Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Абеди-Фардад, А. Резаи-Агдам, Г. Хагигатдуст,
Классификация четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа и их групп Пуассона–Ли, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:34:42

© 2017 г.

Д. Абеди-Фардад^{*†}, А. Резаи-Агдам[†],
Г. Хагигатдуст^{*‡}

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ БИАЛГЕБР ЛИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ГРУПП ПУАССОНА–ЛИ

Дана классификация всех четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа. Для этих биалгебр Ли получены классические r -матрицы и структуры Пуассона на всех соответствующих четырехмерных группах Пуассона–Ли. Получены некоторые новые интегрируемые модели, для которых группа Пуассона–Ли играет роль фазового пространства, а ее дуальная группа – роль группы симметрий системы.

Ключевые слова: биалгебра Ли, группа Пуассона–Ли, классическая r -матрица, интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/tmf9020

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория классических интегрируемых систем формально связана с геометрией и теорией представлений групп Пуассона–Ли, их биалгебрами Ли [1], [2] и соответствующими классическими r -матрицами [3] (см. также обзор [4]). Подробная классификация r -матриц проведена только для комплексных полупростых алгебр Ли [5]. Недавно было показано, что важную роль в физических задачах играют неполупростые алгебры Ли. Конечно, были попытки классифицировать неполупростые биалгебры Ли малой размерности [6]–[11], а также супербиалгебры Ли [12].

В настоящей работе предпринята попытка провести классификацию четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа так, чтобы на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и ее дуальной алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ существовали симплектические структуры. Кроме того,

^{*}Department of Mathematics, University of Bonab, Tabriz, Iran.
E-mail: j.abedifardad@bonabu.ac.ir

[†]Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: rezaei-a@azaruniv.edu

[‡]Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran.
E-mail: gorbali@azaruniv.edu

мы получаем классические r -матрицы и структуры Пуассона на соответствующих группах Пуассона–Ли. Интерес к такой классификации вызван тем, что она может помочь в построении физических моделей, в которых группа Ли G (алгебры Ли $\mathfrak{g}$) играет роль фазового пространства, а дуальная группа Ли $\tilde{G}$ (дуальной алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$) играет роль группы симметрий систем (или наоборот).

Структура статьи такова. В разделе 2 дан краткий обзор определений и обозначений. В разделе 3, приведя список четырехмерных действительных алгебр Ли симплектического типа [13], [14], основанный на классификации действительных четырехмерных алгебр Ли из работы [15], далее мы классифицируем четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа на основе метода, предложенного в работе [12]. В разделе 4 мы выделяем кограничные биалгебры Ли из списка, полученного в разделе 3. Далее в разделе 5 мы вычисляем структуры Пуассона на группах Пуассона–Ли с помощью скобки Складина. Кроме того, мы проводим те же расчеты и для некограничных биалгебр Ли, используя сопряженные матрицы. Полные списки согласованных симплектических структур на действительных четырехмерных группах Пуассона–Ли приведены в табл. 1 и 2. Наконец, в разделе 6 как примеры физических приложений получены две интегрируемые системы. Для одного из этих примеров группа Ли $\mathbf{A}_{4,9}^{-1/2}$ играет роль фазового пространства, а дуальная группа Ли $\mathbf{A}_{4,9}^1$ – роль группы симметрий систем. Во втором примере эти роли меняются местами. Некоторые заключительные замечания приведены в разделе 7.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Напомним основные определения и утверждения теории биалгебр Ли [1], [2] (см. также обзор [4]). Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ – пространство, дуальное по отношению к невырожденному каноническому спариванию $(\cdot, \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Биалгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с кососимметричным линейным отображением $\delta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ такая, что:

- 1) отображение δ представляет собой 1-коцикл, т. е.

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), 1 \otimes Y + Y \otimes 1] + [1 \otimes X + X \otimes 1, \delta(Y)], \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (1)$$

где 1 означает тождественное отображение на $\mathfrak{g}$;

- 2) отображение $\delta^t: \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ является скобкой Ли на $\mathfrak{g}^*$:

$$(\xi \otimes \eta, \delta(X)) = (\delta^t(\xi \otimes \eta), X) = ([\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, X), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*. \quad (2)$$

Заданную таким образом биалгебру Ли будем обозначать как $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ или $(\mathfrak{g}, \delta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [11]. Если существует такой автоморфизм A алгебры $\mathfrak{g}$, что

$$\delta' = (A \otimes A) \circ \delta \circ A^{-1}, \quad (3)$$

то 1-коциклы δ и δ' алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны. В этом случае эквивалентны также биалгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$ и $(\mathfrak{g}, \delta')$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Биалгебра Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ называется кограничной, если существует такой элемент $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, что

$$\delta(X) = [1 \otimes X + X \otimes 1, r], \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим два типа кограничных биеалгебр Ли. Если r – кососимметричное решение классического уравнения Янга–Бакстера (КУЯБ) $[[r, r]] = 0$, где

$$[[r, r]] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]$$

есть скобка Схоутена, то кограничные биеалгебры Ли называются *треугольными*; таким образом, для $r = r^{ij} X_i \otimes X_j$ имеем

$$r_{12} = r^{ij} X_i \otimes X_j \otimes 1, \quad r_{13} = r^{ij} X_i \otimes 1 \otimes X_j, \quad r_{23} = r^{ij} 1 \otimes X_i \otimes X_j,$$

где $\{X_i\}$ – базис алгебры $\mathfrak{g}$.

Если r – такое решение КУЯБ, что $r_{12} + r_{21}$ является $\mathfrak{g}$ -инвариантным элементом алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, то кограничная биеалгебра Ли называется *квазитреугольной*. Иногда это условие можно заменить на следующее [2], [16]: кограничную биеалгебру Ли называют квазитреугольной, если r – кососимметричное решение модифицированного КУЯБ $[[r, r]] = \omega$, где $\omega \in \wedge^3 \mathfrak{g}$. Заметим, что если $\mathfrak{g}$ – биеалгебра Ли, то $\mathfrak{g}^*$ – тоже биеалгебра Ли [16], но это не всегда верно для свойства кограничности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка Манина* – это такая тройка алгебр Ли $(\mathcal{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ с невырожденной ад-инвариантной симметричной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{D}$, что:

- 1) алгебры $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ являются подалгебрами Ли алгебры $\mathcal{D}$,
- 2) алгебра $\mathcal{D} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ является векторным пространством,
- 3) алгебры $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ изотропны по отношению к $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е.

$$\langle X_i, X_j \rangle = \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0, \quad \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = \delta^j_i. \quad (5)$$

Существует взаимно однозначное соответствие между тройками Манина $(\mathcal{D}, \mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$, где $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^*$, и биеалгебрами Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ [16]. Если выбрать структурные константы алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ на основе равенств

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k, \quad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}^{ij}_k \tilde{X}^k \quad (6)$$

при условии, что они удовлетворяют тождествам Якоби

$$f_{ij}^k f_{km}^n + f_{ik}^n f_{mj}^k + f_{jk}^n f_{im}^k = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{f}^{ij}_k \tilde{f}^{km}_n + \tilde{f}^{im}_k \tilde{f}^{jk}_n + \tilde{f}^{jm}_k \tilde{f}^{ki}_n = 0, \quad (8)$$

то из ад-инвариантности билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{D} = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ следует, что [16], [4]

$$[X_i, \tilde{X}^j] = \tilde{f}^{jk}_i X_k + f_{ki}^j \tilde{X}^k,$$

отсюда, используя соотношения (5), (6) и (2), получаем

$$\delta(X_i) = \tilde{f}^{jk}_i X_j \otimes X_k. \quad (9)$$

Применив это равенство к (1), получим смешанное тождество Якоби

$$f_{kl}^m \tilde{f}^{ij}_m = f_{mk}^i \tilde{f}^{jm}_l - f_{ml}^i \tilde{f}^{jm}_k - f_{mk}^j \tilde{f}^{im}_l + f_{ml}^j \tilde{f}^{im}_k, \quad (10)$$

которое можно также получить из тождества Якоби для $\mathcal{D}$.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ БИАЛГЕБР ЛИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА

В данном разделе проведена классификация четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа таких, что на алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ и дуальных к ним алгебрах $\tilde{\mathfrak{g}}$ возникает симплектическая структура. Классификация четырехмерных действительных алгебр Ли симплектического типа была проведена в работе [13]. Мы воспользуемся методом, который применялся ранее при классификации супер-биалгебр Ли в работе [12]. Дадим сначала краткий обзор симплектических структур на алгебрах Ли и четырехмерных действительных алгебрах Ли симплектического типа, а затем вкратце изложим метод классификации действительных биалгебр Ли малой размерности.

3.1. Четырехмерные действительные алгебры Ли симплектического типа. Симплектическая структура ω на $2n$ -мерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется как 2-форма, удовлетворяющая следующим условиям¹⁾:

- 1) форма ω замкнута, т. е. $d\omega = 0$;
- 2) форма ω имеет максимальный ранг, т. е. ω^n – форма объема на соответствующей группе Ли.

Список четырехмерных действительных алгебр Ли вместе с их симплектическими структурами можно найти в работе [13] (см. также [14] и табл. 1 в работе [18]).

3.2. Метод классификации биалгебр Ли малой размерности. Метод получения и классификации действительных биалгебр Ли малой размерности представим в том виде, в каком он впервые использовался в работе [12] при классификации действительных супербиалгебр Ли малой размерности. Для этой цели воспользуемся дуальным представлением

$$(\mathcal{X}_i)_j^k = -f_{ij}^k, \quad (\mathcal{Y}^k)_{ij} = -f_{ij}^k, \quad (\tilde{\mathcal{X}}^i)_k^j = -\tilde{f}^{ij}_k, \quad (\tilde{\mathcal{Y}}_k)^{ij} = -\tilde{f}^{ij}_k,$$

которое позволяет записать уравнения (8) и (10) в матричном виде: мы имеем соответственно уравнения

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{X}}^i)_k^j \tilde{\mathcal{X}}^k + \tilde{\mathcal{X}}^i \tilde{\mathcal{X}}^j - \tilde{\mathcal{X}}^j \tilde{\mathcal{X}}^i &= 0, \\ (\tilde{\mathcal{X}}^i)_i^j \mathcal{Y}^l &= -(\tilde{\mathcal{X}}^t)^j \mathcal{Y}^i + \mathcal{Y}^j \tilde{\mathcal{X}}^i - \mathcal{Y}^i \tilde{\mathcal{X}}^j + (\tilde{\mathcal{X}}^t)^i \mathcal{Y}^j. \end{aligned} \tag{11}$$

Для заданных структурных константы f_{ij}^k алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы решаем матричные уравнения (11), чтобы получить структурные константы $\tilde{f}^{ij}_k$ дуальных алгебр Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ такие, что $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ является биалгеброй Ли. Тем же методом мы классифицируем четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа. Выполним эту задачу в три этапа по аналогии с работой [12].

ЭТАП 1. Решение уравнений (11) и определение алгебр Ли $\mathfrak{g}'$, изоморфных дуальным решениям $\tilde{\mathfrak{g}}$.

В ходе решения матричных уравнений (11) для получения матриц $\tilde{\mathcal{X}}^i$ некоторые структурные константы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ получаются равными нулю, некоторые остаются

¹⁾Здесь используется такая когомология алгебры Ли, что d – внешняя производная на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см., например, работу [17]).

неизвестными, а некоторые выражаются друг через друга. Чтобы узнать, является ли алгебра $\tilde{\mathbf{g}}$ какой-либо алгеброй Ли или изоморфной ей, нужно использовать отношение изоморфизма между полученными алгебрами Ли $\tilde{\mathbf{g}}$ и одной из алгебр Ли в табл. 1 из работы [18], например $\mathbf{g}'$. Применяя для замены базиса алгебры $\tilde{\mathbf{g}}$ преобразование

$$\tilde{X}'^i = C^i_j \tilde{X}^j, \quad [\tilde{X}'^i, \tilde{X}'^j] = \tilde{f}'^{ij}_k \tilde{X}'^k,$$

получим следующее матричное уравнение для изоморфизма:

$$C(C^i_j \tilde{X}^j_{(\tilde{\mathbf{g}})}) = \tilde{X}^i_{(\mathbf{g}')} C. \quad (12)$$

Решив это уравнение при условии $\det C \neq 0$, получим некоторые дополнительные условия для констант $\tilde{f}^{kl}_{(\tilde{\mathbf{g}})m}$, которые налагаются уравнениями (11).

ЭТАП 2. Нахождение общего вида матриц преобразований $B: \mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}'$ таких, что $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ являются биалгебрами Ли.

На этом этапе биалгебра Ли $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$ преобразуется в биалгебру Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ (где алгебра $\mathbf{g}'$ изоморфна как алгебра Ли алгебре $\mathbf{g}'$), при этом сохраняется автоморфизм алгебры Ли $\mathbf{g}$. В силу инвариантности скалярного произведения (5) имеем преобразование $A^{-t}: \tilde{\mathbf{g}} \rightarrow \mathbf{g}'$, где A^{-t} – обратная транспонированная матрица для некоторой матрицы $A \in \text{Aut}(\mathbf{g})$; это преобразование задается формулами

$$X'_i = A_i^k X_k, \quad \tilde{X}'^j = (A^{-t})^j_l \tilde{X}^l, \quad \langle X'_i, \tilde{X}'^j \rangle = \delta^j_i.$$

Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$(A^{-t})^i_k \tilde{f}^{kl}_{(\tilde{\mathbf{g}})m} (A^{-t})^j_l = f^{ij}_{(\mathbf{g}')n} (A^{-t})^n_m. \quad (13)$$

Теперь для получения биалгебр Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ нужно найти алгебры Ли $\mathbf{g}'$ или такие преобразования $B: \mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}'$, что

$$B^i_k f^{kl}_{(\mathbf{g}')m} B^j_l = f^{ij}_{(\mathbf{g}')n} B^n_m. \quad (14)$$

Для этого достаточно исключить $f^{ij}_{(\mathbf{g}')n}$ из (13) и (14). Тогда получим следующее матричное уравнение для B :

$$(A^{-t})^i_m \tilde{\mathcal{X}}^{t, m}_{(\tilde{\mathbf{g}})} A^{-1} = (B^t A)^{-1} (B^i_k \mathcal{X}^t_{(\mathbf{g}')}^k) B^t. \quad (15)$$

Решив теперь уравнение (15), найдем общий вид матрицы B при условии $\det B \neq 0$.

ЭТАП 3. Вычисление и классификация неэквивалентных биалгебр Ли.

Решив уравнение (15), мы получили общий вид матрицы B , причем ее элементы выражаются через элементы матриц A , C и структурные константы $\tilde{f}^{ij}_{(\tilde{\mathbf{g}})k}$. Теперь после подстановки B в уравнение (14) мы получаем структурные константы $f^{ij}_{(\mathbf{g}')n}$ алгебры Ли $\mathbf{g}'$, выраженные через элементы матриц A , C и структурные константы $\tilde{f}^{ij}_{(\tilde{\mathbf{g}})k}$. Тем самым мы проверим, возможно ли уравнять структурные константы $f^{ij}_{(\mathbf{g}')n}$ друг с другом и положить их равными ± 1 так, чтобы были выполнены условия $\det B \neq 0$, $\det A \neq 0$ и $\det C \neq 0$. Таким способом мы получаем матрицы B_1 , B_2 и т.д. Заметим, что при получении этих матриц мы потребовали $BB_i^{-1} \in \text{Aut}^t(\mathbf{g})$. Если это условие нарушено, его нельзя наложить на структурные константы, поскольку матрицы B и B_i не эквивалентны (см. далее).

Теперь, используя изоморфизм матриц $B_1, B_2, \dots$, мы можем получить биалгебры Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.i}), (\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.ii}), \dots$. С другой стороны, остается нерешенным вопрос, являются ли эти биалгебры Ли эквивалентными. Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся матричным представлением соотношения (3). Рассмотрим две биалгебры Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.i})$ и $(\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.ii})$. С учетом равенства $A(X_i) = A_i^j X_j$ соотношение (3) принимает следующий матричный вид:

$$A^t((A^t)_k^i \mathcal{X}_{(\mathbf{g}'\text{.i})}^k) = \mathcal{X}_{(\mathbf{g}'\text{.ii})}^i A^t. \quad (16)$$

С другой стороны, матрицей преобразования между $\mathbf{g}'\text{.i}$ и $\mathbf{g}'\text{.ii}$ является $B_2 B_1^{-1}$, где $B_1: \mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}'\text{.i}$ и $B_2: \mathbf{g}' \rightarrow \mathbf{g}'\text{.ii}$. Тогда имеем

$$(B_2 B_1^{-1})((B_2 B_1^{-1})_k^i \mathcal{X}_{(\mathbf{g}'\text{.i})}^k) = \mathcal{X}_{(\mathbf{g}'\text{.ii})}^i (B_2 B_1^{-1}). \quad (17)$$

Сравнение уравнений (17) и (16) показывает эквивалентность биалгебр Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.i})$ и $(\mathbf{g}, \mathbf{g}'\text{.ii})$, если $B_2 B_1^{-1} \in A^t$. Таким образом, мы получаем неэквивалентный класс преобразований B_i , причем рассмотрен только один элемент из этого класса.

Теперь используем этот метод для получения и классификации всех четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа.

3.3. Классификация четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа. В этом пункте мы поясняем изложенный выше метод, описывая подробности расчетов, проведенных при построении симплектической биалгебры Ли $(A_{4,1}, (\Pi \oplus R)\text{.i})$.

ПРИМЕР 1. Одно из решений тождеств Якоби и смешанных тождеств Якоби (11) для алгебры Ли $A_{4,1}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{f}^{12}_2 = \tilde{f}^{14}_4 = \alpha, \quad \tilde{f}^{12}_3 = \beta, \quad \tilde{f}^{12}_4 = \gamma, \quad \tilde{f}^{23}_4 = \lambda,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ – произвольные постоянные. Теперь в силу уравнения (12) соответствующая алгебра Ли $\tilde{\mathbf{g}}$ изоморфна алгебре $\Pi \oplus R$, при этом матрица изоморфизма имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ \frac{-c_{13}c_{22} + c_{12}c_{23} - c_{41}\gamma}{\beta} & 0 & 0 & c_{34} \\ c_{41} & 0 & 0 & -\frac{c_{34}\beta}{\gamma} \end{pmatrix}$$

и удовлетворяет условиям $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$, где $c_{ij} \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы матрицы изоморфизма. Теперь, подставляя этот результат и используя следующий элемент группы автоморфизмов алгебры Ли $A_{4,1}$, имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_{22}a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32}a_{44} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \frac{a_{22}}{a_{44}} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

где $a_{22}a_{44} \neq 0$ и a_{ij} – произвольные элементы матриц A . С помощью уравнения (15) получим матрицу B следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \frac{-a_{43}a_{44}b_{41}\beta - a_{22}^2a_{44}^2(b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}) - a_{44}^2b_{41}\gamma}{a_{22}\beta} & 0 & 0 & -\frac{a_{43}a_{44}b_{44}\beta + a_{44}^2b_{44}\gamma}{a_{22}\beta} \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

где b_{ij} – произвольные элементы матрицы B . Далее с помощью уравнения (14) получим следующее коммутационное соотношение для алгебры $\mathfrak{g}'$:

$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \frac{\beta}{a_{22}a_{44}^2} \tilde{X}^3 + \frac{a_{43}\beta + a_{44}\gamma}{a_{22}a_{44}} \tilde{X}^4.$$

С другой стороны, положив $a_{43} = 0$, имеем

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \frac{-a_{22}^2a_{44}^2(b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}) - a_{44}^2b_{41}\gamma}{a_{22}\beta} & 0 & 0 & -\frac{a_{44}^2b_{44}\gamma}{a_{22}\beta} \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

где, поскольку $B_1B_1^{-1} \in A^t$, матрица B_1 эквивалентна B . Кроме того, положив

$$\frac{\beta}{a_{22}a_{44}^2} = \frac{\gamma}{a_{22}^2} = q \neq 0,$$

получим

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \frac{-(b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23})}{q} - b_{41} & 0 & 0 & -b_{44} \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

где, поскольку $B_2B_1^{-1} \in A^t$, матрица B_2 эквивалентна B_1 . Теперь, положив $q = 1$, имеем

$$B_3 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ -(b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}) - b_{41} & 0 & 0 & -b_{44} \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

где, поскольку $B_3B_2^{-1} \in A^t$, матрица B_3 эквивалентна B_2 . Итак, получена бигалгебра Ли $(A_{4,1}, (\Pi \oplus R).i)$ такая, что коммутационные соотношения для $(\Pi \oplus R).i$ имеют вид

$$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3 + \tilde{X}^4.$$

Аналогично этот метод можно использовать для классификации четырехмерных действительных бигалгебр Ли симплектического типа²⁾. Результаты этих вычислений приведены в табл. 3 в приложении.

²⁾Заметим, что мы рассматриваем только такие бигалгебры Ли, для которых существуют симплектические структуры на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и дуальной к ней алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ в соответствии с табл. 1 из работы [18].

4. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ КОГРАНИЧНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ БИАЛГЕБРЫ ЛИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА

В этом разделе мы определяем количество четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа из табл. 3, которые являются кограничными. Для этого нужно найти такой элемент $r = r^{ij}X_i \otimes X_j \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, чтобы кокоммутатор симплектических биалгебр Ли был представим в виде (4). С помощью соотношений (4), (6) и (9) получим (см. также работу [11])

$$\tilde{\mathcal{Y}}_i = \mathcal{X}_i^t r + r \mathcal{X}_i. \quad (18)$$

Теперь, используя приведенные выше соотношения, можно найти r -матрицы биалгебр Ли, приведенных в табл. 3 (если таковые существуют). То же самое можно проделать и для дуальных биалгебр $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с помощью следующей формы (18):

$$\mathcal{Y}^i = (\tilde{\mathcal{X}}^i)^t \tilde{r} + \tilde{r} \tilde{\mathcal{X}}^i.$$

Суммируем полученные результаты. Заметим, что мы также вводим скобки Схотена для этих r -матриц и рассматриваем классические r -матрицы, удовлетворяющие уравнению Янга–Бакстера. Ниже мы перечисляем три типа треугольных биалгебр Ли $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ и треугольных биалгебр $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, дуальных к ним (см. полный список в таблице 3 в работе [18]). Поскольку эти структуры можно задать (с точностью до автоморфизма) с помощью пар r -матриц, естественно назвать их симплектическими би- r -матричными биалгебрами Ли [11]. Итак, мы имеем следующее.

1. Для биалгебры Ли $(A_{4,1}, A_{4,1}.iii)$

$$\begin{aligned} r &= aX_1 \otimes X_1 + c(X_1 \wedge X_3 - X_2 \otimes X_2) + bX_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge X_4 - X_2 \wedge X_3, \\ \tilde{r} &= d(\tilde{X}^2 \otimes \tilde{X}^4 + \tilde{X}^4 \otimes \tilde{X}^2 - \tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^3) + \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 + \\ &\quad + e\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^4 + \tilde{X}^4 \wedge \tilde{X}^1 + f\tilde{X}^4 \otimes \tilde{X}^4, \end{aligned}$$

при этом $[[r, r]] = 0$ и $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = 0$.

2. Для биалгебры Ли $(A_{4,2}^{-1}, A_{4,2}^{-1}.i)$

$$\begin{aligned} r &= aX_1 \otimes X_2 + X_1 \wedge X_3 + bX_2 \otimes X_1 - X_2 \wedge X_4, \\ \tilde{r} &= -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 + \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^4 + c\tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^4 + d\tilde{X}^4 \otimes \tilde{X}^3, \end{aligned}$$

причем $[[r, r]] = 0$ и $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = 0$.

3. Для биалгебры Ли $(A_{4,3}, A_{4,3}.ii)$

$$\begin{aligned} r &= -X_1 \wedge X_4 + aX_2 \otimes X_2 + bX_2 \wedge X_3, \\ \tilde{r} &= \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^4 + c\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 + d\tilde{X}^3 \otimes \tilde{X}^3, \end{aligned}$$

причем $[[r, r]] = 0$ и $[[\tilde{r}, \tilde{r}]] = 0$.

Более того, полный список четырехмерных треугольных биалгебр Ли симплектического типа можно найти в табл. 4 работы [18]. Здесь мы приведем два типа таких биалгебр.

1. Для биалгебры Ли $(A_{4,1}, 4A_1)$

$$r = aX_1 \otimes X_1 + bX_1 \wedge X_2 + c(X_1 \wedge X_3 - X_2 \otimes X_2),$$

причем $[[r, r]] = 0$.

2. Для биалгебры Ли $(A_{4,1}, (\Pi \oplus R).i)$

$$r = aX_1 \otimes X_1 + bX_1 \wedge X_2 + cX_1 \otimes X_3 + X_1 \wedge X_4 - (1 - c)X_2 \otimes X_2 + (2 + c)X_3 \otimes X_1),$$

причем $[[r, r]] = 0$.

5. ПУАССОНОВЫ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ПУАССОНА-ЛИ

5.1. Вычисление пуассоновых и симплектических структур с помощью скобки Складина. Можно получить соответствующие группы Пуассона-Ли для биалгебр Ли с помощью скобки Складина, порожденной данной кососимметричной r -матрицей $r = r^{ij} X_i \otimes X_j$ [16],

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i,j} r^{ij} ((X_i^L f_1)(X_j^L f_2) - (X_i^R f_1)(X_j^R f_2)), \quad f_1, f_2 \in C^\infty(G), \quad (19)$$

где (X_i^L) и (X_i^R) – лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Пуассона-Ли G . Чтобы найти эти поля, достаточно определить лево- и правоинвариантные 1-формы. Для любого $g \in G$ имеем

$$\begin{aligned} dg g^{-1} &= R^i X_i, & (dg g^{-1})^i &= R^i = R_j^i dx^j, \\ g^{-1} dg &= L^i X_i, & (g^{-1} dg)^i &= L^i = L_j^i dx^j, \end{aligned}$$

где x^i – координаты на группе Ли. Теперь с помощью соотношений $\delta_j^i = \langle X_j^R, R^i \rangle$ и $\delta_j^i = \langle X_j^L, L^i \rangle$, а также $X_j^R = (X^R)_j^l \partial_l$ и $X_j^L = (X^L)_j^l \partial_l$ мы имеем

$$(X^R)_j^l = (R^{-t})_j^l, \quad (X^L)_j^l = (L^{-t})_j^l. \quad (20)$$

Чтобы найти матрицы R и L , воспользуемся следующей параметризацией четырехмерной действительной группы Ли G :

$$g = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{x_4 X_4}.$$

Тогда для право- и левоинвариантных 1-форм со значениями в алгебре Ли имеем

$$\begin{aligned} dg g^{-1} &= dx_1 X_1 + dx_2 e^{x_1 X_1} X_2 e^{-x_1 X_1} + dx_3 e^{x_1 X_1} (e^{x_2 X_2} X_3 e^{-x_2 X_2}) e^{-x_1 X_1} + \\ &\quad + dx_4 e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} (e^{x_3 X_3} X_4 e^{-x_3 X_3}) e^{-x_2 X_2} e^{-x_1 X_1}, \\ g^{-1} dg &= dx_1 e^{-x_4 X_4} e^{-x_3 X_3} (e^{-x_2 X_2} X_1 e^{x_2 X_2}) e^{x_3 X_3} e^{x_4 X_4} + \\ &\quad + dx_2 e^{-x_4 X_4} (e^{-x_3 X_3} X_2 e^{x_3 X_3}) e^{x_4 X_4} + dx_3 e^{-x_4 X_4} X_3 e^{x_4 X_4} + dx_4 X_4, \end{aligned}$$

при этом для таких расчетов можно использовать равенство

$$(e^{-x_i X_i} X_j e^{x_i X_i}) = (e^{x_i X_i})_j^k X_k,$$

в правой части которого производится суммирование по индексу k . Таким образом, мы получаем лево- и правоинвариантные векторные поля, которые приведены в табл. 5 работы [18].

Теперь, опираясь на полученные результаты, можно найти пуассонову структуру на группе Ли G . Для простоты перепишем соотношение (19) в следующем матричном виде:

$$\{f_1, f_2\} = (X_1^L f_1 \ X_2^L f_1 \ X_3^L f_1 \ X_4^L f_1) r (X_1^L f_2 \ X_2^L f_2 \ X_3^L f_2 \ X_4^L f_2)^t - \\ - (X_1^R f_1 \ X_2^R f_1 \ X_3^R f_1 \ X_4^R f_1) r (X_1^R f_2 \ X_2^R f_2 \ X_3^R f_2 \ X_4^R f_2)^t.$$

С помощью табл. 5 из работы [18] и r -матриц, представленных в предыдущем пункте, можно вычислить скобки Пуассона на группах Пуассона–Ли G и $\tilde{G}$. Приведем результаты для трех типов алгебр Ли, полный список можно найти в табл. 6 в [18].

1. Для группы Пуассона–Ли $\mathbf{A}_{4,1}$ с дуальной группой $\mathbf{A}_{4,1}$.iii мы имеем скобки Пуассона $\{x_1, x_2\} = x_3 - x_4^2/2$ и $\{x_1, x_3\} = x_4$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.i мы имеем $\{x_1, x_2\} = x_3 + x_4$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.ii мы имеем $\{x_1, x_2\} = x_4$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.iv мы имеем $\{x_1, x_2\} = -x_4^2/2$ и $\{x_1, x_3\} = x_4$.

2. Для группы Пуассона–Ли $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$ с дуальной группой $\mathbf{A}_{4,2}^{-1}$.i мы имеем скобки Пуассона $\{x_2, x_1\} = x_1 + x_4$, $\{x_2, x_3\} = -x_3$ и $\{x_2, x_4\} = 1 - e^{-x_4}$; в случае дуальной группы $\mathbf{A}_{4,5}^{-1,1}$.i мы имеем $\{x_1, x_2\} = -x_1$, $\{x_2, x_3\} = -x_3$ и $\{x_2, x_4\} = 1 - e^{-x_4}$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.iii мы имеем $\{x_2, x_3\} = (1 - e^{-2x_4})/2$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.v мы имеем $\{x_1, x_2\} = x_4$ и $\{x_2, x_3\} = (1 - e^{-2x_4})/2$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.ii мы имеем $\{x_1, x_2\} = x_4$.

3. Для группы Пуассона–Ли $\mathbf{A}_{4,3}$ с дуальной группой $\mathbf{A}_{4,3}$.ii мы имеем скобки Пуассона $\{x_1, x_2\} = -x_3$ и $\{x_1, x_4\} = 1 - e^{-x_4}$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.iv мы имеем $\{x_1, x_2\} = -1 + e^{-x_4}(1 + x_4)$ и $\{x_1, x_3\} = 1 - e^{-x_4}$; в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R)$.i мы имеем $\{x_1, x_2\} = x_1$.

5.2. Вычисление пуассоновой и симплектической структур с помощью троек Манина и отображения $\pi(g)$ между подалгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$. Некоторые из рассмотренных выше биалгебр Ли не имеют r -матрицы, поэтому для получения соответствующей группы Пуассона–Ли можно использовать равенства

$$g^{-1} X_i g = a(g)_i^j X_j, \quad g^{-1} \tilde{X}^i g = b(g)^{ij} X_j + d(g)_j^i \tilde{X}^j$$

и отображение $\pi(g) = b(g)a^{-1}(g)$, являющееся алгебраической пуассоновой структурой. При этом пуассонову структуру на группе Ли G можно получить следующим образом:

$$P_G(g) = (-b(g)a(g)^{-1})^{ij} X_i^R \wedge X_j^R.$$

Таким образом, используя соотношения (20), мы получаем следующее уравнение для пуассоновых структур:

$$P^{kl} = (-b(g)a(g)^{-1})^{ij} (X^R)_i^k (X^R)_j^l. \quad (21)$$

Используя правоинвариантные векторные поля из табл. 5 в работе [18] и вычисляя сопряженные матрицы $a(g)$ и $b(g)$, можно получить скобки Пуассона на биалгебрах

Ли, не являющихся кограничными³⁾. Приведем результаты для одного из типов алгебр Ли, полный список можно найти в табл. 7 в [18].

Для группы Пуассона–Ли $\mathbf{A}_{4,1}$ с дуальной группой $\mathbf{A}_{4,1}.i$ скобки Пуассона

$$\{x_1, x_2\} = x_3 + \frac{x_4^3}{6}, \quad \{x_1, x_3\} = -\frac{x_4^2}{2}, \quad \{x_2, x_3\} = x_4;$$

в случае дуальной группы $\mathbf{A}_{4,1}.ii$

$$\{x_1, x_2\} = -\frac{x_3^2}{2} + x_4, \quad \{x_1, x_4\} = x_3;$$

в случае дуальной группы $\mathbf{A}_{4,9}.i$

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= x_1 + x_2 + \frac{qx_4^3}{6}, & \{x_1, x_3\} &= -\frac{qx_4^2}{2}, & \{x_1, x_4\} &= x_4 + \frac{x_4^2}{2}, \\ \{x_2, x_3\} &= qx_4, & \{x_2, x_4\} &= -x_4; \end{aligned}$$

в случае дуальной группы $\mathbf{A}_{4,9}.ii$

$$\{x_1, x_2\} = x_1 - \frac{x_4^2}{2}, \quad \{x_1, x_3\} = x_4, \quad \{x_1, x_4\} = \frac{x_4^2}{2}, \quad \{x_2, x_4\} = -x_4;$$

в случае дуальной группы $\mathbf{A}_{4,9}.iii$

$$\{x_1, x_2\} = x_2 + \frac{x_4^3}{6}, \quad \{x_1, x_3\} = -\frac{x_4^2}{2}, \quad \{x_1, x_4\} = x_4, \quad \{x_2, x_3\} = x_4;$$

в случае дуальной группы $(\Pi \oplus R).iii$

$$\{x_1, x_2\} = \frac{x_4^3}{6}, \quad \{x_1, x_3\} = -\frac{x_4^2}{2}, \quad \{x_2, x_3\} = x_4;$$

в случае дуальной группы $(VI_0 \oplus R).i$

$$\{x_1, x_2\} = -\frac{x_3^2 + x_4^2}{2}, \quad \{x_1, x_3\} = x_4, \quad \{x_1, x_4\} = x_3;$$

в случае дуальной группы $(VI_0 \oplus R).ii$

$$\{x_1, x_3\} = x_3, \quad \{x_1, x_4\} = -x_4;$$

в случае дуальной группы $(VII_0 \oplus R).i$

$$\{x_1, x_2\} = \frac{x_4^2 - x_3^2}{2}, \quad \{x_1, x_3\} = -x_4, \quad \{x_1, x_4\} = x_3.$$

5.3. Согласованные симплектические структуры на четырехмерных действительных группах Пуассона–Ли. Из приведенных в табл. 6 и 7 работы [18] пуассоновых структур рассмотрим те, у которых матрица P^{ij} обратима, и получим согласованную симплектическую структуру на четырехмерных действительных группах Пуассона–Ли. В результате будем иметь согласованные симплектическую и бисимплектическую⁴⁾ структуры на четырехмерных действительных группах Пуассона–Ли, представленные в табл. 1 и 2.

³⁾Заметим, что с помощью формулы (21) для кограничных биалгебр Ли можно получить те же результаты, что и с помощью скобки Складина (19).

⁴⁾Под бисимплектической структурой мы понимаем симплектические структуры на группах Ли G и $\tilde{G}$, связанных с биалгебрами Ли $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ и $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ соответственно.

Таблица 1. Биалгебры Ли, связанные с согласованной бисимплектической структурой на четырехмерной действительной группе Пуассона–Ли.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$
$(A_{4,7}, A_{4,7}.i)$	$(A_{4,7}, A_{4,9}^{-1/2}.i)$	$(A_{4,9}^0, A_{4,9}^0.iv)$
$(A_{4,9}^0, A_{4,9}^0.v)$	$(A_{4,9}^{-1/2}, A_{4,9}^{-1/2}.ii)$	$(A_{4,9}^{-1/2}, A_{4,9}^{-1/2}.iii)$
$(A_{4,9}^{-1/2}, A_{4,9}^{-1/2}.iv)$	$(A_{4,9}^1, A_{4,9}^1.i)$	$(A_{4,9}^b, A_{4,9}^b.i)$
$(A_{4,9}^{-1/2}, A_{4,9}^1.ii)$	$(A_{4,11}^b, A_{4,11}^b.i)$	$(A_{4,12}, A_{4,12}.i)$
$(A_{4,12}, A_{4,12}.ii)$	$(A_{4,12}, A_{4,12}.iii)$	$(A_2 \oplus A_2, (A_2 \oplus A_2).iv)$
$(A_2 \oplus A_2, (A_2 \oplus A_2).v)$	$(A_2 \oplus A_2, (A_2 \oplus A_2).vi)$	$(A_2 \oplus A_2, (A_2 \oplus A_2).vii)$

Таблица 2. Биалгебры Ли, связанные с согласованной симплектической структурой на четырехмерной действительной группе Пуассона–Ли.

$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$	$(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$
$(A_{4,1}, A_{4,9}^0.i)$	$(A_{4,1}, A_{4,9}^0.ii)$	$(A_{4,1}, A_{4,9}^0.iii)$
$(A_{4,3}, (A_2 \oplus A_2).i)$	$(A_{4,3}, (A_2 \oplus A_2).iii)$	$((\Pi \oplus R).iv, A_{4,7})$
$((\Pi \oplus R).ii, A_{4,7})$	$((\Pi \oplus R).x, A_{4,9}^0)$	$((\Pi \oplus R).iv, A_{4,9}^0)$
$((\Pi \oplus R).ii, A_{4,9}^0)$	$((\Pi \oplus R).viii, A_{4,9}^0)$	$((\Pi \oplus R).xi, A_{4,9}^0)$
$((\Pi \oplus R).ii, A_{4,9}^{-1/2})$	$((\Pi \oplus R).ii, A_{4,9}^1)$	$((\Pi \oplus R).iv, A_{4,9}^b)$
$((\Pi \oplus R).ii, A_{4,11}^b)$	$((\Pi \oplus R).xii, A_{4,12})$	$((\Pi \oplus R).xiii, A_2 \oplus A_2)$
$((\Pi \oplus R).i, A_2 \oplus A_2)$	$((\Pi \oplus R).iii, A_2 \oplus A_2)$	$((\Pi \oplus R).v, A_2 \oplus A_2)$
$((VI_0 \oplus R).vi, A_2 \oplus A_2)$	$((VI_0 \oplus R).vii, A_2 \oplus A_2)$	$((VI_0 \oplus R).viii, A_2 \oplus A_2)$
$((VI_0 \oplus R).v, A_{4,9}^0)$	$((\Pi_0 \oplus R).ii, A_{4,9}^0)$	$((\Pi \oplus R).iv, A_{4,9}^{-1/2})$
$((\Pi \oplus R).xii, A_{4,12})$	$((\Pi \oplus R).iv, A_2 \oplus A_2)$	$((VI_0 \oplus R).iv, A_{4,9}^0)$
$(A_{4,3}, (A_2 \oplus A_2).ii)$		

6. ПРИЛОЖЕНИЕ В ФИЗИКЕ: ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим некоторые интегрируемые системы, полученные с использованием симплектических биалгебр Ли. В этих примерах рассматривается группа Ли G , связанная с биалгеброй Ли $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$ как с фазовым пространством и с ее дуальной группой Ли $\tilde{G}$ как с группой симметрии системы. С этой целью воспользуемся формализмом, изложенным в работе [19], и получим две интегрируемые системы с некоторыми группами симметрий $\tilde{G}$.

ПРИМЕР 2. Группа Ли $\mathbf{A}_{4,9}^{-1/2}$ в качестве фазового пространства и $\mathbf{A}_{4,9}^1.ii$ в качестве группы симметрий.

В этом примере координаты Дарбу имеют вид [19]

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = \frac{e^{-x_4}(x_1 + x_2 x_3)}{x_2}, \quad y_3 = \frac{e^{-x_4/2}(-x_1 + e^{x_4/2}x_1 - x_2 x_3)}{2x_2^2}, \quad y_4 = e^{x_4/2},$$

поэтому в этих координатах Дарбу симплектическую структуру группы $\mathbf{A}_{4,9}^{-1/2}$ (согласно табл. 6 в работе [18])

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= -2x_2^2, & \{x_1, x_3\} &= -x_1 + x_2 x_3, & \{x_1, x_4\} &= 2x_2, \\ \{x_2, x_3\} &= -2x_2, & \{x_3, x_4\} &= -2 + 2e^{x_4/2} \end{aligned} \quad (22)$$

можно упростить следующим образом:

$$\{y_1, y_3\} = 1, \quad \{y_2, y_4\} = 1. \quad (23)$$

Следовательно, мы получаем следующий вид динамических функций Q_i [19]:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -y_4 = -e^{x_4/2}, & Q_2 &= -\frac{y_3}{2} = -\frac{e^{-x_4/2}(-x_1 + e^{x_4/2}x_1 - x_2x_3)}{4x_2^2}, \\ Q_3 &= 2y_1y_3 + y_2y_4 = \frac{x_1}{x_2}, \\ Q_4 &= -y_2y_3 = \frac{e^{-3x_4/2}x_1^2}{2x_2^3} - \frac{e^{-x_4}x_1^2}{2x_2^3} + \frac{e^{-3x_4/2}x_1x_3}{x_2^2} - \frac{e^{-x_4}x_1x_3}{2x_2^2} + \frac{e^{-3x_4/2}x_3^2}{2x_2}. \end{aligned}$$

При этом в силу соотношений (22) или (23) они удовлетворяют следующим скобкам Пуассона:

$$\{Q_1, Q_3\} = -Q_1, \quad \{Q_1, Q_4\} = 2Q_2, \quad \{Q_2, Q_3\} = -2Q_2, \quad \{Q_3, Q_4\} = Q_4,$$

т.е. мы имеем $\{Q_i, Q_j\} = f_{ij}^k Q_k$, где f_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли симметрий $A_{4,9}^1$.ii. Инвариантами такой системы являются (Q_1, Q_2) или (Q_2, Q_4) , поэтому одну из найденных функций Q_i можно считать гамильтонианом интегрируемой системы.

ПРИМЕР 3. В этом примере фазовое пространство и группа симметрий, указанные в примере 2, меняются ролями, т.е. группа Ли $\mathbf{A}_{4,9}^1$.ii играет роль фазового пространства, а группа $\mathbf{A}_{4,9}^{-1/2}$ – группы симметрий.

В этом примере координаты Дарбу записываются как [19]

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = -\frac{2e^{x_3}x_1x_4 + x_3}{x_1}, \quad y_3 = \frac{-x_2 + e^{-x_3}x_2 + 2x_1x_4}{x_1^2}, \quad y_4 = e^{-x_3}, \quad (24)$$

поэтому симплектическая структура имеет вид (согласно табл. 6 в работе [18])

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= -x_1^2, & \{x_1, x_4\} &= \frac{1}{2}e^{-x_3}x_1, & \{x_2, x_3\} &= x_1, \\ \{x_2, x_4\} &= e^{-x_3}x_2, & \{x_3, x_4\} &= -\frac{1}{2}(1 - e^{-x_3}), \end{aligned} \quad (25)$$

кроме того, динамические функции Q_i имеют вид [19]

$$\begin{aligned} Q_1 &= -y_3 = -\frac{-x_2 + e^{-x_3}x_2 + 2x_1x_4}{x_1^2}, & Q_2 &= -y_4 = -e^{-x_3}, \\ Q_3 &= -y_2y_3 = \left(\frac{2e^{x_3}x_1x_4 + x_3}{x_1}\right)\left(\frac{-x_2 + e^{-x_3}x_2 + 2x_1x_4}{x_1^2}\right), \\ Q_4 &= -\frac{y_1y_3}{2} - y_2y_4 = \frac{x_2}{2x_1} + \frac{e^{-x_3}x_2}{x_1} + x_4, \end{aligned}$$

причем они удовлетворяют следующим скобкам Пуассона в силу соотношений (25):

$$\{Q_1, Q_4\} = \frac{1}{2}Q_1, \quad \{Q_2, Q_3\} = Q_1, \quad \{Q_2, Q_4\} = Q_2, \quad \{Q_3, Q_4\} = -\frac{1}{2}Q_3,$$

т. е. мы имеем $\{Q_i, Q_j\} = f_{ij}^k Q_k$, где f_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли симметрий $A_{4,9}^{-1/2}$. Здесь инвариантами системы являются (Q_1, Q_2) или (Q_1, Q_3) , причем одну из найденных функций Q_i можно считать гамильтонианом интегрируемой системы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведена классификация всех четырехмерных действительных биалгебр Ли симплектического типа и получены классические r -матрицы, пуассоновы и симплектические структуры на всех соответствующих четырехмерных группах Пуассона–Ли. Кроме того, приведены два примера, применимых в физических приложениях, причем для указанных интегрируемых систем группа Пуассона–Ли G играет роль фазового пространства, а ее дуальная группа Ли $\tilde{G}$ – группы симметрий системы. Исследование таких систем и систем, для которых роли G и $\tilde{G}$ меняются местами, а также связей между ними продолжается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 3. Четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа.

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	Ненулевые коммутационные соотношения группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ (всюду в таблице $q \in \mathbb{R} - \{0\}$)
$A_{4,1}$	$4A_1$	
	$A_{4,1}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,1}.ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$A_{4,1}.iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^0.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1 + \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^0.ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^0.iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3 + \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(VI_0 \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(VI_0 \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$
	$(VII_0 \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
$A_{4,2}^{-1}$	$4A_1$	
	$A_{4,2}^{-1}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1 - \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,5}^{-1,-1}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).vi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$

ТАБЛИЦА 3. Четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа (продолжение).

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	Ненулевые коммутационные соотношения группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ (всюду в таблице $q, q_1, q_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$)
$A_{4,3}$	$4A_1$	
	$A_{4,3}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3$
	$A_{4,3}.ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,3}.iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -q\tilde{X}^3$
	$A_{4,3}.iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q\tilde{X}^4$
	$(A_2 \oplus A_2).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$(A_2 \oplus A_2).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3$
	$(A_2 \oplus A_2).iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -q\tilde{X}^3$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).vi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\text{III} \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1$
	$(\text{III} \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3$
	$(\text{VI}_0 \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3$
$A_{4,5}^{-1,-1}$	$4A_1$	
	$A_{4,5}^{-1,-1}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).vii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^4$
$A_{4,5}^{-1,b}$	$(\Pi \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$4A_1$	
	$A_{4,5}^{-1,b}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = b\tilde{X}^4$
$A_{4,5}^{a,-1}$	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).viii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$4A_1$	
$A_{4,5}^{a,-a}$	$A_{4,5}^{a,-a}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = a\tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).ix$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).viii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
$A_{4,5}^{a,-a}$	$4A_1$	
	$A_{4,5}^{a,-a}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -a\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).viii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$(\Pi \oplus R).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$

Таблица 3. Четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа (продолжение).

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	Ненулевые коммутационные соотношения группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ (всюду в таблице $q_1, q_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$)
$A_{4,6}^{a,0}$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -a\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,6}^{a,0}.i$ ($\Pi \oplus R$).iii ($\Pi \oplus R$).ii	
$A_{4,7}$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \frac{1}{2}(\tilde{X}^2 - \tilde{X}^3), \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \frac{1}{2}\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 2\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = 2\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,7}.i$ $A_{4,9}^{-1/2}.i$ ($\Pi \oplus R$).iv	
$A_{4,9}^0$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = q_1\tilde{X}^1 + \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q_2\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q_1\tilde{X}^2$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^2 + \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^2 - \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^2 + \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^2$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^2$
	$A_{4,9}^0.iv$	
	$A_{4,9}^0.v$	
	($\Pi \oplus R$).x	
	($\Pi \oplus R$).viii	
	($\Pi \oplus R$).iv	
	($\Pi \oplus R$).ii	
	($\Pi \oplus R$).xi	
	($\text{VI}_0 \oplus R$).iv	
	($\text{VI}_0 \oplus R$).v	
$A_{4,9}^{-1/2}$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -2\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = 4\tilde{X}^3 + \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = 2\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -2\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = 4\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = 2\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \frac{1}{2}\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \frac{1}{2}\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = 2\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -2\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^{-1/2}.ii$	
	$A_{4,9}^{-1/2}.iii$	
	$A_{4,9}^{-1/2}.iv$	
	$A_{4,9}^1.ii$	
	($\Pi \oplus R$).iv ($\Pi \oplus R$).ii	
$A_{4,9}^1$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\frac{1}{4}\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -\frac{1}{4}\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\frac{1}{2}\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^1.i$ ($\Pi \oplus R$).ii	
$A_{4,9}^b$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = b\tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = (1+b)\tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = (1+b)^2\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,9}^b.i$ ($\Pi \oplus R$).iv	
$A_{4,11}^b$	$4A_1$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \frac{1}{2}\tilde{X}^2 - \frac{1}{2b}\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \frac{1}{2b}\tilde{X}^2 + \frac{1}{2}\tilde{X}^3,$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = 2b\tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$
	$A_{4,11}^b.i$	
	($\Pi \oplus R$).ii ($\Pi \oplus R$).ii	

ТАБЛИЦА 3. Четырехмерные действительные биалгебры Ли симплектического типа (окончание).

$\mathfrak{g}$	$\tilde{\mathfrak{g}}$	Ненулевые коммутационные соотношения группы $\tilde{\mathfrak{g}}$ (всюду в таблице $q, q_1, q_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$)
$A_{4,12}$	$4A_1$	
	$A_{4,12}.i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -q_1 \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q_2 \tilde{X}^1 + q_1 \tilde{X}^2,$ $[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -q_1 \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -q_1 \tilde{X}^1 + q_2 \tilde{X}^2$
	$A_{4,12}.ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = q \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^4,$ $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$
	$A_{4,12}.iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = -q \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -q \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -q \tilde{X}^1$
	$(II \oplus R).xii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3$
$A_2 \oplus A_2$	$(VII_0 \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -q(\tilde{X}^1 + \tilde{X}^3), \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = q(\tilde{X}^2 - \tilde{X}^4), \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = -q(\tilde{X}^1 + \tilde{X}^3)$
	$4A_1$	
	$(A_2 \oplus A_2).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = q_1 \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q_2 \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q_2 \tilde{X}^2$
	$(A_2 \oplus A_2).v$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q \tilde{X}^2$
	$(A_2 \oplus A_2).vi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = q \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(A_2 \oplus A_2).vii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q_1 \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q_1 \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = q_2 \tilde{X}^4$
	$(II \oplus R).xiii$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1 + \tilde{X}^3$
	$(III \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1$
	$(III \oplus R).iii$	$[\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(III \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1 + q \tilde{X}^2$
	$(III \oplus R).v$	$[\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3 + q \tilde{X}^4$
	$(VI_0 \oplus R).vi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -q \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = q \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = q \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = q \tilde{X}^4$
	$(VI_0 \oplus R).vii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1 + \tilde{X}^2 + \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^3$
	$(VI_0 \oplus R).viii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^3$
$VI_0 \oplus R$	$4A_1$	
	$(VI_0 \oplus R).ix$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1$
	$(II \oplus R).xiv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).xii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3 + \tilde{X}^4$
	$(III \oplus R).vi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1 + \tilde{X}^2 + \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1 + \tilde{X}^2 + \tilde{X}^3$
	$(III \oplus R).vii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1 - \tilde{X}^2 + \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^1 + \tilde{X}^2 - \tilde{X}^3$
$VII_0 \oplus R$	$4R$	
	$(VII_0 \oplus R).iv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^2, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^1$
	$(II \oplus R).xiv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).xii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).i$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3 + \tilde{X}^4$
$III \oplus R$	$4A_1$	
	$(III \oplus R).xiii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^1$
	$(III \oplus R).vix$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^4$
	$(II \oplus R).xv$	$[\tilde{X}^2, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^4, \quad [\tilde{X}^3, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^1$
$II \oplus R$	$4A_1$	
	$(II \oplus R).xiv$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).xvi$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).xvii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^1, \tilde{X}^4] = -\tilde{X}^3, \quad [\tilde{X}^2, \tilde{X}^4] = \tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).xviii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^3$
	$(II \oplus R).ii$	$[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2] = \tilde{X}^4$

Благодарности. Мы благодарим М. Акбари-Моганджуги за внимательное чтение статьи, а также М. Сефида за полезные комментарии.

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд, “Гамильтоновы структуры на группах Ли, бигебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга–Бакстера”, *Докл. АН СССР*, **268**:2 (1983), 285–287.
- [2] В. Г. Дринфельд, “Квантовые группы”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. VIII, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **155**, Наука, Л., 1986, 18–49.
- [3] М. А. Семенов-Тянь-Шанский, “Что такое классическая r -матрица”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:4 (1983), 17–33.
- [4] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Integrability of Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Physics, **495**, eds. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, Springer, Berlin, 1997.
- [5] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, “О классическом уравнении Янга–Бакстера для простых алгебр Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:3 (1983), 69–70.
- [6] J. M. Figueroa-O’Farrill, “ $N = 2$ structures on solvable Lie algebras: The $c = 9$ classification”, *Commun. Math. Phys.*, **177**:1 (1996), 129–156, arXiv: hep-th/9412008.
- [7] S. Zhang, “Classical Yang–Baxter equation and low dimensional triangular Lie bialgebras”, *Phys. Lett. A*, **246**:1–2 (1998), 71–81, arXiv: math.QA/0311517.
- [8] M. A. Jafarizadeh, A. Rezaei-Aghdam, “Poisson–Lie T-duality and Bianchi type algebras”, *Phys. Lett. B*, **458**:4 (1999), 477–490, arXiv: hep-th/9903152.
- [9] L. Hlavaty, L. Snobl, *Classification of 6-dimensional Manin triples*, arXiv: math.QA/0202209.
- [10] X. Gomez, “Classification of three-dimensional Lie bialgebras”, *J. Math. Phys.*, **41**:7 (2000), 4939–4956.
- [11] A. Rezaei-Aghdam, M. Hemmati, A. R. Rastkar, “Classification of real three-dimensional Lie bialgebras and their Poisson–Lie groups”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:18 (2005), 3981–3994, arXiv: math-ph/0412092.
- [12] A. Eghbali, A. Rezaei-Aghdam, F. Heidarpour, “Classification of two and three dimensional Lie superbialgebras”, *J. Math. Phys.*, **51**:7 (2010), 073503, 14 pp., arXiv: 0901.4471.
- [13] G. Ovando, “Four dimensional symplectic Lie algebras”, *Beitr. Algebra Geom.*, **47**:2 (2006), 419–434.
- [14] A. Rezaei-Aghdam, M. Sephid, “Complex and bi-Hermitian structures on four-dimensional real Lie algebras”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:32 (2010), 325210, 14 pp., arXiv: 1002.4285; M. Sephid, *Complex and Symplectic Structures on Four Dimensional Lie-bialgebras*, MSc Thesis, Department of Physics, Faculty of Science, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran (in persian).
- [15] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, “Invariants of real low dimension Lie algebras”, *J. Math. Phys.*, **17**:6 (1976), 986–994.
- [16] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [17] J. De Azcárraga, J. M. Izquierdo, *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [18] J. Abedi-Fardad, A. Rezaei-Aghdam, Gh. Haghighatdoost, *Classification of four dimensional real symplectic Lie bialgebras and their Poisson–Lie groups*, arXiv: 1505.04612.
- [19] J. Abedi-Fardad, A. Rezaei-Aghdam, Gh. Haghighatdoost, “Integrable and superintegrable Hamiltonian systems with four dimensional real Lie algebras as symmetry of the systems”, *J. Math. Phys.*, **55**:5 (2014), 053507, 11 pp.