Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Гайар, О классификации квазирациональных решений нелинейного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 48–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:45:12

© 2016 г.

П. Гайар*

О КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Предпринята попытка классифицировать квазирациональные решения одномерного фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера на основе их представления через детерминанты порядка $2N$, а также сформулировано несколько гипотез о структуре решений. Эти решения можно записать в виде произведения зависящей от t экспоненты на отношение двух полиномов степени $N(N+1)$ по переменным x и t , зависящих от $2N - 2$ параметров. Важно отметить, что в случае равенства нулю всех параметров этого представления в результате получаются бризеры P_N .

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, детерминанты, волны-убийцы, бризеры Перегринна.

DOI: 10.4213/tmf9017

1. ВВЕДЕНИЕ

Термин “волны-убийцы” был предложен научному сообществу Драпером в 1964 г. [1]. Обычный критерий, характеризующий волны-убийцы в океане, можно сформулировать следующим образом: вертикальное расстояние от впадины до вершины в два раза или более превышает среднюю высоту волны в трети самых высоких волн за время наблюдений (от 10 до 30 мин.). Волны такого типа уже наблюдались: их существование было впервые подтверждено на нефтяной платформе Дропнера в Северном море в 1995 г.

Чтобы математически описать волны-убийцы, рассмотрим одномерное фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Впервые это уравнение было решено Захаровым и Шабатом в 1972 г. с помощью метода обратной задачи рассеяния [2], [3]. Первые квазирациональные решения НУШ были построены Перегрином в 1983 г. [4]. Известно, что Ахмедиев, Елеонский и Кулагин первыми получили аналог бризера Перегринна более высокого порядка [5], [6] в 1986 г., другие аналоги

*Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France.
E-mail: pierre.gaillard@u-bourgogne.fr

бризеров Перегринна третьего и четвертого порядков также были построены в ряде статей Ахмедиева с соавторами [7]–[9] с помощью преобразований Дарбу.

С начала 2010 г. опубликовано множество работ о НУШ. Рациональные решения НУШ были получены в 2010 г. в виде отношения двух вронскианов [10]; другое представление решений НУШ в виде отношения двух вронскианов четного порядка $2N$ с использованием усеченных тэта-функций Римана получено в 2011 г. в работе [11]; в 2012 г. Гуо, Линг и Лиу с помощью обобщенного преобразования Дарбу нашли решения в виде отношения двух детерминантов [12]; новый подход, основанный на билинейном методе Хироты, был предложен в статье Охта и Янга [13]; в 2013 г. были построены рациональные решения, выраженные через детерминанты без привлечения пределов [14].

Новое представление в виде отношения детерминанта порядка $N + 1$ к детерминанту порядка N было найдено в работе Линга и Цао [15]. Еще один подход на основе метода одевания, в котором решения записываются через отношение детерминанта порядка $N + 1$ к детерминанту порядка N , найден совсем недавно в 2014 г. в статье [16].

В настоящей работе строятся многопараметрические семейства квазирациональных решений НУШ порядка N , выраженные через определители порядка $2N$, зависящие от $2N - 2$ действительных параметров. Используя это представление, можно также найти хорошо известные кольцевые структуры и структуры треугольной формы, рассмотренные в статьях [13] и [17].

Предлагаемые в настоящей статье решения можно записать через отношение двух полиномов степени $N(N + 1)$ от переменных x и t , умноженное на экспоненту, зависящую от t . Важно подчеркнуть, что с помощью этого представления, положив в нем все параметры равными нулю, мы получаем бризеры Перегринна P_N порядка N .

Подытожим результаты, полученные для решений НУШ. На основе наших исследований установлена классификация решений рассматриваемого НУШ. Такая классификация для обобщенного НУШ с дополнительными нелинейными членами пятого порядка уже была проведена в работах Винтерница и Ганьона на основе алгебраического подхода [18]–[20]. Мы не используем данный подход в нашей работе. Мы пытаемся классифицировать квазирациональные решения на основе закономерностей в поведении их модулей на плоскости (x, t) в зависимости от порядка N , а также от параметров $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$, $1 \leq j \leq N - 1$.

2. СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ НУШ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ $2N - 2$ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим фокусирующее НУШ

$$iv_t + v_{xx} + 2|v|^2v = 0. \quad (1)$$

В этом случае справедливо следующее утверждение [21].

ТЕОРЕМА 1. *Функция v , заданная формулой*

$$v(x, t) = e^{2it - i\varphi} \frac{\det((n_{jk})_{j,k \in [1, 2N]})}{\det((d_{jk})_{j,k \in [1, 2N]})}, \quad (2)$$

является квазирациональным решением НУШ (1), представленным в виде отношения полиномов $N(x, t)$ и $D(x, t)$, зависящих от $2N - 2$ действительных параметров $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$, $1 \leq j \leq N - 1$. Здесь $N(x, t)$ и $D(x, t)$ – полиномы степени $N(N + 1)$ по переменным x и t , в которых

$$\begin{aligned} n_{j1} &= \varphi_{j,1}(x, t, 0), & n_{jk} &= \frac{\partial^{2k-2} \varphi_{j,1}}{\partial \epsilon^{2k-2}}(x, t, 0), \\ n_{jN+1} &= \varphi_{j,N+1}(x, t, 0), & n_{jN+k} &= \frac{\partial^{2k-2} \varphi_{j,N+1}}{\partial \epsilon^{2k-2}}(x, t, 0), \\ d_{j1} &= \psi_{j,1}(x, t, 0), & d_{jk} &= \frac{\partial^{2k-2} \psi_{j,1}}{\partial \epsilon^{2k-2}}(x, t, 0), \\ d_{jN+1} &= \psi_{j,N+1}(x, t, 0), & d_{jN+k} &= \frac{\partial^{2k-2} \psi_{j,N+1}}{\partial \epsilon^{2k-2}}(x, t, 0), \\ & & 2 \leq k \leq N, & 1 \leq j \leq 2N. \end{aligned}$$

Функции φ и ψ в теореме 1 заданы следующим образом: при $1 \leq k \leq N$

$$\begin{aligned} \varphi_{4j+1,k} &= \gamma_k^{4j-1} \sin X_k, & \varphi_{4j+2,k} &= \gamma_k^{4j} \cos X_k, \\ \varphi_{4j+3,k} &= -\gamma_k^{4j+1} \sin X_k, & \varphi_{4j+4,k} &= -\gamma_k^{4j+2} \cos X_k, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{4j+1,N+k} &= \gamma_k^{2N-4j-2} \cos X_{N+k}, & \varphi_{4j+2,N+k} &= -\gamma_k^{2N-4j-3} \sin X_{N+k}, \\ \varphi_{4j+3,N+k} &= -\gamma_k^{2N-4j-4} \cos X_{N+k}, & \varphi_{4j+4,N+k} &= \gamma_k^{2N-4j-5} \sin X_{N+k}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \psi_{4j+1,k} &= \gamma_k^{4j-1} \sin Y_k, & \psi_{4j+2,k} &= \gamma_k^{4j} \cos Y_k, \\ \psi_{4j+3,k} &= -\gamma_k^{4j+1} \sin Y_k, & \psi_{4j+4,k} &= -\gamma_k^{4j+2} \cos Y_k, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{4j+1,N+k} &= \gamma_k^{2N-4j-2} \cos Y_{N+k}, & \psi_{4j+2,N+k} &= -\gamma_k^{2N-4j-3} \sin Y_{N+k}, \\ \psi_{4j+3,N+k} &= -\gamma_k^{2N-4j-4} \cos Y_{N+k}, & \psi_{4j+4,N+k} &= \gamma_k^{2N-4j-5} \sin Y_{N+k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аргументы X_k и Y_k имеют вид

$$X_\nu = \frac{\kappa_\nu x}{2} + i\delta_\nu t - i\frac{x_{3,\nu}}{2} - i\frac{e_\nu}{2}, \quad Y_\nu = \frac{\kappa_\nu x}{2} + i\delta_\nu t - i\frac{x_{1,\nu}}{2} - i\frac{e_\nu}{2}, \quad 1 \leq \nu \leq 2N.$$

Все вышеперечисленные выражения определяются параметрами λ_ν такими, что $-1 < \lambda_\nu < 1$, $1 \leq \nu \leq 2N$,

$$\begin{aligned} -1 < \lambda_{N+1} < \lambda_{N+2} < \dots < \lambda_{2N} < 0 < \lambda_N < \lambda_{N-1} < \dots < \lambda_1 < 1, \\ \lambda_{N+j} &= -\lambda_j, & \lambda_j &= 1 - 2\epsilon^2 j^2, & 1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (7)$$

где ϵ – некоторый параметр, $\epsilon \rightarrow 0$. Параметры κ_ν , δ_ν и γ_ν вводятся по формулам

$$\begin{aligned} \kappa_j &= 2\sqrt{1 - \lambda_j^2}, & \delta_j &= \kappa_j \lambda_j, & \gamma_j &= \sqrt{\frac{1 - \lambda_j}{1 + \lambda_j}}, \\ \kappa_{N+j} &= \kappa_j, & \delta_{N+j} &= -\delta_j, & \gamma_{N+j} &= \frac{1}{\gamma_j}, \end{aligned} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (8)$$

Параметры a_j и b_j имеют вид

$$a_j = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k j^{2k+1} \epsilon^{2k+1}, \quad b_j = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{b}_k j^{2k+1} \epsilon^{2k+1}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (9)$$

Комплексные числа e_ν , $1 \leq \nu \leq 2N$, задаются выражениями

$$e_j = ia_j - b_j, \quad e_{N+j} = ia_j + b_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Члены $x_{r,\nu}$, $r = 1, 3$, определены следующим образом:

$$x_{r,\nu} = (r-1) \ln \frac{\gamma_\nu - i}{\gamma_\nu + i}, \quad 1 \leq j \leq 2N. \quad (11)$$

Также справедлива следующая теорема¹⁾ о наибольшей амплитуде модуля бризера Перегринна порядка N .

ТЕОРЕМА 2. *Функция v_0 , заданная формулой*

$$v_0(x, t) = e^{2it - i\varphi} \left(\frac{\det((n_{jk})_{j,k \in [1, 2N]})}{\det((d_{jk})_{j,k \in [1, 2N]})} \right)_{(\tilde{a}_j = \tilde{b}_j = 0, 1 \leq j \leq N-1)}, \quad (12)$$

является решением НУШ (1), имеющим вид бризера Перегринна порядка N , наибольшая амплитуда модуля которого равна $2N + 1$.

3. ИЕРАРХИЯ РЕШЕНИЙ НУШ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ $2N - 2$ ПАРАМЕТРОВ

Решения порядков от $N = 3$ до $N = 10$ с $2N - 2$ параметрами были построены в явном виде автором данной статьи [23]–[28], в случаях $N = 9$ и $N = 10$ – с участием Гастино [29], [30]. Результаты этих исследований показывают, что решения имеют весьма своеобразные структуры, зависящие от значений параметров $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$. Роль параметров $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$ одинакова при определении структуры этих решений. Следовательно, можно сформулировать несколько гипотез относительно решений порядка N на основе значений параметров $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$. Мы иллюстрируем эти гипотезы рисунками, на которых изображены решения НУШ в плоскости (x, t) .

3.1. Случай $a_1 \neq 0$ (или $b_1 \neq 0$). При $\tilde{a}_1 \neq 0$ или $\tilde{b}_1 \neq 0$ и равенстве нулю других параметров мы получаем треугольник с $N(N + 1)/2$ пиками. Важно отметить, что только в этом случае мы имеем треугольник (см. рис. 1–6); во всех других случаях, когда только один параметр, не равный $\tilde{a}_1$ или $\tilde{b}_1$, отличен от нуля, получаются кольца (см. рис. 7–21).

3.2. Случай $a_{N-1} \neq 0$ (или $\tilde{b}_{N-1} \neq 0$), $N \geq 3$. При $\tilde{a}_{N-1} \neq 0$ или $\tilde{b}_{N-1} \neq 0$, $N \geq 3$, и равенстве нулю других параметров мы имеем одно кольцо с $2N - 1$ пиками и бризером Перегринна P_{N-2} порядка $N - 2$ в центре²⁾ (см. рис. 7–12).

3.3. Случай $a_{N-2} \neq 0$ (или $\tilde{b}_{N-2} \neq 0$), $N \geq 5$. При $\tilde{a}_{N-2} \neq 0$ или $\tilde{b}_{N-2} \neq 0$, $N \geq 5$, и равенстве нулю других параметров мы получаем два концентрических кольца с $2N - 3$ пиками и бризером Перегринна P_{N-4} порядка $N - 4$ в центре (см. рис. 13–17).

¹⁾Этот результат вместе с доказательством опубликован в статье [22].

²⁾Данная гипотеза уже была сформулирована различными авторами, в частности Ахмедиевым с соавторами [31].

Рис. 1. Решение НУШ. Случай $N = 3$, $\tilde{a}_1 = 10^4$: треугольник с 6 пиками (а). Случай $N = 4$, $\tilde{a}_1 = 10^3$: треугольник с 10 пиками (б).

Рис. 2. Решение НУШ. Случай $N = 5$, $\tilde{a}_1 = 10^4$: треугольник с 15 пиками (а). Случай $N = 6$, $\tilde{a}_1 = 10^3$: треугольник с 21 пиком (б).

Рис. 3. Решение НУШ. Случай $N = 7$, $\tilde{a}_1 = 10^4$: треугольник с 28 пиками (а), вид на него сверху (б).

Рис. 4. Решение НУШ. Случай $N = 8$, $\tilde{a}_1 = 10^6$: треугольник с 36 пиками (а), вид на него сверху (б).

Рис. 5. Решение НУШ. Случай $N = 9$, $\tilde{a}_1 = 10^3$: треугольник с 45 пиками (а), вид на него сверху (б).

Рис. 6. Решение НУШ. Случай $N = 10$, $\tilde{a}_1 = 10^3$: треугольник с 55 пиками (а), вид на него сверху (б).

Рис. 7. Решение НУШ. Случай $N = 3$, $\tilde{a}_2 = 10^6$: кольцо с 5 пиками и бризером Перегринна P_1 в центре (а). Случай $N = 4$, $\tilde{a}_3 = 10^8$: кольцо с 7 пиками и бризером Перегринна P_2 в центре (б).

Рис. 8. Решение НУШ. Случай $N = 5$, $\tilde{a}_4 = 10^{10}$: кольцо с 9 пиками и бризером Перегринна P_3 в центре (а). Случай $N = 6$, $\tilde{a}_5 = 10^{15}$: кольцо с 11 пиками и бризером Перегринна P_4 в центре (б).

Рис. 9. Решение НУШ. Случай $N = 7$, $\tilde{a}_6 = 10^{12}$: кольцо с 13 пиками и бризером Перегринна P_5 в центре (а), вид на него сверху (б).

Рис. 10. Решение НУШ. Случай $N = 8$, $\tilde{a}_7 = 10^{10}$: кольцо с 15 пиками и бризером Перегринна P_6 в центре (а), вид на него сверху (б).

Рис. 11. Решение НУШ. Случай $N = 9$, $\tilde{a}_8 = 10^{20}$: кольцо с 17 пиками и бризером Перегринна P_7 в центре (а), вид на него сверху (б).

Рис. 12. Решение НУШ. Случай $N = 10$, $\tilde{a}_9 = 10^{19}$: кольцо с 19 пиками и бризером Перегринна P_8 в центре (а), вид на него сверху (б).

Рис. 13. Решение НУШ. Случай $N = 5$, $\tilde{a}_3 = 10^6$: два кольца с 7 пиками и бризером Перегринна P_1 в центре (а). Случай $N = 6$, $\tilde{a}_4 = 10^{10}$: два кольца с 9 пиками и бризером Перегринна P_2 в центре (б).

Рис. 14. Решение НУШ. Случай $N = 7$, $\tilde{a}_5 = 10^{15}$: два кольца с 11 пиками и бризером Перегринна P_3 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 15. Решение НУШ. Случай $N = 8$, $\tilde{a}_6 = 10^{20}$: два кольца с 13 пиками и бризером Перегринна P_4 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 16. Решение НУШ. Случай $N = 9$, $\tilde{a}_7 = 10^{20}$: два кольца с 15 пиками и бризером Перегринна P_5 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 17. Решение НУШ. Случай $N = 10$, $\tilde{a}_8 = 10^{19}$: два кольца с 17 пиками и бризером Перегринна P_6 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 18. Решение НУШ. Случай $N = 7$, $\tilde{a}_4 = 10^{10}$: три кольца с 9 пиками и бризером Перегринна P_1 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 19. Решение НУШ. Случай $N = 8$, $\tilde{a}_5 = 10^{20}$: три кольца с 11 пиками и бризером Перегринна P_2 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 20. Решение НУШ. Случай $N = 9$, $\tilde{a}_6 = 10^{15}$: три кольца с 13 пиками и бризером Перегринна P_3 в центре (а), вид на них сверху (б).

Рис. 21. Решение НУШ. Случай $N = 10$, $\tilde{a}_7 = 10^{16}$: три кольца с 15 пиками и бризером Перегринна P_4 в центре (а), вид на них сверху (б).

3.4. Случай $a_{N-3} \neq 0$ (или $b_{N-3} \neq 0$), $N \geq 7$. Для $\tilde{a}_{N-3} \neq 0$ или $\tilde{b}_{N-3} \neq 0$, $N \geq 7$, при равенстве нулю остальных параметров мы имеем три концентрических кольца с $2N - 5$ пиками, в центре которых – бризер Перегринна P_{N-6} порядка $N - 6$ (см. рис. 18–21).

3.5. Общий случай. Напомним хорошо известную гипотезу: для порядка N при $a_1 \neq 0$ или $b_1 \neq 0$ модуль решения НУШ представляет собой треугольник с $N(N+1)/2$ пиками на плоскости (x, t) . Предыдущие исследования дают основание выдвинуть следующую гипотезу: для порядка N при только одном отличном от нуля параметре, т. е. при $a_{N-i} \neq 0$ или $b_{N-i} \neq 0$, модуль решения НУШ представляет собой i концентрических колец с $2N - 2i + 1$ пиками, в центре которых находится бризер Перегринна порядка $N - 2i$, $1 \leq i \leq N/2$, на плоскости (x, t) . Условимся считать, что P_0 означает отсутствие пика.

Было бы целесообразно изучить случай целых i при условии $i > N/2$ с параметрами $a_{N-i} \neq 0$ или $b_{N-i} \neq 0$; структура, по-видимому, будет более сложной, и ее еще предстоит выяснить.

4. ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены квазирациональные решения одномерного фокусирующего НУШ порядка N , представимые в виде произведения зависящей от t экспоненты на отношение полиномов степени $N(N+1)$ по переменным x и t . Эти решения являются $(2N - 2)$ -параметрическими деформациями бризера Перегринна P_N порядка N : если $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i = 0$ при $1 \leq i \leq N$, то мы получаем классический бризер Перегринна. Данный бризер P_N имеет наибольшую амплитуду модуля, равную $2N + 1$. Метод построения решений НУШ, рассмотренный в настоящей статье, имеет множество приложений в нелинейной оптике или гидродинамике, что, в частности, подтверждается недавними работами Ахмедиева с соавторами [32] или Киблера с соавторами [33]: решения, построенные с помощью данного метода, были получены в различных экспериментах.

Начало классификации решений НУШ было положено в статье [34]. В перспективе представляется важным осуществить доказательство гипотез, сформулированных в данной статье, и получить полную классификацию квазирациональных решений НУШ порядка N .

Благодарности. Автор признателен М. Гастино [35] за помощь в обработке данных при определении деформаций в случаях $N = 9$ и $N = 10$ и в подготовке соответствующих рисунков, а также благодарен А. М. Грюндланду за информацию о классификации Р. Винтерница.

Список литературы

- [1] L. Draper, *Oceanus*, **10** (1964), 13–15.
- [2] В. Е. Захаров, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, **9:2** (1968), 86–94.
- [3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61:1** (1971), 118–134.
- [4] H. Peregrine, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25:1** (1983), 16–43.
- [5] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, *ЖЭТФ*, **89:5** (1985), 1542–1551.
- [6] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, *ТМФ*, **72:2** (1987), 183–196.
- [7] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, *Phys. Rev. E*, **80:2** (2009), 026601, 9 pp.
- [8] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, P. A. Clarkson, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43:12** (2010), 122002, 9 pp.
- [9] A. Chabchoub, H. Hoffmann, M. Onorato, N. N. Akhmediev, *Phys. Rev. X*, **2:1** (2012), 011015, 6 pp.
- [10] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **185:1** (2010), 247–258.
- [11] P. Gaillard, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44:43** (2011), 435204, 15 pp.
- [12] B. Guo, L. Ling, Q. P. Liu, *Phys. Rev. E*, **85:2** (2012), 026607, 9 pp.
- [13] Y. Ohta, J. Yang, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **468:2142** (2012), 1716–1740.
- [14] P. Gaillard, *J. Math. Phys.*, **54:1** (2013), 013504, 32 pp.
- [15] L. Ling, L. C. Zhao, *Trajectory characters of rogue waves*, arXiv:1305.5599.
- [16] A. A. Gelash, V. E. Zakharov, *Nonlinearity*, **27:4** (2014), R1–R39.
- [17] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **86:9** (2012), 056602.
- [18] L. Gagnon, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21:7** (1988), 1493–1511.
- [19] L. Gagnon, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22:5** (1989), 469–497.
- [20] L. Gagnon, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22:5** (1989), 499–509.
- [21] P. Gaillard, *Adv. Res.*, **4:5** (2015), 346–364.
- [22] P. Gaillard, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48:14** (2015), 145203, 23 pp.
- [23] P. Gaillard, *Phys. Rev. E*, **88:5** (2013), 042903, 8 pp.
- [24] P. Gaillard, *J. Math. Phys.*, **54:7** (2014), 073519, 21 pp.
- [25] P. Gaillard, *Commun. Theor. Phys.*, **61:3** (2014), 365–369.
- [26] P. Gaillard, *Phys. Scr.*, **89:1** (2014), 015004, 6 pp.
- [27] P. Gaillard, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **482:1** (2014), 012016, 8 pp.
- [28] P. Gaillard, *J. Math. Phys.*, **55:9** (2014), 093506, 12 pp.
- [29] P. Gaillard, M. Gastineau, *Phys. Lett. A*, **379:20–21** (2015), 1309–1313.
- [30] P. Gaillard, M. Gastineau, *Internat. J. Modern Phys. C*, **26:2** (2014), 1550016, 14 pp.
- [31] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **84:5** (2011), 056611, 7 pp.
- [32] A. Chabchoub, N. Hoffmann, N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.*, **106:20** (2011), 204502, 4 pp.
- [33] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J. M. Dudley, *Nature Phys.*, **6** (2010), 790–795.
- [34] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, **88:1** (2013), 013207, 12 pp.
- [35] M. Gastineau, J. Laskar, *ACM Commun. Comput. Algebra*, **44:3/4** (2011), 194–197.