Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Шабад, Сложение скоростей и замкнутый
временной цикл в теориях с нарушенной лоренц-
инвариантностью, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 421–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:30:46

© 2016 г.

А. Е. Шабад^{*†}

СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ЗАМКНУТЫЙ ВРЕМЕННОЙ ЦИКЛ В ТЕОРИЯХ С НАРУШЕННОЙ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬЮ

В теориях, лоренц-инвариантность которых нарушена присутствием внешнего тензора любого ранга, показано, что тем не менее скорость сигнала, понимаемая как групповая скорость волны, складывается со скоростью системы отсчета по обычному релятивистскому закону сложения скоростей. В случае, когда имеется сверхсветовой сигнал, это наблюдение дает возможность создать замкнутый временной цикл и тем самым прийти к выводу о нарушении причинности даже в отсутствие релятивистской инвариантности. Также выявляется оптическая анизотропия движущейся среды, изотропной в покое.

Ключевые слова: нарушение лоренц-инвариантности, причинность, сверхсветовая скорость распространения, движущаяся среда, замкнутый временной цикл.

DOI: 10.4213/tmf9015

1. ВВЕДЕНИЕ

О ковариантном описании лоренц-неинвариантных теорий. В последние годы много внимания уделялось моделям, в которых не соблюдается релятивистская инвариантность. Исследования в этом направлении были инициированы в работах [1]. При этом целью являлось установление возможности малых отклонений от Стандартной модели (СМ), проявляющихся в нарушении специальной теории относительности. Объект исследования в указанных работах – некоторый специальный тензор четвертого ранга, присущий вакууму и не составленный из текущих полей. Частным случаем лоренц-неинвариантной теории, не охватываемым СМ, является теория с пространственно-временной некоммутативностью (см. обзоры

Настоящая работа поддержана FAPESP (грант 2014/08970-1) и РФФИ (грант № 15-02-00293_a), а также Программой повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: shabad@lpi.ru

[†]Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

статьи [2], [3]). С другой стороны, в рамках СМ мы часто рассматриваем теории, в которых инвариантность по отношению к лоренц-бустам, а также по отношению к пространственным вращениям нарушена присутствием фиксированных внешних тензоров. Последние могут определяться наличием среды, внешних полей, нетривиальной метрики и комбинациями этих факторов. При наличии среды роль внешнего тензора (первого ранга) выполняет вектор 4-скорости среды. В других случаях – это тензоры внешнего поля или тензоры, характеризующие внешнюю метрику, а также (4×4) -тензор некоммутативности, когда рассматривается некоммутативная теория.

Во всех данных ситуациях можно придать теории лоренц-ковариантный вид, а именно определить действие как лоренц-скалярную комбинацию полей и внешних тензоров. Таким же свойством обладают производящие функционалы функций Грина и вершинных функций (см., например, книгу [4]). Функции Грина и одночастично-неприводимые вершинные функции, которые являются тензорами поляризации второго и более высоких рангов, получаются дифференцированием упомянутых функционалов по векторным токам и полям соответственно и формируются матрицами, образованными с использованием внешних тензоров, помимо импульсов частиц и их координат.

В квантовой электродинамике с внешними электрическим и магнитным полями такая программа была реализована в работе [5] (см. также статью [6]). По-видимому, первый пример ковариантного представления поляризационного тензора в (движущейся) среде с использованием ее 4-скорости можно найти в работах [7]. Случай среды с магнитным полем рассмотрен в работах [6], [8]. Микроскопическое обоснование данного способа введения 4-скорости было дано в статьях [9] на основе формализма температурных функций Грина; дальнейшие замечания на этот счет приведены в п. 2.3 настоящей статьи. Ковариантная трактовка матрицы некоммутативности как тензора второго ранга была с той же целью использована в работе [10], где аналогичным способом также построен тензор поляризации третьего ранга во внешних электрическом и магнитном полях, ответственный за нелинейные процессы расщепления фотона. Ковариантное представление тензора поляризации третьего ранга в среде без внешнего поля было получено в статье [11].

Рассматриваемый ковариантный подход фактически является реализацией “расширенного принципа относительности”, который звучит следующим образом: инерционная система отсчета A с внешним тензором в ней эквивалентна системе отсчета B , движущейся относительно A с постоянной скоростью $\mathbf{V}$, если внешний тензор в системе B получен с помощью преобразования Лоренца, соответствующего скорости $\mathbf{V}$, из внешнего тензора в системе A . Калибровочно-инвариантный тензор энергии-импульса в данной теории не является симметричным, причем наличие его антисимметричной части влечет несохранение генераторов углового момента и преобразований Лоренца [12].

В настоящей работе в рамках обсуждаемого подхода мы получаем закон преобразования групповой скорости электромагнитного волнового пакета при переходе из одной инерциальной системы в другую и показываем, что он в точности совпадает со стандартным релятивистским правилом сложения двух скоростей: групповой скорости пакета и относительной скорости двух инерциальных систем отсчета. Мы рассматриваем групповую скорость, поскольку она является скоростью распространения пакета [13]. Этот факт играет важную роль при обсуждении вопросов причин-

ности в разделе 3, хотя некоторые авторы часто ссылаются на фазовую скорость, что в данном случае неверно. Единственной оговоркой, которая обычно делается в отношении групповой скорости, является указание на то, что она может превышать скорость света в вакууме вблизи резонанса, вызывающего так называемую аномальную дисперсию. Однако эту оговорку можно легко устранить [14], если рассмотреть вещественную часть комплексной групповой скорости как функцию вещественного импульса вместо вещественной групповой скорости как функции вещественной части комплексного импульса. Что касается волнового фронта, скорость которого принято считать скоростью сигнала согласно Бриллюэну [15], то он всегда распространяется со скоростью света в вакууме, поскольку его скорость определяется пределом бесконечной частоты $k_0 = \infty$, а при этом влияние факторов, нарушающих лоренц-инвариантность, таких как внешнее поле или среда, исчезает. Следовательно, эта скорость не имеет значения при обсуждении вопросов причинности.

Вывод закона преобразования групповой скорости приведен в п. 2.2, которому предшествует описание ковариантного подхода в п. 2.1 и за которым следует рассмотрение интересного частного случая распространения света в движущейся среде, обсуждаемого в порядке иллюстрации в п. 2.3. Показано, что диэлектрический тензор изотропной среды становится анизотропным при ее движении, а главная оптическая ось определяется направлениями волнового вектора и скорости среды $\mathbf{V}$. В заключительном разделе 3 вместе с другими вопросами причинности мы обсуждаем построение замкнутого временного цикла в лоренц-неинвариантной теории.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

2.1. Поляризационный оператор и уравнения дисперсии. Вторую пару уравнений Максвелла, линеаризованных над однородным фоном, для 4-векторного потенциала $A^\rho(k)$ свободной электромагнитной волны с импульсом k_μ можно записать в виде

$$(k^2 g_{\mu\rho} - k_\mu k_\rho) A^\rho(k) - \Pi_{\mu\rho}(k) A^\rho(k) = 0, \quad (1)$$

где $\Pi_{\mu\rho}(k)$ – поляризационный оператор, следующим образом определенный в конфигурационном пространстве:

$$\Pi_{\mu\tau}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x) \delta A_\tau(y)} \Big|_{F=\bar{F}=\text{const}}, \quad (2)$$

где эффективное действие Γ – производящий функционал одночастично-неприводимых вершинных функций, одной из которых является поляризационный оператор [4]. Мы допускаем здесь, что эффективное действие Γ зависит, помимо внешних тензоров, от пространственно-временных производных любого порядка тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, но все они полагаются равными нулю после того, как указанные в (2) вариационные дифференцирования выполнены. Греческие индексы пробегают пространство Минковского.

Представим поляризационный оператор в диагональном виде:

$$\Pi_{\mu\tau}(k, p) = \delta(k - p) \Pi_{\mu\tau}(k), \quad \Pi_{\mu\tau}(k) = \sum_{a=1}^3 \varkappa_a \frac{b_\mu^{(a)} b_\tau^{(a)}}{(b^{(a)})^2}, \quad (3)$$

где $b_\tau^{(a)}$ – суть его собственные векторы:

$$\Pi_{\mu\tau} b_\tau^{(a)} = \varkappa_a b_\mu^{(a)}, \quad a = 1, \dots, 4.$$

Эффективное действие является лоренц-скаляром, образованным с использованием всех внешних и текущих полей, и оно не зависит от координат явным образом. Следовательно, поляризационный оператор (2) есть тензор в пространстве Минковского, а его собственные значения $\varkappa_a$ являются скалярами. Появление в (3) дельта-функции, обеспечивающей сохранение энергии-импульса, является следствием допущения, что в качестве факторов нарушения лоренц-инвариантности учитываются лишь те, которые, будучи калибровочно-инвариантными и не зависящими от пространства и времени, не нарушают трансляционную инвариантность.

Четвертый собственный вектор тривиален, $b_\mu^{(4)} = k_\mu$, так что четвертое собственное значение исчезает, т. е. $\varkappa_4 = 0$ вследствие 4-поперечности поляризационного оператора: $\Pi_{\mu\tau} k_\tau = 0$. Все собственные векторы взаимно ортогональны: $b_\mu^{(a)} b_\mu^{(b)} \sim \delta_{ab}$, и это означает, что первые три собственных вектора являются 4-поперечными, т. е. $b_\mu^{(a)} k_\mu = 0$. Связь между поляризационным оператором $\Pi_{\mu\tau}$ и тензором четвертого ранга, изучение и попытки измерить который проводились в работах [1], обсуждалась в статье [12].

Скалярные собственные значения $\varkappa_a$ могут зависеть от всех основных скаляров теории, включая k^2 и те, которые могут быть образованы тензорами любого ранга, характерными для среды или для вакуума, после их свертки с 4-импульсом фотона k_μ , например от $k\bar{F}^2 k$ или $k\theta\bar{F}k$, и т. п. Здесь $\bar{F}_{\mu\nu}$ – тензор напряженности внешнего поля, а $\theta_{\mu\nu}$ – тензор некоммутативности. Множество данных внешних тензоров может содержать также вектор 4-скорости среды, если таковая присутствует. В числе аргументов $\varkappa$ имеются и скаляры, не зависящие от импульса, такие как инварианты внешнего поля $\mathfrak{F} = -1/4\bar{F}^2$ и $\mathcal{G} = -1/4\bar{F}\tilde{F}$, где $\tilde{F}$ – дуальный электромагнитный тензор, но они не существенны для данного рассмотрения.

Законы дисперсии фотона для каждой из трех поляризационных мод можно найти из уравнений

$$k^2 = \varkappa_a(k), \quad a = 1, 2, 3, \quad (4)$$

являющихся условиями разрешимости уравнений (1). Соотношения (4) определяют частоту k_0 как функцию компонент волнового вектора k_i . Собственные векторы $b_\mu^{(a)}$ служат 4-потенциалами свободных собственных волн. Всего имеются три собственные моды, а не две, поскольку возможные массивные векторные частицы тоже включены в уравнение распространения (1). Таковыми могут быть, например, состояния пары электрон–позитрон (в которых эти частицы взаимно свободны или связаны в атом позитрония), с которыми фотон объединяется в смешанное поляритонное состояние [16]. Другой пример возникновения третьей поляризационной степени свободы, характерной для векторной массивной частицы, связан с наличием известных продольных мод в среде. Дальнейшие комментарии по этому поводу даны в п. 2.3.

Тензор диэлектрической проницаемости ε_{nj} анизотропной “среды”, которой эквивалентен вакуум с нарушенной лоренц-инвариантностью независимо от того, присутствует реальная среда или нет, связан с компонентами поляризационного оператора следующим образом:

$$\varepsilon_{nj} = \delta_{nj} + \frac{\Pi_{nj}}{k_0^2}, \quad n, j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Лоренц-неинвариантный вакуум проявляет себя как эквивалентная ему “среда” потому, что тензор (5) отличен от δ_{nj} . Если в лоренц-инвариантном вакууме имеется

только однородная среда, изотропная в своей системе покоя (т. е. нет никаких внешних тензоров, помимо ее 4-скорости), то она становится анизотропной в движущейся системе. Мы исследуем это явление в п. 2.3.

Показатели преломления (в каждой собственной моде) определены на решениях уравнений дисперсии (4) как

$$n_a(k_0, \mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} = \left(1 + \frac{\varkappa_a(k_0, \mathbf{k})}{k_0^2}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

В отличие от собственных значений $\varkappa_a$ они не являются лоренц-скалярами.

2.2. Вывод правил сложения для скоростей. Обозначим I_s , $s = 1, 2, \dots$, зависящие от импульса лоренц-инварианты, в том числе $k^2 = -k_0^2 + k_i^2$. Их число зависит от конкретной задачи. Производная $\partial I_s / \partial k_\mu = P^{(s)\mu}$ является лоренц-вектором. Групповая скорость фотона (электромагнитной волны) есть по определению частота, продифференцированная по волновому вектору:

$$v_i^{\text{gr}} = \frac{\partial k_0}{\partial k_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

и взятая на решении уравнения дисперсии (4). В дальнейшем мы опускаем индекс фотонной моды a , имея в виду, что наши манипуляции относятся к каждой из трех мод по отдельности. Получаем (подразумевается суммирование по всем инвариантам I_s) следующее выражение:

$$v_i^{\text{gr}} = - \left(\frac{\partial(k^2 - \varkappa)}{\partial k_i} \right) \left(\frac{\partial(k^2 - \varkappa)}{\partial k_0} \right)^{-1} = \frac{2k_i - X_s P_i^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)}}, \quad (8)$$

где величины $X_s = \partial \varkappa / \partial I_s$ являются лоренц-скалярами.

Представим теперь, что инерциальная лоренцева система отсчета W , к которой относятся предыдущие формулы, движется по отношению к исходной системе W' , которую будем отмечать штрихом, со скоростью $\mathbf{V}$. Мы намерены продемонстрировать, что групповая скорость $\mathbf{v}'^{\text{gr}}$ в системе W' связана с групповой скоростью в системе W стандартным релятивистским законом $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \oplus \mathbf{V}$ сложения скорости сигнала $\mathbf{v}$ со скоростью системы отсчета, причем в качестве $\mathbf{v}$ берется групповая скорость. А именно, мы покажем, что

$$v_{\parallel}^{\text{gr}} = v_{\parallel}^{\text{gr}} \oplus \mathbf{V} \equiv \frac{V + v_{\parallel}^{\text{gr}}}{1 + V v_{\parallel}^{\text{gr}}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_{\perp}^{\text{gr}} = \mathbf{v}_{\perp}^{\text{gr}} \oplus \mathbf{V} \equiv \frac{\mathbf{v}_{\perp}^{\text{gr}} \sqrt{1 - V^2}}{1 + V v_{\parallel}^{\text{gr}}}, \quad (10)$$

где индекс $\parallel$ или $\perp$ указывает на параллельное или ортогональное направление относительно скорости системы отсчета $\mathbf{V}$ соответственно.

Мы считаем, что физические процессы, которые обеспечивают передачу сигнала со скоростью $\mathbf{v}$ в системе покоя W , и процессы, ответственные за его распространение со скоростью $\mathbf{v} \oplus \mathbf{V}$ в движущейся системе, описываются одними и теми

же уравнениями, но только ковариантно преобразованными при переходе из системы W в систему W' . Иными словами, мы принимаем, что физическим носителем сигнала является электромагнитный волновой процесс, управляемый инвариантными уравнениями (1), и что роль скорости сигнала выполняет групповая скорость распространяющегося пакета. Чтобы эффективно учесть упомянутое преобразование Лоренца электромагнитного сигнала, мы существенно опираемся на установленное в п. 2.1 обстоятельство, что правая часть $\varkappa$ уравнения дисперсии (4) есть лоренц-скаляр.

Используя равенство (8) в выражении (9), получим соотношение

$$\begin{aligned} v_{\parallel}^{\text{gr}} \oplus v &= \left(V + \frac{2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)}} \right) \left(1 + V \frac{2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{V(2k_0 - X_s P_0^{(s)}) + 2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)} + V(2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку преобразования Лоренца для векторов $\partial I_s / \partial k_{\mu} = P^{(s)\mu}$ (и такие же преобразования для импульсов k^{μ}) при переходе из одной системы в другую имеют вид

$$P'_{\parallel} = \frac{P_{\parallel} + V P_0}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad P'_0 = \frac{P_0 + V P_{\parallel}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (12)$$

из выражения (11) следует, что

$$v_{\parallel}^{\text{gr}} \oplus \mathbf{V} = \frac{2k'_{\parallel} - X_s P'_{\parallel}{}^{(s)}}{2k'_0 - X_s P'_0{}^{(s)}}, \quad (13)$$

а это и есть групповая скорость $v_{\parallel}^{\text{gr}}$ (точнее, ее параллельная проекция) (8), вычисленная в системе W' с учетом того, что величины X_s являются лоренц-инвариантными. Таким образом, соотношение (9) доказано.

Аналогично, подставляя равенство (8) в выражение (10), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp}^{\text{gr}} \oplus \mathbf{V} &= \left(\frac{2\mathbf{k}_{\perp} - X_s \mathbf{P}_{\perp}^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)}} \sqrt{1 - V^2} \right) \left(1 + V \frac{2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{(2\mathbf{k}_{\perp} - X_s \mathbf{P}_{\perp}^{(s)}) \sqrt{1 - V^2}}{2k_0 - X_s P_0^{(s)} + V(2k_{\parallel} - X_s P_{\parallel}^{(s)})} = \frac{2\mathbf{k}'_{\perp} - X_s \mathbf{P}'_{\perp}{}^{(s)}}{2k'_0 - X_s P'_0{}^{(s)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Мы вновь использовали второе соотношение в (12) для преобразования $P_0^{(s)}$ и аналогичное преобразование для k_0 , а также то обстоятельство, что компоненты вектора, ортогональные скорости $\mathbf{V}$ двух систем отсчета относительно друг друга, не изменяются при преобразовании Лоренца вдоль $\mathbf{V}$. Сравнивая выражения (8) и (14), замечаем, что (14) есть как раз перпендикулярная групповая скорость $v_{\perp}^{\text{gr}}$ в том виде, как она определяется наблюдателем в системе отсчета W' . Таким образом, релятивистское правило сложения скоростей для перпендикулярной компоненты (10) также доказано.

Рассмотренный вывод релятивистского закона сложения скоростей никоим образом нельзя применить к фазовой скорости $v_{ph} = k_0/|\mathbf{k}|$ в соответствии с хорошо известным фактом [17]: данная скорость не может служить скоростью сигнала и даже вовсе не является 3-вектором.

2.3. Движущаяся изотропная среда. Важным примером является изотропная среда, присутствие которой, разумеется, нарушает релятивистскую инвариантность. Уравнениям электромагнитного поля можно придать тем не менее лоренц-ковариантную форму, если ввести вектор 4-скорости u_μ , $u^2 = -1$, $u_0 = (1 - V^2)^{-1/2}$, $\mathbf{u} = \mathbf{V}(1 - V^2)^{-1/2}$, где $\mathbf{V}$ есть 3-вектор скорости движущейся среды. Тогда скаляры, о которых шла речь в п. 2.2, суть $I_1 = k^2$ и $I_2 = (uk)^2$.

Введение данного вектора позволяет ковариантным образом подойти к рассмотрению линейных [7] и нелинейных [11] уравнений Максвелла в исходно изотропной и покоящейся среде, в том числе тогда, когда она приведена в движение как целое с постоянной скоростью и при этом помещена во внешнее поле [8]. Микроскопическую теорию, развитую в рамках метода температурных функций Грина [7] в релятивистской статистике в оправдание такого подхода, можно найти в работе [9]. Она основывается на представлении матрицы плотности в виде $\rho = e^{-\beta(uP)}$, где β есть лоренц-инвариантный параметр обратной температуры, а P – 4-импульс. Тогда термодинамический потенциал, играющий в плазме роль плотности Лагранжа, записывается как релятивистский скаляр с использованием вектора 4-скорости. Напомним, что стандартное выражение для матрицы плотности, к которому она сводится в системе покоя плазмы, имеет вид $\rho = e^{-\beta H}$, где $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, а $H = P^0$ – гамильтониан.

“Расширенный принцип относительности”, упоминаемый во введении настоящей статьи, теперь гласит, что всякие две инерциальные системы отсчета в среде эквивалентны после того, как скорость среды подвергнута преобразованию Лоренца при переходе из одной системы в другую. В более осязаемых терминах это означает, что наблюдатель в системе, движущейся относительно среды, скажем воздуха, определенно отдает себе отчет в том, что он движется, уже по одному тому, что он чувствует ветер. В этом отношении обычный принцип относительности нарушен вместе с релятивистской инвариантностью. Однако после того, как движение среды относительно наблюдателя исключается с помощью преобразования Лоренца, ситуация для нашего наблюдателя возвращается к той, в которой находится наблюдатель, покоящийся относительно среды.

Наиболее общее ковариантное тензорное разложение [7] для поляризационного оператора изотропной однородной среды можно записать в следующем диагональном виде [11], [18]:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \kappa \sum_{b=1,2} \frac{c_\mu^{(b)} c_\nu^{(b)}}{(c^{(b)})^2} + \kappa_3 \frac{a_\mu a_\nu}{a^2}, \quad (15)$$

где

$$a_\mu = u_\mu k^2 - k_\mu(uk), \quad a^2 = k^2(k^2 - (uk)^2), \quad (au) = 0.$$

Вектор $c_\mu^{(1)}$ определен как произвольный 4-вектор, нормальный к гиперплоскости, натянутой на векторы k_μ и a_μ . Вектор $c_\mu^{(2)} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} c_\nu^{(1)} a_\rho k_\lambda$ тоже нормален к этой гиперплоскости, а также к $c_\mu^{(1)}$. Четыре вектора k_μ , a_μ , и $c_\mu^{(1,2)}$ являются собственными

векторами поляризаационного оператора:

$$\Pi_{\mu}^{\nu} c_{\nu}^{(1,2)} = \kappa_{1,2} c_{\mu}^{(1,2)}, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \quad \Pi_{\mu}^{\nu} a_{\nu} = \kappa_3 a_{\mu}, \quad \Pi_{\mu}^{\nu} k_{\nu} = 0. \quad (16)$$

Только три из них участвуют в разложении (15), поскольку одно из собственных значений равно нулю вследствие поперечности $\Pi_{\mu}^{\nu} k_{\nu} = 0$.

Три базисных вектора a_{μ} и $c_{\mu}^{(1,2)}$ служат 4-векторными потенциалами собственных электромагнитных волн. Ориентации соответствующих полей – электрического $e_i \sim k_0 a_i - k_i a_0$ (или $e_i \sim k_0 c_i^{(1,2)} - k_i c_0^{(1,2)}$) и магнитного $h_i = \epsilon_{ijn} k_j a_n$ (или $h_i = \epsilon_{ijn} k_j c_n^{(1,2)}$), вычисляемых по этим вектор-потенциалам, подробно описаны в работе [11]. В лоренцевой системе, в которой среда покоится, моды 1 и 2 – суть электромагнитные волны, поперечно поляризованные в плоскости, ортогональной волновому вектору $\mathbf{k}$, в то время как мода 3 является продольной электрической волной, причем магнитное поле в ней равно нулю, а электрическое направлено вдоль $\mathbf{k}$, $\mathbf{e} \sim \mathbf{k}(k_0^2 - \mathbf{k}^2)$. Данную волну можно реализовать при условии, что уравнение дисперсии имеет массивное решение с $k_0^2 - \mathbf{k}^2 \neq 0$. Мы отмечаем все это только для того, чтобы проиллюстрировать, как эти хорошо известные утверждения появляются в рассматриваемом формализме.

Вырождение $\kappa_1 = \kappa_2$ в соотношении (16) отражает симметрию задачи относительно поворотов вокруг направления скорости $\mathbf{V}$. Уравнения дисперсии (4) принимают вид

$$k^2 = \kappa_{1,2}(k^2, (uk)^2), \quad k^2 = \kappa_3(k^2, (uk)^2),$$

причем мы указали в явном виде зависимость собственных значений от двух лоренц-скаляров k^2 и $(uk)^2$.

В соответствии с представлением (15) пространственная часть тензора поляризации Π_{nj} помимо единичного тензора δ_{nj} формируется волновым вектором $\mathbf{k}$ и скоростью среды $\mathbf{V}$:

$$\Pi_{nj} = A\delta_{nj} + Bk_n k_j + C(k_n V_j + V_n k_j) + DV_n V_j,$$

где коэффициенты A , B , C и D представляют собой некоторые ротационные скаляры, функции от $\mathbf{k}^2$, V , $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})$ и k_0 . Таким образом, вектор $\mathbf{d}$, ортогональный к плоскости, натянутой на эти два вектора, $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{V}) = 0$, есть универсальный собственный вектор трехмерного тензора диэлектрической проницаемости (5):

$$\epsilon_{nj} d_j = \frac{A}{k_0^2} d_i.$$

Ориентация двух других собственных векторов в упомянутой плоскости зависит от индивидуальной ориентации векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{V}$. Такое положение типично для кристаллов моноклинной системы [17].

Мы завершаем этот пункт утверждением, согласно которому изотропная в покое среда ведет себя как анизотропная при движении. Ее диэлектрический тензор имеет три разных собственных значения (все они зависят от скорости среды), а три оптические оси определяются направлением этой скорости. Коэффициенты преломления также зависят от системы отсчета. Имеются три нормальные волны с разными законами дисперсии. Прозрачные изотропные тела, движущиеся с релятивистскими скоростями, являются двулучепреломляющими.

Согласно соотношениям (9), (10) в движущейся среде скорость каждой собственной волны, понимаемая как групповая скорость образованного из нее пакета, получается как релятивистская сумма ее групповой скорости в покоящейся среде и скорости среды. Подобный вывод касательно среды, анизотропной уже в покое, нельзя сделать на основании результатов п. 2.2, поскольку не ясно, можно ли к трехмерным тензорам, ответственным за эту анизотропию, применить релятивистски-ковариантное обобщение с помощью вектора u_μ .

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы продемонстрировали, что, когда волновой пакет является физическим носителем информации, для его групповой скорости справедлив стандартный релятивистский закон сложения скоростей (9), (10) независимо от того, является ли вакуум релятивистски-инвариантным, или его релятивистская инвариантность нарушена присутствием внешних векторов или тензоров. Тем самым показано, что процесс распространения света, управляемый уравнениями электромагнитного поля, зависящими от этих тензоров, гарантирует, что групповые скорости в системе покоя и в движущейся системе связаны между собой релятивистским законом преобразования скоростей сигнала. Это указывает на то, что в вакууме с нарушенной лоренц-инвариантностью, так же как и в лоренц-инвариантном случае [13], групповая скорость обладает важным свойством скорости сигнала. В частности, если групповая скорость и скорость системы отсчета не превышают значения $c = 1$ (скорости света в лоренц-инвариантном вакууме), то и результирующая групповая скорость в движущейся системе остается меньшей единицы. Таким образом, причинность в нормальных условиях должна сохраняться при нарушении релятивистской инвариантности.

Иногда, правда, так случается, что при динамических вычислениях в теориях с нарушенной релятивистской инвариантностью появляется сверхсветовой сигнал. Примерами такого рода является распространение света во внешней метрике [19] и в некоммутативной электродинамике [10], [20], а также в КЭД с крайне сильным внешнем полем [21] и в других системах (хотя в работах [20] в качестве сверхсветового агента рассматривалась фазовая скорость, заключение авторов оказывается правильным, поскольку оно относится равным образом и к групповой скорости). Есть соблазн отмахнуться от данного результата, говоря, что, коль скоро релятивистская инвариантность отброшена, больше нет резона переживать по поводу причинности, следуя принципу, выраженному в поговорке “Снявши голову, по волосам не плачут!” или в ее немецком рационализованном варианте “Ist der Kopf abgeschlagen, wird niemand nach dem Hute fragen (Если голова отрублена, никто не станет спрашивать о шляпе)”. Такая позиция обосновывается утверждением [22], согласно которому из-за “расширенного принципа относительности”, как мы его назвали в п. 2.3, невозможно устроить замкнутый временной цикл в релятивистски-неинвариантной теории, даже имея в своем распоряжении сверхсветовой сигнал. Интуитивно это положение выглядит парадоксальным, поскольку из него следует допустимость с точки зрения причинности, например, сверхсветового акустического сигнала, распространяющегося в абсолютно упругом теле, чье присутствие, разумеется, нарушает релятивистскую инвариантность, так как имеется выделенная система отсчета, в которой это тело покоится.

Мы, однако, придерживаемся противоположной точки зрения, совпадающей с мнением авторов работы [23]. Полученные нами результаты позволяют утверждать, что когда сверхсветовой сигнал переносится электромагнитным волновым пакетом в лоренц-инвариантной теории, принцип причинности нарушается таким же образом, как и в лоренц-инвариантной теории. Дело в том, что замкнутый временной цикл (“машину времени”) можно сконструировать в мысленном эксперименте, несмотря на отсутствие релятивистской инвариантности.

Действительно, пусть сигнал испущен источником, находящимся в покое в некоторой системе отсчета, отмечавшейся штрихом в п. 2.2. Пусть он испущен в начале координат $x' = 0$ в момент времени $t' = 0$, затем распространяется со сверхсветовой скоростью $v' > 1$ вдоль оси 1 и приходит в мировую точку (x'_1, t') , где $x'_1 = v't' > t'$. Поскольку эта точка пространственноподобна, существует преобразование Лоренца

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad t = \frac{t' + Vx'_1}{\sqrt{1 - V^2}},$$

при переходе в (не отмеченную штрихом) систему, движущуюся с отрицательной досветовой скоростью $1 > |V| > 1/v'$, которое меняет знак времени на обратный: $t < 0$. Для того чтобы мы могли отразить этот сигнал с помощью детектора, покоящегося в не отмеченной штрихом системе, с тем чтобы он попал в мировую точку $x = 0$, $t = 0$, отраженный сигнал должен иметь скорость $|v| = x/t = (x'_1 + Vt')/(t' + Vx'_1)$, а это и есть выражение (9) для групповой скорости в движущейся системе. (Допускается, что скорость в прямом и противоположном направлениях одна и та же.) Для завершения построения замкнутого цикла остается совершить обратное преобразование Лоренца, чтобы вернуться к системе, эквивалентной первоначальной. При этом мировая точка $x = 0$, $t = 0$ отображается в точку $x' = 0$, $t' = 0$.

Таким образом, коль скоро передача сверхсветового сигнала осуществляется с помощью волнового процесса, управляемого лоренц-скалярным уравнением дисперсии (4) (с использованием внешних тензоров), парадоксальное влияние следствия на породившую его причину может быть достигнуто, несмотря на отсутствие релятивистской инвариантности, обусловленное наличием внешних тензоров. Следовательно, ситуация, когда групповая скорость превышает единицу, должна быть признана противоречащей принципу причинности в теории, в которой лоренц-инвариантность нарушена внешним тензором, точно так же, как она признается таковой в лоренц-инвариантной теории.

Однако в работе [10], где превышение групповой скорости электромагнитной волны над скоростью света рассматривалось в некоммутативной электродинамике, было отмечено, что это превышение является чрезвычайно небольшим, $v^{\text{gr}} - 1 \ll 1$. В результате скорость детектора, необходимая для реализации парадокса *влияния будущего на прошлое*, становится слишком большой, недоступной в пределах существующего человеческого опыта. Другими словами, для реализации замкнутого цикла недостаточно располагать сверхсветовым сигналом, но также необходимо, чтобы некоторые макроскопические тела двигались со скоростью, приближающейся к скорости света: $1 > |V| > 1/v$. Современное знание не распространяется на такие скорости макроскопических приборов. Поэтому нарушение принципа причинности, хотя оно и представляется логически абсурдным, нельзя пока считать

противоречащим существующему множеству опытных данных в условиях, когда скорость сигнала лишь незначительно превышает скорость света.

Теперь мы применим этот анализ к сверхсветовым решениям для электромагнитных волн в метрике черной дыры, открытым в рамках приближения одной петли в пределе малых импульсов в работе [19]. В метрике Шварцшильда избыток скорости составляет

$$\Delta v \sim \frac{\alpha}{30\pi} \frac{R_{\text{gr}}}{r} \left(\frac{\lambda_{\text{C}}}{r} \right)^2,$$

где $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, R_{gr} – гравитационный радиус черной дыры, $\lambda_{\text{C}} \sim 2.4 \times 10^{-10}$ см – комптоновская длина электрона, а r – расстояние от центра звезды. Когда последнее равно ее гравитационному радиусу, $r = R_{\text{gr}}$, мы получаем, что

$$\Delta v \sim \frac{\alpha}{30\pi} \left(\frac{\lambda_{\text{C}}}{R_{\text{gr}}} \right)^2.$$

Даже для мельчайших черных дыр с массой порядка солнечной, когда справедливо соотношение $R_{\text{gr}} \sim 5 \times 10^5$ см, этот избыток составляет $\Delta v \sim 2 \times 10^{-35}$, что гораздо меньше того, что допускается оценками, следующими из некоммутативной теории в работе [10]. Это означает, что тахион, если он испущен из внутренности черной дыры, может преодолеть ее горизонт с очень маленьким превышением скорости над скоростью света, падающим до нуля при его дальнейшем удалении от черной дыры. Напротив, глубоко внутри черной дыры, где r мало, превышение скорости может быть большим, ограничиваемым единственно применимостью приближения в [19], т.е. $\Delta v \ll 1$. Можно себе представить, что тахион, испущенный из недр черной дыры, встречает по дороге к горизонту материю, которая падает в черную дыру со скоростью, приближающейся к скорости света. Последняя может отражать тахион обратно к его источнику, формируя необходимый “элемент” “машины времени”, описанной выше. Таким образом, возникает перспектива развития акаузальной электродинамики, основанной не только на запаздывающем, но и на опережающем взаимодействии.

Список литературы

- [1] V. A. Colladay, V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D*, **58**:11 (1998), 116002, 23 pp., arXiv: hep-ph/9809521; V. A. Kostelecký, M. Mewes, *Phys. Rev. D*, **66**:5 (2002), 056005, 24 pp., arXiv: hep-ph/0205211; *Phys. Rev. Lett.*, **99**:1 (2007), 011601, 4 pp., arXiv: astro-ph/0702379; **87**:25 (2001), 251304, 4 pp., arXiv: hep-ph/0111026; V. A. Kostelecký, A. G. M. Pickering, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:3 (2003), 031801, 3 pp., arXiv: hep-ph/0212382; S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 141601, 4 pp., arXiv: hep-th/0105082.
- [2] M. R. Douglas, N. Nekrasov, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 977–1029, arXiv: hep-th/0106048.
- [3] R. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207–299, arXiv: hep-th/0109162.
- [4] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*, Физматлит, М., 2003.
- [5] И. А. Баталин, А. Е. Шабад, *ЖЭТФ*, **60**:3 (1971), 894–900.
- [6] A. Ye. Shabad, *Polarization of the Vacuum and a Quantum Relativistic Gas in an External Field*, Nova Sci. Publ., New York, 1991; А. Е. Шабад, *Тр. ФИАН*, **192** (1988), 5–152.
- [7] Е. С. Фрадкин, “Квантовая теория поля и гидродинамика”, *Тр. ФИАН*, 1965, 7–138; Е. С. Фрадкин, *Избранные работы по теоретической физике*, ред. И. В. Тютин, Наука, М., 2007.

- [8] Н. Pérez Rojas, A. E. Shabad, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **121**:1–2 (1979), 432–455.
- [9] А. Кабо, А. Е. Шабад, “The Lorentz-covariant formulation of temperature: Green’s function method in relativistic statistics”, *Теоретико-групповые методы в физике* (Звенигород, 24–26 ноября 1982 г.), **2**, ред. М. А. Марков, Наука, М., 1983, 443–458; А. Кабо, А. Е. Шабад, *Тр. ФИАН*, **192** (1988), 153–203.
- [10] R. Fresneda, D. M. Gitman, A. E. Shabad, *Phys. Rev. D*, **91**:8 (2015), 085005, 10 pp., arXiv: 1501.04987.
- [11] E. Ferrer, V. de la Incera, A. E. Shabad, *Fortschr. Phys.*, **32**:6 (1984), 261–279.
- [12] S. Villalba-Chávez, A. E. Shabad, *Phys. Rev. D*, **86**:10 (2012), 105040, 28 pp., arXiv: 1206.4491.
- [13] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, М., 1973.
- [14] А. Е. Шабад, V. V. Usov, *Phys. Rev. D*, **81**:12 (2010), 125008, 15 pp., arXiv: 1002.1813.
- [15] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, New York, 1960.
- [16] А. Е. Шабад, V. V. Usov, *Nature*, **295** (1982), 215–217; *Astrophys. Space Sci.*, **117**:2 (1985), 309–325; **128**:2 (1986), 377–409; В. В. Усов, А. Е. Шабад, *Письма ЖЭТФ*, **42**:1 (1985), 17–20; Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский, *ЯФ*, **42**:2(8) (1985), 401–410; Н. Herold, Н. Ruder, G. Wunner, *Phys. Rev. Lett.*, **54**:13 (1985), 1452–1455.
- [17] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Электродинамика сплошных сред*, **8**, Наука, М., 1982.
- [18] А. Е. Шабад, V. V. Usov, *Convexity of effective Lagrangian in nonlinear electrodynamics as derived from causality*, arXiv: 0911.0640.
- [19] I. T. Drummond, S. J. Hathrell, *Phys. Rev. D*, **22**:2 (1980), 343–355.
- [20] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B*, **517**:3–4 (2001), 450–456, arXiv: hep-th/0106044; R. Cai, *Phys. Lett. B*, **517**:3–4 (2001), 457–461, arXiv: hep-th/0106047.
- [21] А. Е. Шабад, V. V. Usov, *Phys. Rev. D*, **83**:10 (2011), 105006, 16 pp., arXiv: 1101.2343.
- [22] G. M. Shore, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 379–394, arXiv: gr-qc/9504041.
- [23] A. D. Dolgov, I. D. Novikov, *Phys. Lett. B*, **442**:1–4 (1998), 82–89, arXiv: gr-qc/9807067.

Поступила в редакцию 25.07.2015