Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чуань-Чжун Ли, Цзин-Сун Хэ, Симметрия Вирасоро
многокомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили
со связями и ее интегрируемой дискретизации, *ТМФ*,
2016, том 187, номер 3, 487–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:32:17

© 2016 г.

Чуань-Чжун Ли*, Цзин-Сун Хэ*

СИММЕТРИЯ ВИРАСОРО МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ СО СВЯЗЯМИ И ЕЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Построены дополнительные симметрии типа симметрии Вирасоро для некоторой многокомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили со связями и получено уравнение потока Вирасоро для собственных функций и сопряженных собственных функций. Показано, что алгебраическая структура симметрии Вирасоро сохраняется после дискретизации многокомпонентной иерархии Кадомцева–Петвиашвили со связями с образованием дискретной многокомпонентной иерархии.

Ключевые слова: многокомпонентная иерархия КП со связями, дискретная многокомпонентная иерархия КП со связями, симметрия Вирасоро.

DOI: 10.4213/tmf9016

1. ВВЕДЕНИЕ

Иерархия КП является одной из самых важных нелинейных интегрируемых систем в математике и физике. Дополнительная симметрия иерархии КП была построена в работе [1]; эта дополнительная симметрия порождает хорошо известную алгебру, называемую алгеброй Вирасоро. Система КП – это одна из самых фундаментальных интегрируемых моделей математической физики, как и система Тоды. Иерархия КП со связями представляет собой важную подиерархию иерархии КП, получающуюся при наложении различных редукций на оператор Лакса, и содержит

Работа Чуань-Чжун Ли поддержана National Natural Science Foundation of China (гранты № 11201251, 11571192), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation (гранты № LY15A010004, LY12A01007) и Natural Science Foundation of Ningbo (грант № 2015A610157). Работа Цзин-Сун Хэ поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 11271210) и K. C. Wong Magna Fund (Ningbo University).

*Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, China.
E-mail: lichuanzhong@nbu.edu.cn, hejingsong@nbu.edu.cn

большое количество интересных солитонных уравнений с так называемой симметричной связью [2]–[4], которая означает, что отрицательная часть оператора Лакса иерархии КП со связями является генератором дополнительных симметрий иерархии КП. Однако дополнительные симметричные потоки иерархии КП не согласуются с конкретной формой оператора Лакса для иерархии КП со связями. Поэтому совсем непросто оказалось найти дополнительные симметричные потоки собственных функций и сопряженных собственных функций этой подыерархии [5], которые позволяют сделать связь совместной с дополнительной симметрией. Кроме упомянутых интегрируемых систем, существуют другие системы типа Тоды и КП, также имеющие интересные алгебраические структуры в дополнительных симметриях [6]–[9].

Многокомпонентная иерархия КП является важным матричным обобщением исходной иерархии КП, ее дополнительная симметрия подробно изучена в работе [10]. В работе [11] предложено представление, связанное с многокомпонентной иерархией КП. В некотором смысле многокомпонентная иерархия служит универсальной интегрируемой иерархией, поскольку многие хорошо известные интегрируемые иерархии получаются из ее частных редукций, например система Дэви–Стюартсона, двумерная цепочка Тоды, система n волн и система Дарбу–Егорова.

Билинейные уравнения Хироты для многокомпонентной иерархии КП играют интересную роль в теории тета-функций римановых поверхностей. Точнее говоря, в работе [12] показано, что тета-функция римановых поверхностей определяет тау-функцию для n -компонентной иерархии КП. Показано также, что такая тета-функция удовлетворяет формуле тройной секущей Фейя. В n -компонентном случае обнаружено новое интересное явление, которое отсутствует при $n = 1$: тау-функция и волновая функция представляют собой совокупность функций, параметризованных элементами решетки корней типа A .

В работе [13] с помощью редукции изучалась частная, но вполне естественная многокомпонентная иерархия КП со связями. Однако, что касается дополнительной симметрии этой редуцированной иерархии, то этот интересный вопрос все еще остается открытым. Это послужило одной из мотиваций настоящей работы. Недавнее исследование случайных матриц и броуновского движения без пересечений, а также изучение матриц моментов с учетом нескольких весов показало, что определители таких матриц моментов являются тау-функциями многокомпонентной иерархии КП [14]. Ввиду упомянутой важности многокомпонентной иерархии КП мы полагаем, что совершенно необходимо продолжить изучение как самой этой иерархии, так и ее редукций.

Кроме указанных непрерывных динамических систем, все более важными становятся дискретные интегрируемые системы. Среди многокомпонентных дискретных интегрируемых систем в последнее время немало полезных исследований было посвящено многокомпонентной иерархии Тоды (см., например, работы [15]–[17]). Гамильтоновы структуры и тау-функция дискретной иерархии КП были представлены в работах [18]–[20]. Дополнительные симметрии и дуговая симметрия для иерархии КП были рассмотрены соответственно в работах [8] и [21]. В нашей недавней работе [9] построены дополнительные симметрии однокомпонентной дискретной иерархии КП со связями, а также выписаны соответствующие дополнительные симметричные потоки для собственных функций и сопряженных собственных функций. В настоящей работе мы также рассмотрим дискретную многокомпонентную иерар-

хию КП со связями и определим алгебраическую структуру, скрытую в этой дискретной иерархии.

Наша основная задача – определить симметрию Вирасоро многокомпонентной иерархии КП со связями и выписать полный набор потоков Вирасоро (который образует положительную половину алгебры Вирасоро) для собственных функций и сопряженных собственных функций оператора Лакса иерархии, используя метод, изложенный в работах [5], [9]. Мы также определяем симметрию Вирасоро для дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями. Ее наличие указывает на то, что алгебраическая структура симметрии Вирасоро сохраняется после дискретизации многокомпонентной иерархии КП.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведено краткое описание N -компонентной иерархии КП со связями. Основные результаты сформулированы и доказаны в разделе 3, где рассматривается симметрия Вирасоро многокомпонентной иерархии КП со связями. В разделах 4 и 5 обсуждается симметрия Вирасоро дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями. Раздел 6 посвящен выводам и обсуждениям.

2. МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ИЕРАРХИЯ КП СО СВЯЗЯМИ

Для N -компонентной иерархии КП существуют N бесконечных семейств временных переменных $t_{\alpha,n}$, $\alpha = 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots$. Коэффициенты $u_1, u_2, \dots$ оператора Лакса

$$L = E\partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \dots \quad (2.1)$$

представляют собой матрицы размера $N \times N$ (здесь и далее ∂ – производная по пространственной переменной x). Имеются другие N псевдодифференциальных операторов $R_1, \dots, R_N$, представленных в матричной форме,

$$R_\alpha = E_\alpha + u_{\alpha 1}\partial^{-1} + u_{\alpha 2}\partial^{-2} + \dots,$$

где E_α – матрица размера $N \times N$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента с номером (α, α) , который равен единице, и $u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2}, \dots$ также представляют собой матрицы размера $N \times N$. Операторы $L, R_1, \dots, R_N$ удовлетворяют следующим условиям:

$$LR_\alpha = R_\alpha L, \quad R_\alpha R_\beta = \delta_{\alpha\beta} R_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^N R_\alpha = E.$$

Уравнения Лакса N -компонентной иерархии КП имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial t_{\alpha,n}} = [B_{\alpha,n}, L], \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial t_{\alpha,n}} = [B_{\alpha,n}, R_\beta], \quad B_{\alpha,n} := (L^n R_\alpha)_+.$$

Здесь нижний индекс $+$ означает проекцию на члены с неотрицательными степенями оператора ∂ . Можно проверить, что теперь оператор ∂ равен $\partial_{t_{11}} + \dots + \partial_{t_{N1}}$. Действительно, операторы L и R_α имеют следующую одевающую структуру:

$$L = S\partial S^{-1}, \quad R_\alpha = S E_\alpha S^{-1}, \quad (2.2)$$

где

$$S = E_N + \sum_{i=1}^{\infty} S_i \partial^{-i}, \quad (2.3)$$

причем коэффициент S_1 будет использован далее в иерархии со связями для определения собственных функций $P^{(r)}$ и сопряженных собственных функций $Q^{(r)}$.

Как и в работе [13], наложим на N -компонентную иерархию КП редукцию

$$\sum_{l=1}^r d_l^s (LR_l)^s + \sum_{l=r+1}^N LR_l = \sum_{l=1}^r d_l^s (LR_l)_+^s + \sum_{l=r+1}^N (LR_l)_+, \quad 1 \leq r \leq N. \quad (2.4)$$

Введем следующие обозначения для операторов, как в работе [13]:

$$\hat{\partial} := \partial_1 + \partial_1 + \cdots + \partial_r, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial t_{i,1}},$$

$$\hat{L}^{(i)} = S^{(r)}(\hat{\partial}) E_i^{(r)} \hat{\partial} (S^{(r)}(\hat{\partial}))^{-1}, \quad \hat{L} = \sum_{i=1}^r d_i \hat{L}^{(i)},$$

а также

$$B_k^{(l,r)} = (S^{(r)}(\hat{\partial}) E_l^{(r)} \hat{\partial}^k (S^{(r)}(\hat{\partial}))^{-1})_+ := (C_k^{(l,r)})_+,$$

$$C_k^{(l,r)} = S^{(r)}(\hat{\partial}) E_l^{(r)} \hat{\partial}^k (S^{(r)}(\hat{\partial}))^{-1}, \quad 1 \leq l \leq r,$$

и

$$P^{(r)} = (S_1)_{ij} \Big|_{\substack{1 \leq i \leq r, \\ r+1 \leq j \leq N}}, \quad Q^{(r)} = (S_1)_{ij} \Big|_{\substack{1 \leq j \leq r, \\ r+1 \leq i \leq N}},$$

где $S^{(r)}(E_i^{(r)})$ – главная $(r \times r)$ -подматрица матрицы $S(E_i)$, а $(+)$ -проекция относится к оператору $\hat{\partial}$. В результате имеем

$$\mathcal{L} = \hat{L}^s = \sum_{l=1}^r d_l^s B_s^{(l,r)} + P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)}.$$

Наложив связи (2.4), мы можем вывести эволюционные уравнения для N -компонентной иерархии КП со связями [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для N -компонентной иерархии КП со связями имеют место следующие иерархии уравнений:*

$$\frac{\partial P^{(r)}}{\partial t_{l,n}} = B_n^{(l,r)} P^{(r)}, \quad \frac{\partial Q^{(r)}}{\partial t_{l,n}} = -(B_n^{(l,r)})^* Q^{(r)}, \quad \frac{\partial \hat{L}^s}{\partial t_{l,n}} = [B_n^{(l,r)}, \hat{L}^s],$$

где для $B_n^{(l,r)} = \sum_{i=0}^n B_i \hat{\partial}^i$

$$(B_n^{(l,r)})^* Q^{(r)} := \sum_{i=0}^n (-1)^i \hat{\partial}^i (Q^{(r)} B_i).$$

Если $r = 1$, $N = 2$, то мы получаем иерархию КП с s связями [3], [4]. Если $r = 1$, $N \geq 2$, мы имеем векторную иерархию КП с s связями [22]. При произвольных r и N мы получаем обобщенную иерархию КП со связями, которая также встречается в рамках обобщенной конструкции Дринфельда–Соколова [23], [24].

3. СИММЕТРИЯ ВИРАСОРО МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ИЕРАРХИИ КП СО СВЯЗЯМИ

В этом разделе мы строим дополнительную симметрию и обсуждаем алгебраическую структуру дополнительных симметричных потоков N -компонентной иерархии КП со связями.

Определим оператор $\hat{\Gamma}^{(r)}$ и оператор Орлова–Шульмана $\mathcal{M}$, как это сделано в работе [25]:

$$\hat{\Gamma}^{(r)} = \sum_{\beta=1}^r t_{\beta,1} \frac{E_{\beta}}{s d_{\beta}^s} \hat{\partial}^{1-s} + \sum_{\beta=1}^r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{s} d_{\beta}^{-s} E_{\beta} \hat{\partial}^{n-s} t_{n,\beta}, \quad \mathcal{M} = S^{(r)} \hat{\Gamma}^{(r)} (S^{(r)})^{-1}. \quad (3.1)$$

Легко получить формулу

$$[\partial_{t_{n,\beta}} - \hat{\partial}^n E_{\beta}, \hat{\Gamma}^{(r)}] = 0. \quad (3.2)$$

Имеют место коммутационные соотношения

$$\left[\sum_{\beta=1}^r d_{\beta}^s \hat{\partial}^s E_{\beta}, \hat{\Gamma}^{(r)} \right] = E, \quad (3.3)$$

которые можно проверить прямыми вычислениями. Используя уравнение Сато, запишем изоспектральный поток оператора $\mathcal{M}$ в виде $\partial_{t_{n,\beta}} \mathcal{M} = [B_n^{(\beta,r)}, \mathcal{M}]$ или, в более общей форме, в виде

$$\partial_{t_{n,\beta}} (\mathcal{M}^m \mathcal{L}^l) = [B_n^{(\beta,r)}, \mathcal{M}^m \mathcal{L}^l].$$

Оператор Лакса $\mathcal{L}$ и оператор Орлова–Шульмана $\mathcal{M}$ удовлетворяют каноническому соотношению

$$[\mathcal{L}, \mathcal{M}] = E. \quad (3.4)$$

Теперь дополнительные потоки для временной переменной $t_{m,n,\beta}$ определяются как

$$\frac{\partial S}{\partial t_{m,n,\beta}} = -(\mathcal{M}^m C_n^{(\beta,r)})_- S, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \beta \leq r,$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{m,n,\beta}} = -[(\mathcal{M}^m C_n^{(\beta,r)})_-, \mathcal{L}], \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_{m,n,\beta}} = -[(\mathcal{M}^m C_n^{(\beta,r)})_-, \mathcal{M}].$$

Далее мы докажем, что дополнительные потоки $\partial/\partial t_{m,n,\beta}$ коммутируют с потоком $\partial/\partial t_{k,\gamma}$, т. е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_{m,n,\beta}}, \frac{\partial}{\partial t_{k,\gamma}} \right] = 0,$$

но не коммутируют друг с другом. Они образуют некоторую W_{∞} -алгебру Ли бесконечномерных дополнительных симметрий, содержащую алгебру Виасоро в качестве специальной подалгебры.

Для указанных выше локальных дифференциальных операторов $B_n^{(\beta,r)}$ справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Имеет место следующее равенство:*

$$[B_n^{(\beta,r)}, P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)}]_- = B_n^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} B_n^{(\beta,r)*}(Q^{(r)}). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фундаментальный одночлен $\hat{\partial}^n$ (для $n \geq 1$). Тогда

$$[\hat{\partial}^n, P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)}]_- = (\hat{\partial}^n(P^{(r)})) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - (P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} \hat{\partial}^n)_-.$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} (P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} \hat{\partial}^n)_- &= (P^{(r)} Q^{(r)} \hat{\partial}^{n-1} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (\hat{\partial} Q^{(r)}) \hat{\partial}^{n-1})_- = \\ &= (P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (-\hat{\partial} Q^{(r)}) \hat{\partial}^{n-1})_- = \dots = P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} ((-\hat{\partial})^n(Q^{(r)})) = P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (\hat{\partial}^n)^*(Q^{(r)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В следующем предложении доказано некоторое свойство оператора Лакса.

ЛЕММА 3.2. *Оператор Лакса $\mathcal{L}$ N -компонентной иерархии КП со связями удовлетворяет уравнению*

$$(\mathcal{L}^k)_- = \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{L}^{k-j-1}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (\mathcal{L}^*)^j(Q^{(r)}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.6)$$

где $\mathcal{L}(\phi) := (\mathcal{L})_+(\phi) + P^{(r)} \hat{\partial}^{-1}(Q^{(r)} \phi)$ для произвольной $(r \times r)$ -матричной функции ϕ .

Действие начальных дополнительных потоков N -компонентной иерархии КП со связями выражается формулой

$$(\partial_{1,k,\beta} \mathcal{L})_- = [(\mathcal{M} C_k^{(\beta,r)})_+, \mathcal{L}]_- + (C_k^{(\beta,r)})_-. \quad (3.7)$$

Чтобы сохранить согласованность с уравнениями потоков для собственной функции $P^{(r)}$ и сопряженной собственной функции $Q^{(r)}$, введем псевдодифференциальный оператор $T_k^{(\alpha,r)}$, модифицирующий дополнительную симметрию многокомпонентной иерархии КП со связями:

$$\begin{aligned} T_k^{(\alpha,r)} &= 0, \quad k = -1, 0, 1, \\ T_k^{(\alpha,r)} &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Для описания симметрии Вирасоро нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 3.3. *Если $X = M \hat{\partial}^{-1} N$, то*

$$[X, \mathcal{L}]_- = [M \hat{\partial}^{-1} \mathcal{L}^*(N) - \mathcal{L}(M) \hat{\partial}^{-1} N] + [X(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} X^*(Q^{(r)})].$$

ЛЕММА 3.4. *Действие потоков $\partial_{t_l,\beta}$ N -компонентной иерархии КП со связями на оператор $T_k^{(\alpha,r)}$ имеет вид*

$$\partial_{t_l,\beta} T_k^{(\alpha,r)} = [B_l^{(\beta,r)}, T_k^{(\alpha,r)}]_-. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_{l,\beta}} T_k^{(\alpha,r)} &= \partial_{t_{l,\beta}} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] \{ \partial_{t_{l,\beta}} (C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)})) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) + \\
 &\quad + C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} \partial_{t_{l,\beta}} ((C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)})) \} = \\
 &= \left[B_l^{(\beta,r)} \circ \sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) \right]_- - \\
 &\quad - \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) \right) \circ B_l^{(\beta,r)} \right]_- = \\
 &= \left[B_l^{(\beta,r)}, \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) \right) \right]_- = \\
 &= [B_l^{(\beta,r)}, T_k^{(\alpha,r)}]_-.
 \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Чтобы ввести дополнительные потоки N -компонентной иерархии КП со связями, нам необходимо найти $[T_{k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}]_-$.

ЛЕММА 3.5. *Оператор Лакса $\mathcal{L}$ N -компонентной иерархии КП со связями и оператор $T_{k-1}^{(\beta,r)}$ связаны следующим равенством:*

$$\begin{aligned}
 [T_{k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}]_- &= -(C_k^{(\beta,r)})_- + \frac{k}{2} [P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (C_{k-1}^{(\beta,r)*})(Q^{(r)}) + C_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} + \\
 &\quad + T_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (T_{k-1}^{(\beta,r)*})(Q^{(r)})]. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned}
 [T_{k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}]_- &= \left[\sum_{j=0}^{k-2} \left[j - \frac{1}{2}(k-2) \right] C_{k-2-j}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\beta,r)*})(Q^{(r)}), \mathcal{L} \right]_- = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-2} \left[j - \frac{1}{2}(k-2) \right] C_{k-2-j}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_{j+1}^{(\beta,r)*})(Q^{(r)}) - \\
 &\quad - \sum_{j=0}^{k-2} \left[j - \frac{1}{2}(k-2) \right] C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\beta,r)*})(Q^{(r)}) + \\
 &\quad + (T_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (T_{k-1}^{(\beta,r)*})(Q^{(r)})) = \\
 &= - \sum_{j=1}^{k-2} C_{k-1-j}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_j^{(\beta,r)*})(Q^{(r)}) + \\
 &\quad + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) [P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} C_{k-1}^{(\beta,r)*}(Q^{(r)}) + C_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)}] + \\
 &\quad + (T_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1} (T_{k-1}^{(\beta,r)*})(Q^{(r)})).
 \end{aligned}$$

Равенство (3.9) можно получить, используя уравнение (3.6).

Сопоставляя уравнения (3.7) и (3.9), введем дополнительные потоки N -компонентной иерархии КП со связями:

$$\partial_{t_{1,k,\beta}} \mathcal{L} = [-(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_- + T_{k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}], \quad (3.10)$$

где $T_{k-1}^{(\beta,r)} = 0$ для $k = 0, 1, 2$, так что правая часть уравнения (3.10) принимает вид некоторого уравнения Лакса. В общем случае можно также вывести уравнение

$$\partial_{t_{1,k,\beta}} (\mathcal{ML}^l) = [-(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_- + T_{k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{ML}^l]. \quad (3.11)$$

Теперь вычислим действие дополнительных потоков (3.10) на собственные функции $P^{(r)}$ и $Q^{(r)}$ N -компонентной иерархии КП со связями.

ТЕОРЕМА 3.1. Действие дополнительных потоков N -компонентной иерархии КП со связями на собственные функции $P^{(r)}$ и $Q^{(r)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{t_{1,k,\beta}} P^{(r)} &= (\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_+(P^{(r)}) + T_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) + \frac{k}{2} C_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}), \\ \partial_{t_{1,k,\beta}} Q^{(r)} &= -(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_+^*(Q^{(r)}) - (T_{k-1}^{(\beta,r)})^*(Q^{(r)}) + \frac{k}{2} C_{k-1}^{(\beta,r)*}(Q^{(r)}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка равенства (3.9) в (3.10) дает

$$\begin{aligned} (\partial_{t_{1,k,\beta}} \mathcal{L})_- &= (\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_+(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1}(Q^{(r)}) - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1}(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_+^*(Q^{(r)}) + \\ &+ T_{k-1}^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1}Q^{(r)} - P^{(r)} \hat{\partial}^{-1}(T_{k-1}^{(\beta,r)})^*(Q^{(r)}) + \\ &+ \frac{k}{2} P^{(r)} \hat{\partial}^{-1}(T_{k-1}^{(\beta,r)})^*(Q^{(r)}) + \frac{k}{2} C_k^{(\beta,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1}Q^{(r)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

С другой стороны,

$$(\partial_{t_{1,k,\beta}} \mathcal{L})_- = (\partial_{t_{1,k,\beta}} P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1}Q^{(r)} + P^{(r)} \hat{\partial}^{-1}(\partial_{t_{1,k,\beta}} Q^{(r)}). \quad (3.14)$$

Сопоставление правых частей равенств (3.13), (3.14) приводит к выражениям (3.12).

Докажем теперь коммутационное соотношение между дополнительными потоками $\partial_{t_{1,k,\beta}}$ N -компонентной иерархии КП со связями и начальными ее потоками $\partial_{t_{l,\alpha}}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Дополнительные потоки $\partial_{t_{1,k,\beta}}$ являются симметричными потоками N -компонентной иерархии КП со связями, т. е. они коммутируют со всеми потоками $\partial_{t_{l,\alpha}}$ этой иерархии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с действием операторов $\partial_{t_{1,k,\beta}}$ и $\partial_{t_{l,\alpha}}$ на одевающий оператор S имеем

$$\begin{aligned} [\partial_{t_{1,k,\beta}}, \partial_{t_{l,\alpha}}] S &= -\partial_{t_{1,k,\beta}} ((C_l^{(\alpha,r)})_- S) - \partial_{t_{l,\alpha}} (-(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_- + T_{k-1}^{(\beta,r)}) S = \\ &= (-\partial_{t_{1,k,\beta}} C_l^{(\alpha,r)})_- S - (C_l^{(\beta,r)})_- \partial_{t_{1,k,\beta}} S - [(\mathcal{MC}_k^{(\beta,r)})_- - T_{k-1}^{(\beta,r)}] (C_l^{(\alpha,r)})_- S + \\ &+ [(C_l^{(\alpha,r)})_+, \mathcal{MC}_k^{(\beta,r)}]_- S - (\partial_{t_{l,\alpha}} T_{k-1}^{(\beta,r)}) S = \\ &= [(C_l^{(\alpha,r)})_-, -T_{k-1}^{(\beta,r)}]_- S + [-T_{k-1}^{(\beta,r)}, C_l^{(\alpha,r)}]_- S - (\partial_{t_{l,\alpha}} T_{k-1}^{(\beta,r)}) S = \\ &= [B_l^{(\alpha,r)}, T_{k-1}^{(\beta,r)}]_- S - (\partial_{t_{l,\alpha}} T_{k-1}^{(\beta,r)}) S = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

Учтем условие $T_{k-1}^{(\beta,r)} = 0$ для $k = 0, 1, 2$, тогда соотношения (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned}\partial_{t_{1,l,\beta}} P^{(r)} &= (\mathcal{M}C_l^{(\beta,r)})_+(P^{(r)}) + \frac{l}{2}C_{l-1}^{(\beta,r)}P^{(r)}, \\ \partial_{t_{1,l,\beta}} Q^{(r)} &= -(\mathcal{M}C_l^{(\beta,r)*})_+(Q^{(r)}) + \frac{l}{2}C_{l-1}^{(\beta,r)*}Q^{(r)}, \quad l = 0, 1, 2.\end{aligned}\quad (3.15)$$

С помощью этих равенств и соотношения

$$\partial_{t_{1,l,\beta}}(\mathcal{L}^k(P^{(r)})) = (\partial_{t_{1,l,\beta}}(\mathcal{L}^k))(P^{(r)}) + \mathcal{L}^k\partial_{t_{1,l,\beta}}(P^{(r)})$$

можно показать, что дополнительные потоки $\partial_{t_{1,l,\beta}}$ N -компонентной иерархии КП со связями удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\partial_{t_{1,l,\beta}}C_k^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) &= (\mathcal{M}C_l^{(\beta,r)})_+(C_k^{(\alpha,r)}(P^{(r)})) + \\ &\quad + \left(k + \frac{l}{2}\right)C_{k+l-1}^{(\alpha,r)}\delta_{\alpha,\beta}(P^{(r)}) + T_{l-1}^{(\beta,r)}C_k^{(\alpha,r)}(P^{(r)}), \\ \partial_{t_{1,l,\beta}}C_k^{(\alpha,r)*}(Q^{(r)}) &= -(\mathcal{M}C_l^{(\beta,r)*})_+(C_k^{(\alpha,r)*}(Q^{(r)})) + \\ &\quad + \left(k + \frac{l}{2}\right)C_{k+l-1}^{(\alpha,r)*}\delta_{\alpha,\beta}(Q^{(r)}) + (T_{l-1}^{(\beta,r)}C_k^{(\alpha,r)*})(P^{(r)}).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Более того, действие потока $\partial_{t_{1,l,\beta}}$ на $T_k^{(\alpha,r)}$ дается следующей леммой.

ЛЕММА 3.6. Действие дополнительных симметричных потоков $\partial_{t_{1,l,\beta}}$ N -компонентной иерархии КП со связями на $T_k^{(\alpha,r)}$ имеет вид

$$\partial_{t_{1,l,\beta}}T_k^{(\alpha,r)} = [(\mathcal{M}C_l^{\beta,r})_+ + T_{l-1}^{(\beta,r)}, T_k^{(\alpha,r)}]_- + (k - l + 1)T_{k+l-1}^{(\alpha,r)}\delta_{\alpha,\beta}. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После простых вычислений с использованием равенств (3.16) получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\partial_{t_{1,l,\beta}}T_k^{(\alpha,r)} &= \partial_{t_{1,l,\beta}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left[j - \frac{1}{2}(k-1)\right]C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)})\hat{\partial}^{-1}(C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)})\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left[j - \frac{1}{2}(k-1)\right](\partial_{t_{1,l,\beta}}(C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}))\hat{\partial}^{-1}(C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}) + \\ &\quad + C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)})\hat{\partial}^{-1}(\partial_{t_{1,l,\beta}}(C_j^{(\alpha,r)*})(Q^{(r)}))) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left[j - \frac{1}{2}(k-1)\right][(\mathcal{M}C_l^{\beta,r})_+ + T_{l-1}^{(\beta,r)}](C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}))\hat{\partial}^{-1}(C_l^{\beta,r}*)(Q^{(r)}) + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\left[j - \frac{1}{2}(k-1)\right]\left(k - j - 1 + \frac{l}{2}\right)C_{k+l-2-j}^{\alpha,r}(P^{(r)})\hat{\partial}^{-1}(C_j^{\beta,r}*)(Q^{(r)})\delta_{\alpha,\beta} - \\ &\quad - \sum_{j=0}^{k-1}\left[j - \frac{1}{2}(k-1)\right]C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)})\hat{\partial}^{-1}[(\mathcal{M}C_l^{\beta,r})_* + (T_{l-1}^{(\beta,r)})^*](C_j^{\beta,r}*)(Q^{(r)}) =\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] \left(j + \frac{l}{2} \right) C_{k-1-j}^{(\alpha,r)}(P^{(r)}) \hat{\partial}^{-1} (C_{j+l-1}^{\beta,r})^* (Q^{(r)}) \delta_{\alpha,\beta}.$$

После упрощения мы получаем (3.17).

Теперь пора определить алгебраическую структуру дополнительных симметричных потоков N -компонентной иерархии КП со связями.

ТЕОРЕМА 3.3. *Дополнительные потоки $\partial_{t_{1,k,\beta}}$ N -компонентной иерархии КП со связями образуют положительную половину алгебры Вирасоро, т. е. выполнены равенства*

$$[\partial_{t_{1,l,\alpha}}, \partial_{t_{1,k,\beta}}] = (k-l) \delta_{\alpha,\beta} \partial_{t_{1,k+l-1,\alpha}}, \quad l = 0, 1, 2, \quad k \geq 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq r. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение

$$[(MC_l^{(\alpha,r)})_-, T_{k-1}^{(\beta,r)}]_- = [(MC_l^{(\alpha,r)})_-, T_{k-1}^{(\beta,r)}]$$

и тождество Якоби, производим следующие выкладки:

$$\begin{aligned} & [\partial_{t_{1,l,\alpha}}, \partial_{t_{1,k,\beta}}] \mathcal{L} = \\ & = \partial_{t_{1,l,\alpha}} ([-(MC_k^{(\beta,r)})_-, \mathcal{L}] + [T_{k-1}^{\beta,r}, \mathcal{L}]) - \partial_{t_{1,k,\beta}} ([-(MC_l^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}] + [T_{l-1}^{\alpha,r}, \mathcal{L}]) = \\ & = \partial_{t_{1,l,\alpha}} [-(MC_k^{(\beta,r)})_-, \mathcal{L}] + [\partial_{t_{1,l,\alpha}} T_{k-1}^{\beta,r}, \mathcal{L}] + [T_{k-1}^{\beta,r}, \partial_{t_{1,l,\alpha}} \mathcal{L}] + [\partial_{t_{1,k,\beta}} (MC_l^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}] + \\ & \quad + [(MC_l^{\alpha,r})_-, \partial_{t_{1,k,\beta}} \mathcal{L}] - [\partial_{t_{1,k,\beta}} T_{l-1}^{\alpha,r}, \mathcal{L}] - [T_{l-1}^{\alpha,r}, \partial_{t_{1,k,\beta}} \mathcal{L}] = \\ & = [[(MC_l^{(\alpha,r)})_-, MC_k^{(\beta,r)}]_-, \mathcal{L}] + [-(MC_k^{(\beta,r)})_-, [-(MC_l^{(\alpha,r)})_-, \mathcal{L}]] + \\ & \quad + [[(MC_l^{\alpha,r})_+, T_{k-1}^{\beta,r}]_- + (k-l) T_{k+l-2}^{(\beta,r)} \delta_{\alpha,\beta}, \mathcal{L}] + \\ & \quad + [T_{k-1}^{\beta,r}, [-(MC_l^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}]] + [[-(MC_k^{(\beta,r)})_-, T_{k-1}^{\beta,r}, MC_l^{\alpha,r}]_-, \mathcal{L}] + \\ & \quad + [(MC_l^{\alpha,r})_-, [-(MC_k^{(\beta,r)})_-, T_{k-1}^{\beta,r}, \mathcal{L}]] = \\ & = [[(MC_l^{(\alpha,r)})_-, MC_k^{(\beta,r)}]_-, \mathcal{L}] + [-(MC_k^{(\beta,r)})_-, [-(MC_l^{(\alpha,r)})_-, \mathcal{L}]] + \\ & \quad + [(k-l) T_{k+l-2}^{(\beta,r)} \delta_{\alpha,\beta}, \mathcal{L}] + [[-(MC_k^{(\beta,r)})_-, MC_l^{\alpha,r}]_-, \mathcal{L}] + \\ & \quad + [(MC_l^{\alpha,r})_-, [-(MC_k^{(\beta,r)})_-, \mathcal{L}]] = \\ & = (k-l) [-\delta_{\alpha,\beta} (MC_{l+k-1}^{(\alpha,r)})_-, \mathcal{L}] + [(k-l) T_{k+l-2}^{(\beta,r)} \delta_{\alpha,\beta}, \mathcal{L}] = \\ & = (k-l) \delta_{\alpha,\beta} \partial_{t_{1,k+l-1,\alpha}} \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

Введем оператор $L_{k-1,\alpha} := \partial_{t_{1,k,\alpha}}$ и рекуррентным образом построим все высшие операторы Вирасоро:

$$L_{k+1,\alpha} \delta_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{k-1} [L_{k,\alpha}, L_{1,\beta}], \quad k \geq 2.$$

Поскольку

$$[L_{m,\alpha}, L_{k+1,\beta}] = \frac{m-1}{k-1} [L_{k,\beta}, L_{m+1,\alpha}] + \frac{k-m}{k-1} [L_{1,\alpha}, L_{m+k,\beta}],$$

с помощью индукции можно показать, что полученные таким рекуррентным способом высшие операторы Вирасоро образуют замкнутую матричную алгебру Вирасоро с точностью до несущественных членов, содержащих потоки, коммутирующие с $sl(2)$ -генераторами дополнительных симметрий $\{L_{-1,\alpha}, L_{0,\alpha}, L_{1,\alpha}, 1 \leq \alpha \leq r\}$.

4. ДИСКРЕТНАЯ МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ИЕРАРХИЯ КП СО СВЯЗЯМИ

Для полноты статьи в начале этого раздела напомним некоторые полезные факты из дискретной математики.

Для любой функции $f(n)$ можно ввести дискретный дифференциал Δ и дискретный оператор сдвига Λ по формулам

$$\Delta(f(n)) = f(n+1) - f(n), \quad \Lambda(f(n)) = f(n+1).$$

Формальный оператор, обратный к Δ , обозначим как Δ^{-1} . Справедливо следующее дискретное деформированное правило Лейбница:

$$\Delta^n \circ f = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \Lambda^{n-k} (\Delta^k f) \Delta^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для любых двух псевдодифференциальных операторов $W = \sum_i p_i(n) \Delta^i$ введем операцию сопряжения $*$ оператора W по формуле $W^* = \sum_i (\Delta^*)^i p_i(n)$, где

$$\Delta^* = -\Delta \Lambda^{-1}, \quad (\Delta^{-1})^* = (\Delta^*)^{-1} = -\Lambda \Delta^{-1}.$$

Докажем теперь некоторые полезные свойства операторов, которые будут использоваться далее.

ЛЕММА 4.1. *Для произвольной функции f и заданных выше операторов Δ , Λ справедливы следующие тождества:*

$$\begin{aligned} \Delta \circ \Lambda &= \Lambda \circ \Delta, \\ \Delta^{-1} \circ f \circ \Delta^{-1} &= (\Delta^{-1} f) \circ \Delta^{-1} - \Delta^{-1} \circ \Lambda (\Delta^{-1} f), \\ \Delta^{-1} \circ f &= \Lambda^{-1}(f) \circ \Delta^{-1} + \Delta^{-1} \circ (\Delta^* f) \circ \Delta^{-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является прямым и стандартным. Мы его опустим.

В силу сформулированной леммы для произвольных функций f_1, g_1, f_2, g_2 можно вывести следующую формулу:

$$f_1 \Delta^{-1} g_1 \circ f_2 \Delta^{-1} g_2 = f_1 \Delta^{-1}(g_1, f_2) \Delta^{-1} g_2 - f_1 \Delta^{-1} \circ \Lambda(\Delta^{-1}(g_1, f_2)) g_2. \tag{4.2}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Справедливы тождества*

$$\begin{aligned} \text{res}((\Delta A)(n)) &= \text{res}(\Delta \circ A(n) - A(n+1) \circ \Delta), \\ \text{res}(\Delta^{-1} A) &= (\Lambda^{-1} P_0(A^*)), \\ P_{<0}(\Delta^{-1} A) &= \Delta^{-1} P_{<0}(A) + \Delta^{-1} P_0(A^*), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где (ΔA) означает действие оператора Δ на оператор A , $(\Lambda^{-1} P_0(A^*))$ означает сдвиг в обратном направлении по x функции $P_0(A^*)$ (член нулевого порядка в разложении оператора A^* по Δ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти в работе [8].

Проведя интегрируемую дискретизацию вида $u(n) = u(x + n\epsilon)$, можно получить результаты, схожие с результатами для непрерывной многокомпонентной иерархии КП. Используя последнее предложение, можно доказать следующее утверждение, которое аналогично сформулированному в работе [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если α и β – два локальных дискретных оператора, то

$$\text{res}(\Delta^{-1}\alpha\beta\Delta^{-1}) = \text{res}(\Delta^{-1}P_0(\alpha^*)\beta\Delta^{-1}) + \text{res}(\Delta^{-1}\alpha P_0(\beta)\Delta^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству из работы [8].

Оператор Лакса L_Δ дискретной многокомпонентной иерархии КП имеет вид

$$L_\Delta = E\Delta + v_0 + v_{-1}\Delta^{-1} + v_{-2}\Delta^{-2} + \dots, \quad (4.4)$$

где $v_i = v_i(n, t_{\alpha,n}, \dots)$, $i = 0, -1, -2, \dots$, представляют собой матрицы размера $N \times N$. Существуют также N псевдодифференциальных операторов $R_{\Delta 1}, \dots, R_{\Delta N}$ вида

$$R_{\Delta\alpha} = E_\alpha + v_{\alpha 1}\Delta^{-1} + v_{\alpha 2}\Delta^{-2} + \dots,$$

где E_α – матрица размера $N \times N$, содержащая единственный ненулевой элемент, равный единице, на пересечении строки и столбца с номером α , а $v_{\alpha 1}, v_{\alpha 2}, \dots$ – также матрицы размера $N \times N$. Операторы $L_\Delta, R_{\Delta 1}, \dots, R_{\Delta N}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$L_\Delta R_{\Delta\alpha} = R_{\Delta\alpha} L_\Delta, \quad R_{\Delta\alpha} R_{\Delta\beta} = \delta_{\alpha\beta} R_{\Delta\alpha}, \quad \sum_{\alpha=1}^N R_{\Delta\alpha} = E.$$

Уравнения Лакса для дискретной многокомпонентной иерархии КП имеют вид

$$\frac{\partial L_\Delta}{\partial t_{\alpha,n}} = [B_{\Delta\alpha,n}, L_\Delta], \quad \frac{\partial R_{\Delta\beta}}{\partial t_{\alpha,n}} = [B_{\Delta\alpha,n}, R_{\Delta\beta}],$$

где $B_{\Delta\alpha,n} := (L_\Delta^n R_{\Delta\alpha})_+$. Действительно, оператор Лакса L_Δ в уравнении (4.4) и оператор $R_{\Delta\alpha}$ имеют следующие одевающие структуры:

$$L_\Delta = S_\Delta \Delta S_\Delta^{-1}, \quad R_{\Delta\alpha} = S_\Delta E_\alpha S_\Delta^{-1},$$

где

$$S_\Delta = E + \sum_{i=1}^{\infty} S_{\Delta i} \Delta^{-i}.$$

Одевающий оператор S_Δ удовлетворяет уравнению Сато

$$\frac{\partial S_\Delta}{\partial t_{\alpha,n}} = -(L_\Delta^n R_{\Delta\alpha})_- S_\Delta, \quad 1 \leq \alpha \leq N, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ниже рассматривается одна из редукций дискретной многокомпонентной иерархии КП, которая превращается в дискретную многокомпонентную иерархию КП со связями.

Как и в работе [13], наложим следующую редукцию на дискретную N -компонентную иерархию КП: для $1 \leq r \leq N$ выполнены равенства

$$\sum_{l=1}^r d_l^s (L_{\Delta} R_{\Delta l})^s + \sum_{l=r+1}^N L_{\Delta} R_{\Delta l} = \sum_{l=1}^r d_l^s (L_{\Delta} R_{\Delta l})_+^s + \sum_{l=r+1}^N (L_{\Delta} R_{\Delta l})_+. \quad (4.5)$$

Введем следующие операторы [13]:

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta} &:= \partial_1 + \partial_1 + \cdots + \partial_r, & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial t_{i,1}}, \\ \widehat{L}_{\Delta}^{(i)} &= S_{\Delta}^{(r)}(\widehat{\Delta}) E_i^{(r)} \widehat{\Delta} (S_{\Delta}^{(r)}(\widehat{\Delta}))^{-1}, & \widehat{L}_{\Delta} &= \sum_{i=1}^r d_i \widehat{L}_{\Delta}^{(i)}, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} B_{\Delta k}^{(l,r)} &= (S_{\Delta}^{(r)}(\widehat{\Delta}) E_l^{(r)} \widehat{\Delta}^k (S_{\Delta}^{(r)}(\widehat{\Delta}))^{-1})_+ = (C_{\Delta k}^{(l,r)})_+, & 1 \leq l \leq r, \\ \phi_{\Delta}^{(r)} &= (S_{\Delta 1})_{ij} \Big|_{\substack{1 \leq i \leq r, \\ r+1 \leq j \leq N}}, & \psi_{\Delta}^{(r)} = (S_{\Delta 1})_{ij} \Big|_{\substack{1 \leq j \leq r, \\ r+1 \leq i \leq N}}, \end{aligned}$$

где $S_{\Delta}^{(r)}$ – главная $(r \times r)$ -подматрица матрицы S_{Δ} и используются $(+)$ -проекции по отношению к оператору $\widehat{\Delta}$. Далее получаем

$$\mathcal{L}_{\Delta} = \widehat{L}_{\Delta}^s = \sum_{l=1}^r d_l^s B_{\Delta s}^{(l,r)} + \phi^{(r)} \widehat{\Delta}^{-1} \psi^{(r)}.$$

С учетом уравнения связи (4.5) можно вывести эволюционные уравнения для дискретной N -компонентной иерархии КП со связями (см. работу [13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для дискретной N -компонентной иерархии КП со связями справедливы следующие иерархии уравнений:*

$$\frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial t_{l,n}} = B_{\Delta n}^{(l,r)} \phi^{(r)}, \quad \frac{\partial \psi^{(r)}}{\partial t_{l,n}} = -(B_{\Delta n}^{(l,r)})^* \psi^{(r)}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\Delta}}{\partial t_{l,n}} = [B_{\Delta n}^{(l,r)}, \mathcal{L}_{\Delta}],$$

при этом для $B_{\Delta n}^{(l,r)} = \sum_{i=0}^n B_i \widehat{\Delta}^i$ имеем

$$(B_{\Delta n}^{(l,r)})^* \psi^{(r)} := \sum_{i=0}^n (-1)^i \widehat{\Delta}^i (\psi^{(r)} B_i).$$

При $r = 1, N = 2$ мы получаем дискретную иерархию КП с s связями. При $r = 1, N \geq 2$ ее можно назвать дискретной векторной иерархией КП с s связями. При произвольных r и N мы имеем обобщенную дискретную иерархию КП со связями.

5. СИММЕТРИЯ ВИРАСОРО ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ИЕРАРХИИ КП СО СВЯЗЯМИ

В этом разделе мы строим дополнительную симметрию и обсуждаем алгебраическую структуру дополнительных симметричных потоков многокомпонентной дискретной иерархии КП со связями. С этой целью введем сначала оператор $\widehat{\Gamma}_{\Delta}^{(r)}$ и оператор Орлова–Шульмана $\mathcal{M}_{\Delta}$ следующим образом:

$$\widehat{\Gamma}_{\Delta}^{(r)} = \sum_{\beta=1}^r t_{\beta,1} \frac{E_{\beta}}{s d_{\beta}^s} \widehat{\Delta}^{1-s} + \sum_{\beta=1}^r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{s} d_{\beta}^{-s} E_{\beta} \widehat{\Delta}^{n-s} t_{n,\beta}, \quad \mathcal{M}_{\Delta} = S^{(r)} \widehat{\Gamma}_{\Delta}^{(r)} (S^{(r)})^{-1}.$$

Легко получить равенства $[\partial_{t_{n,\beta}} - \hat{\Delta}^n E_\beta, \hat{\Gamma}_\Delta^{(r)}] = 0$ и $[\partial_{t_{k,\beta}} - \Delta^k E_\beta, \hat{\Gamma}_\Delta^{(r)}] = 0$.

Введем еще один оператор

$$\mathcal{M}_\Delta = W_\Delta \circ \hat{\Gamma}_\Delta^{(r)} \circ W_\Delta^{-1}. \quad (5.1)$$

Имеют место коммутационные соотношения

$$\left[\sum_{\beta=1}^r d_\beta^s \hat{\Delta}^s E_\beta, \hat{\Gamma}_\Delta^{(r)} \right] = E, \quad [\mathcal{L}_\Delta, \mathcal{M}_\Delta] = E, \quad (5.2)$$

которые проверяются непосредственными вычислениями. Используя уравнение Са-то, запишем изоспектральный поток оператора $\mathcal{M}_\Delta$ в виде

$$\partial_{t_{k,\beta}} \mathcal{M}_\Delta = [(C_{\Delta k}^{\beta r})_+, \mathcal{M}_\Delta]$$

или в более общем виде

$$\partial_{t_{k,\beta}} (\mathcal{M}_\Delta^m \mathcal{L}_\Delta^l) = [(C_{\Delta k}^{\beta r})_+, \mathcal{M}_\Delta^m \mathcal{L}_\Delta^l].$$

Основываясь на наших предварительных рассмотрениях, введем дополнительные симметричные потоки дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями с помощью их действий на одевающий оператор,

$$\partial_{l,m,\beta} S_\Delta = -(\mathcal{M}_\Delta^m C_{\Delta l}^{\beta r})_- \circ S_\Delta,$$

или, что то же самое, на оператор Лакса,

$$\partial_{l,m,\beta} \mathcal{L}_\Delta = [-(\mathcal{M}_\Delta^m C_{\Delta l}^{\beta r})_-, \mathcal{L}_\Delta],$$

где $\partial_{l,m,\beta}$ означает производную по дополнительной новой переменной $t_{l,m,\beta}^*$. В более общем виде действие дополнительных симметричных потоков дискретного многокомпонентного уравнения КП со связями вводится по формулам

$$\frac{\partial \mathcal{M}_\Delta}{\partial_{m,n,\beta}} = -[(\mathcal{M}_\Delta^m C_{\Delta n}^{(\beta,r)})_-, \mathcal{M}_\Delta], \quad \partial_{l,m,\beta} \mathcal{M}_\Delta^n \mathcal{L}_\Delta^k = [-(\mathcal{M}_\Delta^m C_{\Delta l}^{\beta r})_-, \mathcal{M}_\Delta^n \mathcal{L}_\Delta^k]. \quad (5.3)$$

Далее мы докажем, что дополнительные потоки $\partial/\partial t_{m,n,\beta}^*$ коммутируют с потоком $\partial/\partial t_{k,\gamma}$, но не коммутируют друг с другом. Для этого нам понадобятся несколько лемм и предложений.

Как и в дифференциальном случае, для используемого выше локального (т.е. содержащего только неотрицательные степени оператора Δ) разностного оператора $B_{\Delta n}^{\beta,r}$ справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *Имеет место равенство*

$$[B_{\Delta n}^{\beta,r}, \phi \Delta^{-1} \psi]_- = B_{\Delta n}^{\beta,r}(\phi) \Delta^{-1} \psi - \phi \Delta^{-1} B_{\Delta n}^{(\beta,r)*}(\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фундаментальный одночлен Δ^n (при $n \geq 1$). Тогда

$$[\Delta^n, \phi \Delta^{-1} \psi]_- = (\Delta^n(\phi)) \Delta^{-1} \psi - (\phi \Delta^{-1} \psi \Delta^n)_-.$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\phi\Delta^{-1}\psi\Delta^n)_- &= (\phi(\Lambda^{-1}(\psi))\Delta^{n-1} - \phi\Delta^{-1}(\Delta\Lambda^{-1}(\psi))\Delta^{n-1})_- = \\ &= (\phi\Delta^{-1}(-\Delta\Lambda^{-1}(\psi))\Delta^{n-1})_- = \dots = \phi\Delta^{-1}((-\Delta\Lambda^{-1})^n(\psi)) = \\ &= \phi\Delta^{-1}(\Delta^n)^*(\psi), \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

В следующем предложении, которое нетрудно вывести по индукции, сформулировано важное свойство оператора Лакса.

ЛЕММА 5.2. *Оператор Лакса $\mathcal{L}_\Delta$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями удовлетворяет уравнению*

$$(\mathcal{L}_\Delta^k)_- = \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{L}_\Delta^{k-j-1}(\phi)\Delta^{-1}(\mathcal{L}_\Delta^*)^j(\psi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.4)$$

где $\mathcal{L}_\Delta(\phi) = (\mathcal{L}_\Delta)_+(\phi) + \phi\Delta^{-1}(\psi\phi)$.

В частности, для случая $k = 3$ имеем

$$(\mathcal{L}_\Delta^3)_- = [\mathcal{L}_\Delta^2(\phi)\Delta^{-1}\psi + \mathcal{L}_\Delta(\phi)\Delta^{-1}\mathcal{L}_\Delta^*(\psi) + \phi\Delta^{-1}\mathcal{L}_\Delta^{2*}(\psi)].$$

Согласно определению дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями действие ее начальных дополнительных потоков выражается формулой

$$(\partial_{1,k,\beta}\mathcal{L}_\Delta)_- = [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_+, \mathcal{L}_\Delta]_- + (C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_-. \quad (5.5)$$

Также, если $X = M\Delta^{-1}N$,

$$[X, \mathcal{L}_\Delta]_- = [M\Delta^{-1}\mathcal{L}_\Delta^*(N) - \mathcal{L}_\Delta(M)\Delta^{-1}N] + [X(\phi)\Delta^{-1}\psi - \phi\Delta^{-1}X^*(\psi)]. \quad (5.6)$$

Чтобы сохранить согласованность с уравнениями потоков для волновых функций ϕ , ψ , введем псевдодискретный оператор $T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}$, модифицирующий дополнительную симметрию дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями,

$$\begin{aligned} T_{\Delta k}^{(\alpha,r)} &= 0, \quad k = -1, 0, 1, \\ T_{\Delta k}^{(\alpha,r)} &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[j - \frac{1}{2}(k-1) \right] C_{\Delta k-1-j}^{(\alpha,r)}(\phi)\Delta^{-1}(C_{\Delta j}^{(\alpha,r)*})(\psi), \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

обладающий следующим свойством.

ЛЕММА 5.3. *Действие потоков $\partial_{t_{l,\beta}}$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями на оператор $T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}$ имеет вид*

$$\partial_{t_{l,\beta}} T_{\Delta k}^{(\alpha,r)} = [B_{\Delta l}^{(\beta,r)}, T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}]_-. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с использованием леммы 5.1 и аналогично доказательству для непрерывной многокомпонентной иерархии КП со связями.

Далее, чтобы ввести дополнительные потоки дискретной N -компонентной иерархии КП со связями, нам потребуется выписать явное выражение для $[T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, L]_-$.

ЛЕММА 5.4. *Оператор Лакса $\mathcal{L}_\Delta$ дискретной N -компонентной иерархии КП и оператор $T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}$ связаны следующим соотношением:*

$$[T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}_\Delta]_- = -(C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_- + \frac{k}{2} [\phi_{\Delta}^{(r)} \widehat{\Delta}^{-1} (C_{\Delta k-1}^{(\beta,r)})^* (\psi_{\Delta}^{(r)}) + C_{\Delta k-1}^{(\beta,r)} (\phi_{\Delta}^{(r)}) \widehat{\Delta}^{-1} \psi_{\Delta}^{(r)} + T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)} (\phi_{\Delta}^{(r)}) \widehat{\Delta}^{-1} \psi_{\Delta}^{(r)} - \phi_{\Delta}^{(r)} \widehat{\Delta}^{-1} (T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)})^* (\psi_{\Delta}^{(r)})].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно получить с помощью непосредственных вычислений, аналогичных проведенным в непрерывном случае.

Введем дополнительные потоки дискретной N -компонентной иерархии КП со связями следующим образом:

$$\partial_{t_{1,k,\beta}}^* \mathcal{L}_\Delta = [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_- + T_{\Delta k-1}^{\beta,r}, \mathcal{L}_\Delta], \quad (5.9)$$

где $T_{\Delta k-1}^{\beta,r} = 0$ для $l = 0, 1, 2$, когда правая часть уравнения (5.9) имеет вид уравнения Лакса. В общем случае можно также вывести уравнение

$$\partial_{t_{1,k,\beta}}^* (\mathcal{M}_\Delta \mathcal{L}_\Delta^l) = [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_- + T_{\Delta k-1}^{\beta,r}, \mathcal{M}_\Delta \mathcal{L}_\Delta^l]. \quad (5.10)$$

Теперь вычислим действие дополнительных потоков (5.9) на собственные функции ϕ и ψ дискретной N -компонентной иерархии КП.

ТЕОРЕМА 5.1. *Действие дополнительных потоков дискретной N -компонентной иерархии КП со связями на собственные функции ϕ и ψ имеет вид*

$$\begin{aligned} \partial_{t_{1,k,\beta}}^* \phi &= (\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_+(\phi) + T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}(\phi) + \frac{k}{2} C_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}(\phi), \\ \partial_{t_{1,k,\beta}}^* \psi &= -(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})^*(\psi) - (T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)})^*(\psi) + \frac{k}{2} C_{\Delta k-1}^{(\beta,r)*}(\psi). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Далее следует доказать коммутационные соотношения между дополнительными потоками $\partial_{t_{1,k,\beta}}^*$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями и ее начальными потоками $\partial_{t_{l,\alpha}}$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Дополнительные потоки $\partial_{t_{1,k,\beta}}^*$ являются симметричными потоками дискретной N -компонентной иерархии КП со связями, т. е. они коммутируют со всеми потоками $\partial_{t_{l,\beta}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с действием потоков $\partial_{t_{1,k,\beta}}^*$ и $\partial_{t_{l,\alpha}}$ на одевающий оператор S_Δ имеем

$$[\partial_{t_{1,k,\beta}}^*, \partial_{t_{l,\alpha}}] S_\Delta = [(C_{\Delta l}^{(\beta,r)})_+, -T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}]_- S_\Delta - (\partial_{t_{l,\alpha}} T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}) S_\Delta = 0,$$

что доказывает теорему.

Теперь, используя соотношение

$$\partial_{t_{1,l,\beta}}^* (\mathcal{L}_\Delta^k(\phi)) = (\partial_{t_{1,l,\beta}}^* (\mathcal{L}_\Delta^k))(\phi) + \mathcal{L}_\Delta^k \partial_{t_{1,l,\beta}}^* (\phi),$$

можно показать, что дополнительные потоки $\partial_{t_{1,l,\beta}}^*$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\partial_{t_{1,l,\beta}}^* \mathcal{L}_\Delta^k(\phi) &= (\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\beta,r})_+ (\mathcal{L}_\Delta^k(\phi)) + \left(k + \frac{l}{2}\right) \mathcal{L}_\Delta^{k+l-1}(\phi), \\ \partial_{t_{1,l,\beta}}^* (\mathcal{L}_\Delta^*)^k(\psi) &= -(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\beta,r})_*^* (\mathcal{L}_\Delta^*)^k(\psi) + \left(k + \frac{l}{2}\right) (\mathcal{L}_\Delta^*)^{k+l-1}(\psi), \quad l = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Более того, действие $\partial_{t_{1,l,\beta}}^*$ на $T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}$ задано в следующей лемме.

ЛЕММА 5.5. *Действие на $T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}$ дополнительных симметричных потоков $\partial_{t_{1,l,\beta}}^*$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями имеет вид*

$$\partial_{t_{1,l,\beta}}^* T_{\Delta k}^{(\alpha,r)} = [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\beta,r})_+ + T_{\Delta l-1}^{(\beta,r)}, T_{\Delta k}^{(\alpha,r)}]_- + (k - l + 1) T_{\Delta k+l-1}^{(\alpha,r)} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается непосредственным образом с помощью техники, развитой для непрерывного случая.

Теперь пора определить алгебраическую структуру дополнительных симметричных потоков дискретной N -компонентной иерархии КП со связями.

ТЕОРЕМА 5.3. *Дополнительные потоки $\partial_{t_{1,k,\beta}}^*$ дискретной N -компонентной иерархии КП со связями образуют положительную половину алгебры Вирасоро, т. е.*

$$[\partial_{t_{1,l,\alpha}}^*, \partial_{t_{1,k,\beta}}^*] = (k - l) \delta_{\alpha,\beta} \partial_{t_{1,k+l-1,\alpha}}^*, \quad l = 0, 1, 2, \quad k \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство

$$[(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}]_- = [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}]$$

и тождество Якоби, выполним следующие вычисления:

$$\begin{aligned}[\partial_{t_{1,l,\alpha}}^*, \partial_{t_{1,k,\beta}}^*] \mathcal{L}_\Delta &= \\ &= \partial_{t_{1,l,\alpha}}^* ([-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{\beta,r})_-, \mathcal{L}_\Delta] + [T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}_\Delta]) - \partial_{t_{1,k,\beta}}^* ([-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}_\Delta]) = \\ &= \partial_{t_{1,l,\alpha}}^* [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_-, \mathcal{L}_\Delta] + [\partial_{t_{1,l,\alpha}}^* T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}_\Delta] + [T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \partial_{t_{1,l,\alpha}}^* \mathcal{L}_\Delta] + \\ &\quad + [\partial_{t_{1,k,\beta}}^* (\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}_\Delta] + [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, \partial_{t_{1,k,\beta}}^* \mathcal{L}_\Delta] = \\ &= [-(\partial_{t_{1,l,\alpha}}^* (\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)}))_-, \mathcal{L}_\Delta] + [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{\beta,r})_-, (\partial_{t_{1,l,\alpha}}^* \mathcal{L}_\Delta)] + \\ &\quad + [[(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r} R_{\Delta \beta})_+, T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}]_-, + (k - l) T_{\Delta k+l-2}^{(\beta,r)} \delta_{\alpha,\beta}, \mathcal{L}_\Delta] + \\ &\quad + [T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}_\Delta]] + \\ &\quad + [[-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_-, + T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r}]_-, \mathcal{L}_\Delta] + \\ &\quad + [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta k}^{(\beta,r)})_-, + T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}_\Delta]] = \\ &= (k - l) [-(\mathcal{M}_\Delta \mathcal{L}_\Delta^{k+l-1})_-, \mathcal{L}_\Delta] + (k - l) [\delta_{\alpha,\beta} T_{\Delta k+l-2}, \mathcal{L}_\Delta] - \\ &\quad - [[(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}], \mathcal{L}_\Delta] + [T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, [-(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, \mathcal{L}_\Delta]] + \\ &\quad + [(\mathcal{M}_\Delta C_{\Delta l}^{\alpha,r})_-, [T_{\Delta k-1}^{(\beta,r)}, \mathcal{L}_\Delta]] = (k - l) \delta_{\alpha,\beta} \partial_{t_{1,k+l-1,\alpha}}^* \mathcal{L}_\Delta.\end{aligned}$$

Таким образом, дискретизация иерархии КП со связями, приводящая к дискретной N -компонентной иерархии КП со связями, сохраняет важную структуру алгебры Вирасоро.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

В представленной работе построены дополнительные симметричные потоки (3.10) для N -компонентной иерархии КП со связями. При этом в теореме 3.1 с помощью дифференциального оператора $T_k^{(\alpha,r)}$ получены дополнительные потоки для собственных функций и сопряженных собственных функций N -компонентной иерархии КП со связями. В теореме 3.3 показано, что эти потоки обладают скрытой алгебраической структурой, связанной с алгеброй Вирасоро. Аналогично непрерывному случаю построены дополнительные симметрии и получено несколько результатов для дискретной многокомпонентной иерархии КП со связями, а также выведены уравнения потоков Вирасоро для собственных функций и сопряженных собственных функций. Это говорит о том, что дискретизация иерархии КП со связями сохраняет важную структуру алгебры Вирасоро.

Список литературы

- [1] L. Dickey, *Modern Phys. Lett. A*, **8**:13 (1993), 1259–1272.
- [2] B. G. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp, *Phys. Lett. A*, **157**:1 (1991), 17–21.
- [3] Y. Cheng, Y.-S. Li, *Phys. Lett. A*, **157**:1 (1991), 22–26.
- [4] Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **33**:11 (1992), 3774–3782.
- [5] H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva, *Phys. Lett. A*, **228**:3 (1997), 164–175, arXiv: hep-th/9602068.
- [6] C.-Z. Li, J.-S. He, Y.-C. Su, *J. Math. Phys.*, **53**:1 (2012), 013517, 24 pp., arXiv: 1201.1984.
- [7] C.-Z. Li, J.-S. He, *J. Math. Phys.*, **54**:11 (2013), 113501, 14 pp., arXiv: 1210.6498.
- [8] C. Li, J. Cheng, K. Tian, M. Li, J. He, *Ghost symmetry of the discrete KP hierarchy*, arXiv: 1201.4419; *Monatsh. Math.* (to appear).
- [9] M. Li, C. Li, K. Tian, M. Li, J. He, Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **54**:4 (2013), 043512, 11 pp., arXiv: 1207.4322.
- [10] L. Dickey, *Modern Phys. Lett. A*, **8**:14 (1993), 1357–1377.
- [11] V. G. Kac, J. W. van de Leur, “The n -component KP hierarchy and the representation theory”, *Important Developments in Soliton Theory*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 302–343.
- [12] A. Maffei, *Internat. Math. Res. Notices*, **1996**:16 (1996), 769–791.
- [13] Y. Zhang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:36 (1999), 6461–6476.
- [14] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, *Commun. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 1–38.
- [15] C. Álvarez Fernández, U. Fidalgo Prieto, M. Mañas, *Adv. Math.*, **227**:4 (2011), 1451–1525.
- [16] C.-Z. Li, J.-S. He, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **17**:3–4 (2014), 377–407, arXiv: 1410.3657.
- [17] Чуань-Чжун Ли, Цзин-Сун Хэ, *ТМФ*, **185**:2 (2015), 289–312, arXiv: 1403.0684.
- [18] B. A. Kupershmidt, *Discrete Lax Equations and Differential-Difference Calculus*, Astérisque, **123**, Soc. Math. France, Paris, 1985.
- [19] S. K. Vel, K. M. Tamizhmani, *Chaos, Solitons and Fractals*, **8**:6 (1997), 917–931.
- [20] L. Haine, P. Iliev, *Internat. Math. Res. Notices*, **2000**:6 (2000), 281–323.
- [21] S.-W. Liu, Y. Cheng, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:13 (2010), 135202, 17 pp.
- [22] Y. Cheng, Y.-J. Zhang, *J. Math. Phys.*, **35**:11 (1994), 5869–5884.
- [23] L. Fehér, I. Marshall, *Commun. Math. Phys.*, **183**:2 (1997), 423–461, arXiv: hep-th/9503217.
- [24] M. F. de Groot, T. J. Hollowood, J. L. Miramontes, *Commun. Math. Phys.*, **145**:1 (1992), 57–84.
- [25] A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12**:3 (1986), 171–179.