Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Пак, Дифференциальное исчисление на квантовой группе $SU_q(2)$, согласованное со структурой калибровочных преобразований, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 265–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:29:28

© 1998 г.

Д. Г. Пак*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА КВАНТОВОЙ ГРУППЕ $SU_q(2)$, СОГЛАСОВАННОЕ СО СТРУКТУРОЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрено трехмерное биковариантное дифференциальное исчисление на квантовой группе $SU_q(2)$, совместное со структурой калибровочных преобразований. В рамках подхода, использующего глобальную ковариантность относительно действия подгруппы стабильности $U(1)$, показано, что калибровочно-ковариантная внешняя дифференциальная алгебра на $SU_q(2)$ определена единственным образом. Построены явные представления q -деформированных алгебр Ли в терминах дифференциальных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из особенностей некоммутативной геометрии квантовых групп [1–5] является неоднозначность в определении дифференциального исчисления на квантовых группах и квантовых пространствах. Требование биковариантности и использование стандартного правила Лейбница для внешнего дифференциала определяют единственным образом дифференциальное исчисление на линейных квантовых группах $GL_q(N)$ (с точностью до симметрии, соответствующей замене $q \rightarrow 1/q$) [6, 7] и обеспечивают построение соответствующей калибровочно-ковариантной дифференциальной алгебры [7]. Непосредственное сужение $GL_q(N)$ -биковариантного дифференциального исчисления на случай специальной линейной квантовой группы $SL_q(N)$ сталкивается с трудностями, связанными с потерей свойства центральности квантового определителя. Четырехмерное (4D $_{\pm}$) биковариантное и трехмерное (3D) левоковариантное дифференциальное исчисления на простейшей специальной унитарной квантовой группе $SU_q(2)$ рассматривались в подходе Вороновича [3, 8]. 3D-биковариантное дифференциальное исчисление на квантовой группе $SU_q(N)$ с нестандартным правилом Лейбница было предложено в работах [9, 10]. Необходимо отметить, что, в отличие от случая группы $GL_q(N)$, требование биковариантности для квантовой группы $SU_q(2)$ не является достаточным условием

*Ташкентский государственный университет, Ташкент, Республика Узбекистан

для построения соответствующей калибровочной теории и других теоретико-полевых моделей, в которых элементы квантовой группы имеют функциональную зависимость.

В данной работе рассматриваются возможные 3D-биковариантные дифференциальные исчисления на квантовой группе $SU_q(2)$ и калибровочно-ковариантная дифференциальная алгебра в формализме, сохраняющем глобальную $U(1)$ -ковариантность. Группа $U(1)$ является подгруппой стабильности для квантовой группы $SU_q(2)$, и требование $U(1)$ -ковариантности позволяет непосредственно перейти к описанию гармонических функций на квантовой сфере $S_q^2 \sim SU_q(2)/U(1)$. В разделе 2 рассматриваются явные реализации q -деформированных алгебр Ли левоинвариантных векторных полей на $SU_q(2)$ в терминах дифференциальных операторов. Требование $U(1)$ -ковариантности резко сокращает множество возможных дифференциальных исчислений и приводит к единственной калибровочно-ковариантной дифференциальной алгебре, как это показано в разделе 3. Мы предлагаем нестандартное правило Лейбница для внешнего дифференциала, совместное с требованием калибровочной ковариантности и сохранением свойства центральности квантового детерминанта матрицы $SU_q(2)$. В заключении обсуждается возможность построения минимальной версии теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU_q(2)$.

2. q -ДЕФОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Основные коммутационные соотношения для генераторов T_j^i ($i, j = 1, 2$) квантовой группы $SU_q(2)$ определяются с помощью стандартной R -матрицы [4]

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12}. \quad (1)$$

Выберем ковариантную параметризацию для матрицы T_j^i

$$T_j^i = \begin{pmatrix} y^1 & x^1 \\ y^2 & x^2 \end{pmatrix} \equiv (y^i x^i), \quad (2)$$

где x^i, y_i — образующие (координаты) алгебры функций на квантовом эрмитовом векторном пространстве U_q^2 с инволюцией $*$: $\bar{x}^i = y_i$ и структурой $SU_q(2)$ -комодуля. Условие унимодулярности матрицы T_j^i может быть записано в простой инвариантной форме

$$\mathcal{D} \equiv \det_q T_j^i = x_i y^i = 1, \quad x_i = \varepsilon_{ij} x^j.$$

Здесь и далее $SU_q(2)$ -индексы поднимаются и опускаются с помощью инвариантной метрики ε_{ij} (см. приложение).

Параметризация (2) использовалась в гармоническом формализме расширенных суперполевых, суперсимметричных теорий [11]. Координаты (x, y) параметризуют квантовую сферу $S_q^2 \sim SU_q(2)/U(1)$ и являются квантовыми обобщениями классических гармонических функций $(u^\pm)$

$$x^i \equiv u^{+i}, \quad y^i \equiv u^{-i}.$$

Знаки $(\pm)$ соответствуют зарядам (± 1) по подгруппе стабильности $U(1)$ для квантовой группы $SU_q(2)$. Для упрощения записи мы не будем переходить к обозначениям, принятым в гармоническом формализме, всюду подразумевая, что все геометрические объекты (координаты, производные, дифференциальные формы и т.п.) имеют определенные $U(1)$ -заряды.

Рассмотрим основные коммутационные соотношения между координатами (x, y) и производными

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \bar{\partial}^i \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}$$

на квантовой группе $SU_q(2)$:

$$\begin{aligned} R_{12}(\partial_T)_1(\partial_T)_2 &= (\partial_T)_2(\partial_T)_1 R_{21}, \quad (\partial_T)_j^i \equiv \begin{pmatrix} \bar{\partial}_1 & \bar{\partial}_2 \\ \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_i x^k &= \gamma_i^k + q Y_{mi}^{nk} x^m \partial_n, \quad \bar{\partial}^i \bar{y}_j = \delta_j^i + q y_m \bar{\partial}^n \hat{R}_{nj}^{mi}, \\ \partial_i y_j &= q(\hat{R}^{-1})_{ji}^{lk} y_k \partial_l, \quad \bar{\partial}^i x^j = \frac{1}{q} \hat{R}_{kl}^{ij} x^k \bar{\partial}^l, \end{aligned} \quad (3)$$

где для матриц $\hat{R}_{kl}^{ij}$ и Y_{kl}^{ij} использованы стандартные определения. Коммутационные соотношения (3) принципиально не отличаются от соотношений, принятых в работе [12]. Наш выбор мотивирован использованием явно ковариантных тензорных обозначений, которые удобны при построении явных выражений для левоинвариантных дифференциальных операторов. Таким образом, все геометрические объекты с верхними (нижними) индексами преобразуются относительно кодействия Δ квантовой группы подобно ко- (контра-) вариантным тензорам. Например, тензор второго ранга N_i^j будет преобразовываться следующим образом:

$$(N_i^j)' = (T^\dagger)_i^k T^j_l N_k^l \quad (4)$$

(здесь и далее знаки $\otimes$ тензорного произведения опускаются).

Определим левоинвариантные дифференциальные операторы первого порядка

$$D^{++} \equiv x_i \bar{\partial}^i, \quad D^{--} \equiv -y_i \partial^i,$$

где $(\pm\pm)$ соответствуют $U(1)$ -зарядам (± 2) . Действие операторов $D^{\pm\pm}$ на координаты (x, y) имеет простую форму

$$\begin{aligned} D^{++} x^i &= 0, & D^{--} x^i &= y^i, \\ D^{++} y_i &= x_i, & D^{--} y_i &= 0. \end{aligned}$$

Правило Лейбница для операторов $D^{\pm\pm}$ можно записать в удобной форме, если рассмотреть их действие на функциях $f^{(n)}$ с заданным $U(1)$ -зарядом (n) . Функции определяются по аналогии с классическим случаем [11] и могут быть представлены в виде формальных рядов

$$f^{(n \geq 0)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{(i_1 i_2 \dots i_{k+n} j_1 j_2 \dots j_k)} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{k+n}} y^{j_1} y^{j_2} \dots y^{j_k}, \quad (5)$$

где $C_{(i_1 i_2 \dots i_{k+n} j_1 j_2 \dots j_k)}$ — c -числовые коэффициенты, симметризованные по верхним и нижним индексам. Функции с отрицательными зарядами определяются аналогично. После несложных вычислений нетрудно получить следующее правило Лейбница:

$$D^{\pm\pm}(f^{(m)}g^{(n)}) = (D^{\pm\pm}f^{(m)})g^{(n)} + q^{-m}f^{(m)}D^{\pm\pm}g^{(n)}. \quad (6)$$

Характерной особенностью некоммутативной геометрии квантовой группы $SU_q(2)$ является тот факт, что квантовый аналог классического $U(1)$ -генератора может быть реализован как дифференциальный оператор второго порядка:

$$D^0 \equiv -x_i \partial^i - q^2 y_i \bar{\partial}^i + (1 - q^2) x_i y_k \bar{\partial}^k \partial^i. \quad (7)$$

Оператор D^0 имеет собственные функции, являющиеся функциями с определенным $U(1)$ -зарядом,

$$\begin{aligned} D^0 f^{(n)} &= \{n\}_q f^{(n)}, \\ \{n\}_q &\equiv \frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{n\}_q$ есть q -число. Нетрудно доказать следующее правило Лейбница для оператора D^0 :

$$D^0(f^{(m)}g^{(n)}) = (D^0 f^{(m)})g^{(n)} + q^{-2m}f^{(m)}D^0 g^{(n)}. \quad (9)$$

Отметим, что, как и в классической теории, сужение пространства функций на $SU_q(2)$ до пространства функций с определенным $U(1)$ -зарядом приводит к эффективному описанию фактор-пространства $S^2_q \sim SU_q(2)/U(1)$.

Прямым вычислением можно показать, что операторы $D^{\pm\pm,0}$ образуют q -деформированную алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на квантовой группе $SU_q(2)$ [13]

$$\begin{aligned} [D^0, D^{++}]_{q^{-4}} &= \{2\}_q D^{++}, \\ [D^0, D^{--}]_{q^4} &= \{-2\}_q D^{--}, \\ [D^{++}, D^{--}]_{q^2} &= D^0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $[A, B]_{q^s} \equiv AB - q^s BA$. Отметим, что перестановочные соотношения (10) выполняются независимо от того, накладывается ли условие унимодулярности $\mathcal{D} = 1$ или нет. Действие операторов $D^{\pm\pm,0}$, совместно с ограничением $\mathcal{D} = 1$:

$$D^{\pm\pm,0}((\mathcal{D} - 1)f(x, y)) \cong 0. \quad (11)$$

Символ $\cong$ означает, что имеет место слабое равенство, которое выполняется с учетом основных коммутационных соотношений. В дальнейшем мы будем использовать алгебру (10) в качестве исходной алгебры Ли левоинвариантных векторных полей для построения дифференциального исчисления внешних форм на квантовой группе $SU_q(2)$. Соответствующее q -обобщенное тождество Якоби имеет следующий вид:

$$[D^0, [D^{++}, D^{--}]_{q^2}] + [D^{++}, [D^{--}, D^0]_{q^{-4}}]_{q^{-2}} + q^2 [D^{--}, [D^0, D^{++}]_{q^{-4}}]_{q^{-2}} \equiv 0.$$

Перейдем к построению других возможных q -деформированных алгебр Ли левоинвариантных векторных полей на $SU_q(2)$. Для этой цели рассмотрим дифференциальные операторы μ, ν [14]:

$$\mu = 1 + (q^2 - 1)y_i \bar{\partial}^i, \quad \nu = 1 + \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)x_i \partial^i. \quad (12)$$

Операторы μ, ν подчиняются простым коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \mu D^{--} &= q^2 D^{--} \mu, & \mu D^{++} &= \frac{1}{q^2} D^{++} \mu, \\ \mu D^0 &= D^0 \mu, & \mu \nu &= \nu \mu. \end{aligned}$$

Операторы ν удовлетворяют таким же соотношениям. Используя свойства этих операторов, можно определить новые операторы $\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}, \mathcal{D}^0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++} &= \mu^{-\frac{1}{2}} D^{++}, & \mathcal{D}^{--} &= \nu^{-\frac{1}{2}} D^{--}, \\ \mathcal{D}^0 &= \frac{1}{q} \mu \nu D^0 \equiv [\partial^0]_q, \end{aligned}$$

которые в точности образуют квантовую алгебру Дринфельда–Джимбо:

$$\begin{aligned} [\partial^0, \mathcal{D}^{++}] &= 2\mathcal{D}^{++}, & [\partial^0, \mathcal{D}^{--}] &= -2\mathcal{D}^{--}, \\ [\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}] &= [\partial^0]_q. \end{aligned}$$

Для построения других возможных q -деформированных алгебр Ли определим дифференциальные операторы $\Delta^{++}, \Delta^{--}, \Delta^0$:

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &= D^{++}, & \Delta^{--} &= \frac{q^2 - 1}{q^{2p}} \hat{Z}^{1-p} D^{--}, & \Delta^0 &= \frac{1 - \hat{Z}^s}{1 - q^{2s}}, \\ \hat{Z} &\equiv (\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}, & \hat{Z} f^{(n)} &= q^n f^{(n)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что операторы $\Delta^{\pm\pm,0}$ порождают следующую q -деформированную алгебру Ли:

$$\begin{aligned} \Delta^{++} \Delta^{--} - q^{2p} \Delta^{--} \Delta^{++} &= \frac{\hat{Z}^2 - 1}{\hat{Z}^{1+p}}, \\ \Delta^0 \Delta^{++} - q^{2s} \Delta^{++} \Delta^0 &= \Delta^{++}, \\ \Delta^0 \Delta^{--} - q^{-2s} \Delta^{--} \Delta^0 &= -q^{-2s} \Delta^{--}, \end{aligned}$$

где s, p – произвольные целые числа. Уравнение (13) позволяет выразить оператор $\hat{Z}$ через Δ^0 , тогда произвол в выборе параметров s, p может быть ограничен рассмотрением только квадратичных по $\Delta^{\pm\pm,0}$ q -обобщенных коммутаторов.

3. КАЛИБРОВОЧНО-КОВАРИАНТНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

В данном разделе мы рассмотрим возможные левоковариантные дифференциальные алгебры $SU_q(2)$ с сохраняющимся $U(1)$ -зарядом. Условие ковариантности относительно калибровочных преобразований приводит к единственно возможной дифференциальной алгебре для квантовой группы $SU_q(2)$. Правило Лейбница для внешнего дифференциала определяется подходящим выбором q -деформированной алгебры Ли.

Рассмотрим левоинвариантные дифференциальные 1-формы Картана Ω на квантовой группе $SU_q(2)$

$$\Omega = dT^{-1}T \equiv \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^{++} \\ \omega^{--} & -q^2\omega^0 \end{pmatrix},$$

где ω^0 , ω^{++} , ω^{--} – базисные левоинвариантные дифференциальные 1-формы с соответствующими $U(1)$ -зарядами $(0, +2, -2)$. Определим калибровочные преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned} T^g &= \tilde{T}T, \\ \Omega^g &= \Omega - T^{-1}\tilde{\Omega}T, \quad \tilde{\Omega} \equiv d\tilde{T}^{-1}\tilde{T}, \end{aligned} \tag{14}$$

где матрица $\tilde{T}$ коммутирует с матрицами T , dT и удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям (1), что и матрица T . В случае калибровочной теории матрицы $\tilde{T}$, T зависят от координат базового пространства, а 1-форма калибровочной связности A имеет те же трансформационные и коммутационные свойства, что и правоинвариантная 1-форма $T dT^{-1}$. Требование глобальной $U(1)$ -ковариантности и самосогласованность со структурой квантовой группы и с калибровочными преобразованиями определяют единственным образом все коммутационные соотношения между дифференциальными 1-формами ω и координатами (x, y) . В результате имеем

$$\begin{aligned} \omega^{++}x &= qx\omega^{++}, & \omega^{--}x &= \frac{1}{q}x\omega^{--} + \frac{1-q^4}{q}y\omega^0, \\ \omega^{++}y &= \frac{1}{q}y\omega^{++}, & \omega^{--}y &= qy\omega^{--}, \\ \omega^0x &= x\omega^0 + \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)y\omega^{++}, & \omega^0y &= y\omega^0. \end{aligned} \tag{15}$$

В R -матричной формулировке соотношения (15) были получены впервые в работе [9]. Аналогичное рассмотрение коммутационных свойств базисных дифференциальных 1-форм $\omega^{\pm\pm,0}$ приводит к левоковариантным алгебрам, параметризуемым вещес-

твенным параметром σ ,

$$\omega^{++}\omega^{++} = \omega^{--}\omega^{--} = 0, \quad (16)$$

$$\omega^{++}\omega^0 + q^2\omega^0\omega^{++} = 0, \quad (17)$$

$$\omega^{--}\omega^0 + \frac{1}{q^2}\omega^0\omega^{--} = 0, \quad (18)$$

$$\omega^{++}\omega^{--} + q^\sigma\omega^{--}\omega^{++} + \frac{q^2(1-q^\sigma)(1+q^2)}{q^2-1}\omega^0\omega^0 = 0, \quad (19)$$

$$\omega^0\omega^0 = \frac{1-q^2}{q^2(1+q^2)}\omega^{++}\omega^{--}. \quad (20)$$

Следует отметить, что алгебра, определяемая уравнениями (16)–(20), является самосогласованной независимо от рассмотрения последнего уравнения (20). Прямые вычисления показывают, что требование ковариантности относительно калибровочных преобразований и использование дополнительного условия $\tilde{\Omega}\Omega = -q^2\Omega\tilde{\Omega}$ выделяют единственно возможную калибровочно-ковариантную дифференциальную алгебру $SU_q(2)$ при $\sigma = 4$:

$$\begin{aligned} \omega^{++}\omega^{++} &= \omega^{--}\omega^{--} = 0, \\ \omega^{++}\omega^0 + q^2\omega^0\omega^{++} &= 0, \\ \omega^{--}\omega^0 + \frac{1}{q^2}\omega^0\omega^{--} &= 0, \\ (1+q^2)^2\omega^0\omega^0 &= \frac{1}{q^2}\omega^{++}\omega^{--} + q^2\omega^{--}\omega^{++}. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношение (20) не является ковариантным относительно калибровочных преобразований и должно быть опущено. Полученная алгебра (21) отличается от алгебры, рассмотренной в работе [9]. Наше рассмотрение не содержит условия обращения в нуль $GL_q(2)$ -инварианта:

$$C_2 \equiv \text{tr}_q(\Omega^2), \quad (22)$$

не являющегося калибровочно-ковариантной величиной. Здесь мы используем определение для q -деформированного ковариантного следа [4, 15]. Нетрудно переписать определяющие коммутационные соотношения для калибровочно-ковариантной дифференциальной алгебры в терминах R -матрицы

$$\begin{aligned} R_{12} dT_1 T_2 &= T_2 dT_1 R_{12}, \\ R_{12}\Omega_2 R_{12}^{-1}\Omega_1 + \frac{1}{q^2}\Omega_1 R_{12}\Omega_2 R_{12}^{-1} - \frac{q^2}{1+q^2+q^4} \left(E_{12} + \left(q + \frac{1}{q} \right) \mathcal{E}_{21} \right) \text{tr}_q \Omega^2 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$E_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j, \quad \mathcal{E}_{kl}^{ij} = \varepsilon^{ij} \varepsilon_{kl}.$$

Для построения дифференциального исчисления в калибровочно-ковариантной алгебре необходимо определить операцию внешнего дифференцирования d . Нетрудно убедиться, что стандартное правило Лейбница для внешнего дифференциала не совместимо с основными коммутационными соотношениями (1) и (23). Поэтому аксиоматический метод построения дифференциального исчисления в формализме Вороновича [5] непосредственно не применим в нашем случае. Мы определим операцию внешнего дифференциала конструктивным путем, требуя выполнения следующих условий:

- 1) $d^2 = 0$,
- 2) совместность с основными коммутационными соотношениями (1) и (23).

При этом существенно использование алгебры (10) левоинвариантных векторных полей.

Мы будем использовать определение внешнего дифференциала, основанное на дуальности алгебры дифференциальных форм и алгебре Ли векторных полей. При таком способе определения правило Лейбница для внешней производной выводится непосредственно и зависит только от частного выбора q -алгебры Ли векторных полей.

Рассмотрим трехмерную q -деформированную алгебру Ли левоинвариантных векторных полей $D^a = (D^{++}, D^{--}, D^0)$ на $SU_q(2)$ с некоторой скобкой Ли

$$[D^a, D^b]_B \equiv D^a D^b - B^{abcd} D^c D^d = C^{abc} D^c.$$

Будем полагать, что числовая матрица B^{abcd} является унитарной и порождает представление группы перестановок. Таким образом, легко определить правила альтернации для тензорной алгебры векторных полей. Базисные левоинвариантные дифференциальные 1-формы ω^a определяются как объекты, дуальные векторным полям:

$$\omega^a(D^b) = \delta^{ab}.$$

Действие внешнего дифференциала на произвольной функции f и дифференциальной 1-форме u определяется по аналогии с классическим случаем [16]

$$\begin{aligned} df(D^a) &= D^a f, \\ du(D^a, D^b) &= -\frac{1}{2}(D^a u(D^b) - B^{abcd} D^c u(D^d) - u([D^a, D^b]_B)), \\ du(D^a, D^b) &= -B^{abcd} du(D^c, D^d). \end{aligned} \quad (24)$$

Правила внешнего дифференцирования дифференциальных n -форм ($n > 1$) могут быть построены подобным образом. Уравнения Маурера–Картана имеют стандартный вид

$$d\omega^d(D^a, D^b) = \frac{1}{2}C^{abc}\omega^d(D^c). \quad (25)$$

В качестве примера мы рассмотрим алгебру (10), которая совместна с калибровочно-ковариантной алгеброй (23). В этом случае правила дифференцирования (24) могут

быть записаны в более привычной форме после использования явного тензорного представления для внешних произведений 2-форм $\omega^a \wedge \omega^b$:

$$\begin{aligned} df &= \omega^a D^a f, \\ d(\omega^{++} f) &= d\omega^{++} f + \beta \omega^0 \omega^{++} D^0 f - d\omega^0 D^{++} f, \\ d(\omega^{--} f) &= d\omega^{--} f + \beta q^2 \omega^0 \omega^{--} D^0 f + q^2 d\omega^0 D^{--} f, \\ d(\omega^0 f) &= d\omega^0 f + \beta q^2 \omega^{++} \omega^0 D^{--} f + \beta \omega^{--} \omega^0 D^{++} f, \\ \beta &\equiv \frac{1 + q^4}{q^2(1 + q^2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что уравнения (26) содержат только три линейно независимые базисные дифференциальные 2-формы $\omega^0 \omega^{++}$, $\omega^0 \omega^{--}$ и $d\omega^0$ в пространстве внешних 2-форм, как и в классической теории. Четвертая линейно независимая базисная 2-форма σ^0 , определяемая как

$$\sigma^0 = \frac{1}{1 + q^2} (\omega^{++} \omega^{--} + q^2 \omega^{--} \omega^{++}),$$

принимает ненулевые значения только на симметризованном тензорном произведении $D^0 \otimes D^0$ векторного поля D^0 :

$$\sigma^0(D^0, D^0) = \rho,$$

где параметр ρ имеет нулевой классический предел при $q \rightarrow 1$. Благодаря этому свойству форма σ^0 не появляется в уравнениях (26). Используя правила дифференцирования (26), нетрудно убедиться в выполнении простого соотношения $(dT)T^{-1} = -q^{-2}T dT^{-1}$, которое связывает между собой лево- и правоинвариантные формы Картана. Данное свойство позволяет легко доказать биковариантность дифференциальной алгебры (23).

Для построения правил дифференцирования дифференциальных форм порядка $n > 1$ удобно воспользоваться специфической структурой внешней алгебры квантовой группы $SU_q(2)$. Легко проверить, что инвариантная 2-форма

$$C \equiv \frac{\beta q^4}{1 + q^2 + q^4} C_2 = \frac{\beta q^2}{1 + q^2} (\omega^{++} \omega^{--} + \omega^{--} \omega^{++}) \quad (27)$$

является центральным элементом в алгебре дифференциальных форм. Потребуем выполнения естественного ограничения на структуру дифференциальной алгебры

$$d(C\omega^{(n)} f) = C d(\omega^{(n)} f). \quad (28)$$

Используя это ограничение и наиболее общее выражение для дифференцирования

n -форм ($n = 2, 3$), нетрудно получить следующие правила:

$$\begin{aligned}
d(\omega^0 \omega^{++} f) &= \frac{1}{q^4} v D^{++} f, \\
d(\omega^0 \omega^{--} f) &= -q^4 v D^{--} f, \\
d(\omega^{++} \omega^{--} f) &= \frac{1}{\beta} C df + v D^0 f, \\
d(\omega^{--} \omega^{++} f) &= \frac{1}{\beta q^2} C df - v D^0 f, \\
d(\omega^0 \omega^{++} \omega^{--} f) &= \frac{1}{\beta} C d\omega^0 f - q^4 C \omega^0 \omega^{++} D^{--} f - \frac{1}{q^2} C \omega^0 \omega^{--} D^{++} f, \\
d(vf) &= 0, \\
v &\equiv \frac{1}{2} (\omega^0 \omega^{++} \omega^{--} - q^2 \omega^0 \omega^{--} \omega^{++}),
\end{aligned} \tag{29}$$

где v – 3-форма объема на пространстве $SU_q(2)$.

Все остальные базисные формы (включая формы порядка $n > 3$) могут быть выражены через базисные формы более низкого порядка посредством умножения на инвариантную форму C в подходящей степени. Нетрудно проверить, что полученные правила дифференцирования совместны с условием нильпотентности оператора d и основными коммутационными соотношениями (1) и (23). Таким образом, соотношения (26) и (29) полностью определяют дифференцирование внешней алгебры $SU_q(2)$. Выполнив несложные вычисления, нетрудно найти также явное выражение для уравнения Маурера–Картана (25)

$$d\Omega = \Omega^2 - \frac{q^2}{1 + q^2} I \operatorname{tr}_q \Omega^2.$$

Правая часть уравнения, как и следовало ожидать, содержит лишь бесследовую часть Ω^2 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Минимальная версия калибровочной теории, соответствующей квантовой алгебре $SU_q(2)$, рассматривалась в работе [17], где исходные калибровочные преобразования содержат по определению отображение, коммутирующее с операцией взятия антипода. Можно попытаться сформулировать минимальную калибровочную теорию Янга–Миллса для квантовой группы $SU_q(2)$ по аналогии с $GL_q(N)$ -версией, предложенной в работе [7]. Дифференцирование скалярных полей материи ϕ^i и калибровочного поля A_j^i в этом случае будет более сложным вследствие нестандартного правила Лейбница. Например, с помощью соотношения (26) нетрудно получить следующие правила дифференцирования квадратичных комбинаций скалярных полей:

$$\begin{aligned}
d(\phi^i \phi^j) &= d\phi^i \phi^j + \frac{1}{q^2} \phi^i d\phi^j + \frac{q^2 - 1}{q^3} \varepsilon^{ij} d\phi_k \phi^k, \\
d(\bar{\phi}^i \bar{\phi}^j) &= d\bar{\phi}^i \bar{\phi}^j + q^2 \bar{\phi}^i d\bar{\phi}^j, \\
d(\bar{\phi}^i \phi^j) &= d\bar{\phi}^i \phi^j + q^2 \bar{\phi}^i d\phi^j + (q^2 - 1) \bar{\phi}^i \bar{\phi}^j d\phi_k \phi^k.
\end{aligned}$$

Калибровочное поле A_j^i удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и правоинвариантная дифференциальная 1-форма

$$Z = -\frac{1}{q^2} T \Omega T^{-1}.$$

Другой возможный путь построения самосогласованной теории Янга–Миллса с квантовой группой калибровочной симметрии $SU_q(2)$ соответствует дифференциальному исчислению с выбором в качестве исходной другой, отличной от (10) алгебры.

Автор выражает благодарность Б. М. Зупнику, А. А. Исаеву и Ч. Девчанду за полезные обсуждения и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для инвариантных $SU_q(2)$ -тензоров приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_i^j &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/q & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^{-1j}_i &= \begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для них справедливы тождества $\varepsilon_{ik}\varepsilon^{jk} = \varepsilon_{ki}\varepsilon^{kj} = \delta_i^j$, $\varepsilon_{ik}\varepsilon^{kj} = -\gamma_i^j$, $\varepsilon_{ki}\varepsilon^{jk} = -\gamma^{-1j}_i$. $SU_q(2)$ -индексы поднимаются и опускаются с помощью инвариантной метрики ε_{ij} :

$$A_i = \varepsilon_{ij} A^j, \quad A^i = A_j \varepsilon^{ji}.$$

Матрицы R и Y [12] даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{kl}^{ji} &= R_{kl}^{ij} = \delta_k^i \delta_l^j (1 + (q-1)\delta^{ij}) + \left(q - \frac{1}{q}\right) \delta_k^j \delta_l^i \theta(i-j), \\ Y_{sj}^{ri} &= (\widehat{R}^{-1})_{js}^{ir} q^{2(s-i)} = (\widehat{R}^{-1})_{js}^{ir} q^{2(r-j)}, \quad Y_{il}^{jk} \widehat{R}_{km}^{ln} = \delta_i^n \delta_m^j. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] V. G. Drinfeld. Quantum Groups. In: Proc. Int. Cong. Math. Berkeley, CA, USA, 1986. V. 1. P. 793.
- [2] M. Jimbo. Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 247.
- [3] S. L. Woronowicz. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. 1989. V. 23. P. 117.
- [4] Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян. Алгебра и анализ. 1987. Т. 1. № 1. С. 178.
- [5] S. L. Woronowicz. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125.
- [6] A. P. Isaev, P. N. Pyatov. Phys. Lett. A. 1993. V. 179. P. 81.
- [7] A. P. Isaev, Z. Popowicz. Phys. Lett. B. 1993. V. 307. P. 353.
- [8] В. П. Акчулов, В. Д. Гершун, А. И. Гуменчук. Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. С. 462.
- [9] L. D. Faddeev, P. N. Pyatov. The Differential Calculus on Quantum Linear Groups. hep-th/9402070.
- [10] I. Ya. Aref'eva, G. E. Arutyunov, P. B. Medvedev. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 6658.
- [11] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev. Class. Quantum Gravit. 1984. V. 1. P. 469.
- [12] J. Wess, B. Zumino. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B. 1990. V. 18. P. 302.
- [13] A. Schirrmacher, J. Wess, B. Zumino. Z. Phys. C. 1991. V. 49. P. 317.
- [14] O. Ogievetsky. Differential Operators on Quantum Spaces for $GL_q(n)$ and $SO_q(n)$. Preprint MPI-Ph/91-103.
- [15] A. P. Isaev, Z. Popowicz. Phys. Lett. B. 1992. V. 281. P. 271.
- [16] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [17] T. Sudbery. Phys. Lett. B. 1996. V. 375. P. 75.

Поступила в редакцию 24.XII.1997 г.,
после доработки 18.III.1998 г.