\simeq 1 + \frac{[p - \delta(t)]^2}{2m^2 c^2}, & & & \\ \omega(t) &\simeq 2a^3 + a\sigma_B \left\{ \frac{[p - \delta(t)]^2}{2m} + \frac{F_0 t [p - \delta(t)]}{m} + \frac{F_0 \delta_1(t)}{m} \right\}, & & & \\ \lambda(t) &\simeq c^3 \varepsilon + \beta_0(t), & \nu &\simeq c^3 \varepsilon + c\beta_1, & \mu(t) &\simeq c^2 \beta_2(t), \\ \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} &\simeq c^3 \varepsilon - \frac{c\beta_2^2(t)}{2\varepsilon}, & & & \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где

$$\begin{aligned}
 a &= c \left(\frac{m^2}{\hbar F_0} \right)^{1/3}, & \sigma_B &= 2 \left(\frac{m}{\hbar^2 F_0^2} \right)^{1/3}, & \delta(t) &= \int_0^t F(t') dt', \\
 \delta_1(t) &= \int_0^t \delta(t') dt', & \delta_2(t) &= \int_0^t \delta^2(t') dt', & E_N &= \lim_{c \rightarrow \infty} (E - mc^2), \\
 \beta_0(t) &= \frac{\delta^2(t)/2F_f - \delta_1(t)}{\hbar}, & \beta_1 &= \frac{[E_{Ni}/F_i - E_{Nf}/F_f]m}{\hbar}, \\
 \beta_2(t) &= \frac{[\delta(t)/F_f - t]m}{\hbar}, & \varepsilon &= \frac{[1/F_f - 1/F_i]m^2}{\hbar}.
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A*, **55**:4 (1997), 3219–3221.
- [2] M. V. Berry, N. L. Balazs, *Am. J. Phys.*, **47**:3 (1979), 264–267.
- [3] M. A. Gregório, A. S. de Castro, *Am. J. Phys.*, **52**:6 (1984), 557–559.
- [4] V. V. Dodonov, V. I. Manko, O. V. Shakhmistova, *Phys. Lett. A*, **102**:7 (1984), 295–297.
- [5] I. Guedes, *Phys. Rev. A*, **63**:3 (2001), 034102, 3 pp.
- [6] M. Feng, *Phys. Rev. A*, **64**:3 (2002), 034101, 3 pp.
- [7] P.-G. Luan, C.-S. Tang, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 014101, 4 pp., arXiv: quant-ph/0309174.
- [8] J.-Q. Shen, *Solutions of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential*, arXiv: quant-ph/0310179.
- [9] G. Dattoli, K. Zhukovsky, “Linear potential, Airy wave packets and Airy transform”, unpublished.
- [10] Sh. M. Nagiyev, K. Sh. Jafarova, *Phys. Lett. A*, **377**:10–11 (2013), 747–752.
- [11] E. D. Kagramanov, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiyev, *J. Math. Phys.*, **31**:7 (1990), 1733–1738.
- [12] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [13] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
- [14] H. W. Lee, *Phys. Rep.*, **259**:3 (1995), 147–211.
- [15] N. L. Balazs, B. K. Jennings, *Phys. Rep.*, **104**:6 (1984), 347–391.
- [16] В. Н. Татарский, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.
- [17] Sh. M. Nagiyev, S. I. Guliyeva, *Phys. Lett. A*, **373**:32 (2009), 2810–2813.
- [18] Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 410–425.
- [19] Sh. M. Nagiyev, G. H. Guliyeva, E. I. Jafarov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454015, 10 pp., arXiv:0907.4427.
- [20] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1: *Элементарные функции*, 1981; т. 2: *Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [21] Ю. Л. Климонтович, *Докл. АН СССР*, **108** (1956), 1033–1036.
- [22] Е. П. Богданов, В. И. Горшенков, В. Л. Коньков, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1970, № 7, 94–101.

Поступила в редакцию 23.07.2015