Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ишханян, Потенциалы, для которых разрешимо уравнение Шредингера, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 20–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:00:27

© 2016 г.

А. М. Ишханян^{*†‡}

ПОТЕНЦИАЛЫ, ДЛЯ КОТОРЫХ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА РАЗРЕШИМО В КОНФЛЮЭНТНЫХ ФУНКЦИЯХ ГОЙНА

Показано, что если потенциал пропорционален некоторому не зависящему от энергии непрерывному параметру, то существуют пятнадцать преобразований координат, порождающих потенциалы, форма которых не зависит от этого параметра и для которых одномерное стационарное уравнение Шредингера решается в конфлюэнтных функциях Гойна. Все эти потенциалы также не зависят от энергии и задаются семью параметрами. Вследствие того что конфлюэнтное уравнение Гойна симметрично относительно перестановки его регулярных особых точек, только девять из этих потенциалов являются независимыми. Из них пять потенциалов представляют собой различные обобщения гипергеометрических или вырожденных гипергеометрических классических потенциалов, один потенциал включает как частные случаи потенциалы двух гипергеометрических типов (вырожденный гипергеометрический потенциал Морзе и гипергеометрический потенциал Эккарта), а остальные три включают в себя пятипараметрические условно интегрируемые вырожденные гипергеометрические потенциалы. Ни один из конфлюэнтных потенциалов Гойна нельзя, вообще говоря, преобразовать в какой-либо другой путем подбора параметров.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, интегрируемые потенциалы, конфлюэнтное уравнение Гойна.

DOI: 10.4213/tmf9023

Данное исследование проводилось в рамках деятельности Международной объединенной лаборатории IRMAS (CNRS-France и SCS-Armenia). Работа поддержана Государственным комитетом по науке Министерства образования и науки Республики Армения (SCS гранты 13RB-052 и 15T-1C323), а также проектом “Ведущие исследовательские университеты России” (грант FTI_120_2014 Томского политехнического университета).

^{*}Институт физических исследований, НАН Армении, Аштарак, Армения.
E-mail: aishkhanyan@gmail.com

[†]Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения

[‡]Физико-технический институт, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем возможности и способы приведения одномерного стационарного уравнения Шредингера к конфлюэнтному уравнению Гойна [1], [2]. Последнее является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, которое можно условно рассматривать как естественное обобщение гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнений. Из пяти уравнений Гойна именно конфлюэнтное уравнение представляет особый интерес, поскольку структура его особых точек напрямую отражает характерные черты обоих гипергеометрических уравнений. Данное уравнение имеет две регулярные особые точки, расположенные в конечных точках комплексной z -плоскости (принято считать, что это точки $z = 0$ и $z = 1$), что характерно для гипергеометрического уравнения, и одну нерегулярную особую точку s -ранга два [2] в $z = \infty$, как в случае вырожденного гипергеометрического уравнения. Можно ожидать, что благодаря такой структуре особых точек конфлюэнтное уравнение Гойна поможет получить обобщения всех гипергеометрических потенциалов, равно как и некоторых потенциалов, не являющихся гипергеометрическими, например потенциала Матьё (в алгебраической форме уравнение Матьё представляет собой частный случай конфлюэнтного уравнения Гойна), сфероидальных и кулоновских сфероидальных потенциалов [3].

В силу того что гипергеометрические уравнения и ряд других известных уравнений (таких, как вышеназванное уравнение Матьё, сфероидальное и кулоновское сфероидальное уравнения) получаются путем простого подбора отдельных параметров, конфлюэнтное уравнение Гойна дает понятный способ проследить за каким-либо частным обобщением при переходе от известного потенциала к потенциалу более общего типа из набора конфлюэнтных потенциалов Гойна.

Если уравнение Шредингера приводится к конфлюэнтному уравнению Гойна путем преобразования координат, не зависящего от энергии, то общий вид потенциала будет содержать 11 параметров. Однако мы показываем, что если потенциал пропорционален некоторому не зависящему от энергии параметру, а форма потенциала не зависит ни от этого параметра, ни от энергии, то общее семейство непременно распадается на ограниченное множество частных потенциалов с меньшим числом независимых непрерывных параметров. В первую очередь мы доказываем, что преобразование координат не должно зависеть от упомянутого выше параметра. Непосредственным следствием этого наблюдения является то, что производная Шварца для преобразования координат не может иметь иных полюсов, кроме особых точек того уравнения, к которому сводится уравнение Шредингера. Это приводит к дискретному набору нескольких допустимых преобразований координат.

В случае конфлюэнтного уравнения Гойна, вообще говоря, существуют пятнадцать возможных вариантов преобразования координат. Каждый из этих вариантов приводит к отдельному семипараметрическому потенциалу. Однако в силу симметрии конфлюэнтного уравнения Гойна относительно перестановки $z \leftrightarrow 1 - z$ количество независимых потенциалов сокращается до девяти. В отличие от гипергеометрического случая, ни один из конфлюэнтных потенциалов Гойна вообще говоря, не может быть преобразован в какой-либо иной путем подбора параметров.

В общем случае потенциалы задаются параметрически как пары функций $V(z)$, $x(z)$. В шести случаях, однако, обратная функция $z(x)$ и, следовательно, потенци-

ал $V(z(x))$ выражаются через элементарные функции. Пять из этих потенциалов представляют собой различные обобщения либо гипергеометрического, либо вырожденного гипергеометрического классического потенциала [4]–[13], а шестой потенциал содержит как частные случаи классические гипергеометрические потенциалы обоих типов (вырожденный гипергеометрический потенциал Морзе [5] и гипергеометрический потенциал Эккарта [6]). Остальные три потенциала, для которых преобразование координат не выражается через известные элементарные функции, содержат как частные случаи вырожденные гипергеометрические потенциалы, которые интегрируемы только условно. Заметим, что один из этих потенциалов может быть представлен через неявно заданную элементарную функцию $W(x)$ – функцию Ламберта [14], [15], которая является решением уравнения $We^W = x$.

2. ЗАДАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ

Уравнение Шредингера для частицы с массой m и энергией E в поле потенциала $V(x)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0 \quad (1)$$

путем преобразования зависимой и независимой переменных $\psi = \phi(z)u(z)$, $z = z(x)$ сводится к уравнению

$$u_{zz} + \left(2\frac{\phi_z}{\phi} + \frac{\rho_z}{\rho}\right)u_z + \left(\frac{\phi_{zz}}{\phi} + \frac{\rho_z}{\rho}\frac{\phi_z}{\phi} + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{E - V(z)}{\rho^2}\right)u = 0, \quad (2)$$

где $\rho = z'(x)$; здесь и далее нижний латинский индекс обозначает производную по соответствующей переменной. Данное уравнение переходит во вспомогательное уравнение

$$u_{zz} + f(z)u_z + g(z)u = 0, \quad (3)$$

если

$$2\frac{\phi_z}{\phi} + \frac{\rho_z}{\rho} = f(z), \quad \frac{\phi_{zz}}{\phi} + \frac{\rho_z}{\rho}\frac{\phi_z}{\phi} + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{E - V(z)}{\rho^2} = g(z). \quad (4)$$

Найдем $\phi(z)$ из первого уравнения,

$$\phi(z) = \rho^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int f(z) dz\right), \quad (5)$$

и перепишем второе из уравнений (4) как

$$g - \frac{f_z}{2} - \frac{f^2}{4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)_z - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{E - V(z)}{\rho^2}. \quad (6)$$

Выражение в левой части этого уравнения является инвариантом уравнения (3),

$$I(z) = g - \frac{f_z}{2} - \frac{f^2}{4},$$

а первые два слагаемых в правой части определяют производную Шварца $\{z, x\}$ функции $z(x)$:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)_z - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)^2 = -\frac{\{z, x\}}{2\rho^2}, \quad \{z, x\} \equiv \left(\frac{z''(x)}{z'(x)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''(x)}{z'(x)}\right)^2; \quad (7)$$

здесь и далее штрих обозначает производную по x . С учетом этих соотношений перепишем уравнение (6) как

$$(z'(x))^2 I(z) + \frac{1}{2} \{z, x\} = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)). \quad (8)$$

Начиная с работы Бозе [16] это уравнение не раз использовалось многими авторами. Однако, для того чтобы наши выкладки были более наглядными, мы будем пользоваться эквивалентным ему уравнением (6).

Изучая потенциалы, построенные с помощью не зависящего от энергии преобразования $z(x)$, при условии, что сам потенциал также предполагается не зависящим от энергии, можно сразу отметить, что слагаемые с энергией и потенциалом в уравнении (6) должны быть подобраны надлежащим образом, чтобы каждое из них в отдельности независимо от другого соответствовало одному из двух слагаемых в левой части, формирующих инвариант $I(z)$. Применительно к конфлюэнтному уравнению Гойна

$$u_{zz} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon \right) u_z + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)} u = 0 \quad (9)$$

данный инвариант представляет собой полином четвертой степени от z , деленный на $z^2(z-1)^2$. Отсюда, взяв $E/\rho^2 \sim I(z)$, непосредственно приходим к преобразованию

$$\rho(z) \equiv z'(x) = \frac{\pm z(z-1)}{\sqrt{r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4}}. \quad (10)$$

Взяв затем $V(z)/\rho^2 \sim I(z)$, определим семейство потенциалов

$$\frac{2mV(x)}{\hbar^2} = \frac{v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + v_3 z^3 + v_4 z^4}{r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4} - \frac{\{z, x\}}{2}. \quad (11)$$

Учитывая произвольность величин r_k и v_k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, и постоянной интегрирования в уравнении (10), приходим к выводу, что это семейство потенциалов является 11-параметрическим.

В случае гипергеометрических уравнений инвариант является полиномом $r(z)$ второй степени, деленным на $z^2(z-1)^2$ для гипергеометрического уравнения или на z^2 для вырожденного гипергеометрического уравнения. В обоих случаях мы получаем семипараметрические семейства потенциалов (потенциалы Натансона [17]). Известно, однако, что классические гипергеометрические потенциалы [4]–[13] получаются при довольно сильных ограничениях, налагаемых на параметры полинома $r(z)$. Для гипергеометрических потенциалов допустимым оказывается лишь дискретный набор полиномов [16]

$$\begin{aligned} r(z) \sim 1, \quad r(z) \sim z, \quad r(z) \sim 1-z, \quad r(z) \sim z^2, \\ r(z) \sim z(1-z), \quad r(z) \sim (1-z)^2; \end{aligned} \quad (12)$$

в случае вырожденных гипергеометрических потенциалов приемлемый дискретный набор составляют [16]

$$r(z) \sim 1, \quad r(z) \sim z, \quad r(z) \sim z^2. \quad (13)$$

Вследствие этого все классические потенциалы являются пятипараметрическими. Три параметра из этих пяти определяют начало координат, пространственный масштаб и начало отсчета энергии, так что для характеристик физических потенциалов остаются всего два параметра. Далее мы проследим эту спецификацию общего семейства потенциалов (10), (11) в рамках весьма общих допущений.

Рассмотрим частный случай, когда потенциальный член в уравнении Шредингера пропорционален некоторому параметру μ , который сам не зависит от энергии, и предположим, что форма потенциала не зависит ни от энергии, ни от этого параметра:

$$\frac{2mV(x)}{\hbar^2} = \mu S(x), \quad (14)$$

где μ не зависит от E , а S не зависит ни от μ , ни от E . Можно перечислить ряд физических ситуаций, когда данное допущение имеет место. Тем не менее здесь нужно быть осторожным в следующем отношении. Может показаться, что для потенциалов, не зависящих от массы, например в случае чисто электромагнитных взаимодействий, всегда можно просто положить $\mu = m$. Однако конкретно данный выбор сингулярен, так как масса содержится также в слагаемом, содержащем энергию, в результате предел $\mu \rightarrow 0$, которым мы пользуемся ниже, в этом случае нельзя применять напрямую.

В гипергеометрических случаях отметим, что корни полинома $r(z)$ всегда совпадают с конечными особыми точками того уравнения, к которому приводится уравнение Шредингера, а именно с $z = 0$, $z = 1$ в случае гипергеометрического уравнения и с $z = 0$, если рассматривается вырожденное гипергеометрическое уравнение. Докажем, что это является общим свойством, вытекающим из предположения (14).

В качестве первого шага мы покажем, что задаваемое уравнением (10) преобразование не должно зависеть от μ . Данное утверждение можно доказать, если рассмотреть поведение не зависящих от μ функций S и $s = \ln S'$ в окрестности точки $x = x_*$, когда переменная z подходит к конечной особой точке уравнения. В качестве таковой можно взять любую особую точку, которая является концевой точкой в рассматриваемой задаче. Ради простоты выкладок возьмем особую точку $z = 0$ и положим $x_* = -\infty$.

Рассмотрим поведение потенциала в окрестности точки $z = 0$. Если $r_0 \neq 0$, из уравнений (10) и (11) имеем следующие разложения:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z'(x)} = \frac{\sqrt{r_0}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_0 = \frac{2r_0 + r_1}{2\sqrt{r_0}}, \quad (15)$$

$$S(x) = \frac{2m}{\mu\hbar^2}(V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + \dots) = S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \dots. \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (15) определяет ведущий член асимптотики:

$$z|_{x \rightarrow -\infty} \sim \exp\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r_0}}\right) = c_0 e^{x/\sqrt{r_0}}, \quad (17)$$

где x_0 – константа интегрирования, которая, вообще говоря, может зависеть от μ . Применяя тождество

$$s'(x) = \frac{S''(x)}{S'(x)} = \frac{V''(x)}{V'(x)} = \frac{V_{zz}(z)}{V_z(z)} \rho(z) + \rho_z(z) \quad (18)$$

с учетом условий $\rho(0) = 0$ и $\rho_z(0) = \pm 1/\sqrt{r_0}$, мы видим, что r_0 не зависит от μ .

Асимптотическое равенство (17) дает следующую полезную формулу, верную для любых $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-nx/\sqrt{r_0}} z^n(x) = c_0^n, \quad c_0 = e^{-x_0/\sqrt{r_0}}.$$

Теперь, последовательно вычитая из $S(x)$ частичные суммы $P_n(x) = \sum_{k=0}^n S_k z^k$ (в которых $P_{-1} \equiv 0$) и вычисляя пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-nx/\sqrt{r_0}} (S(x) - P_{n-1}(x)) = S_n c_0^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

можно заключить, что, поскольку $S(x)$ не зависит от μ , все предельные значения $S_n c_0^n$ не зависят от μ . Аналогично, рассматривая разложение

$$s(x) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots \quad (19)$$

функции $s(x) = \ln S'(x)$, последовательно вычитая соответствующие частичные суммы и вычисляя пределы, как в случае $S(x)$, видим, что все $s_n c_0^n$ не зависят от μ .

Используя тождество (18), можно выразить коэффициенты s_n через коэффициенты S_n разложения (16), записав их в виде

$$s_n = \sum_{k=0}^{n+1} A_k(S_0, \dots, S_{n+2}, r_0, \dots, r_4) \rho^{(k)}(0), \quad (20)$$

где множители A_k содержат коэффициенты S_i вплоть до порядка $n+2$. Приведем три первых коэффициента для случая, когда в уравнении (10) выбран знак минус:

$$s_0 = \frac{2S_2 \rho(0)}{S_1} + \rho_z(0) = \frac{1}{\sqrt{r_0}}, \quad (21)$$

$$s_1 = \left(\frac{6S_3}{S_1} - \frac{4S_2^2}{S_1^2} \right) \rho(0) + \frac{2S_2}{S_1} \rho_z(0) + \rho_{zz}(0) = \frac{2S_2}{\sqrt{r_0} S_1} - \frac{2r_0 + r_1}{r_0^{3/2}}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \left(\frac{12S_4}{S_1} - \frac{18S_2 S_3}{S_1^2} + \frac{8S_2^3}{S_1^3} \right) \rho(0) + \left(\frac{6S_3}{S_1} - \frac{4S_2^2}{S_1^2} \right) \rho_z(0) + \frac{S_2}{S_1} \rho_{zz}(0) + \frac{1}{2} \rho_{zzz}(0) = \\ &= \dots - \frac{3r_2}{2r_0^{3/2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Несмотря на некоторую громоздкость, эти выражения информативны. Например, именно уравнение для s_0 помогает установить, что r_0 не зависит от μ . Поскольку $s_n c_0^n$ не зависят от μ , уравнения (20), умноженные на c_0^n , дают бесконечный набор уравнений $d(c_0^n s_n)/d\mu = 0$ для шести параметров r_k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, и $c_0 = c_0(x_0)$, от которых зависит преобразование координат. Легко проверить, что уже первые шесть из этих уравнений позволяют доказать, что все параметры не зависят от μ .

Данный вывод можно получить легче и быстрее, если параллельно использовать информацию для другой особой точки $z = 1$. Например, рассматривая в тождестве (18) предел $z \rightarrow 1$, можно сразу заключить, что сумма $\sum r_i = r(1)$ не зависит от μ . Однако здесь мы хотим подчеркнуть, что достаточно рассмотреть лишь одну особую точку. Таким образом, если $r_0 \neq 0$, преобразование координат не зависит от μ . Применяя этот подход, также легко можно показать, что данное свойство сохраняется и в альтернативном случае $r_0 = 0$.

Установив, что преобразование $z(x)$ и, следовательно, функция $\rho(z)$ не зависят от μ , и совершив предельные переходы $E, \mu \rightarrow 0$ в уравнении (6), получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_z}{\rho} \right)_z + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_z}{\rho} \right)^2 = - \left(g - \frac{f_z}{2} - \frac{f^2}{4} \right)_{E, \mu \rightarrow 0}. \quad (24)$$

Видно, что логарифмическая производная ρ_z/ρ не может иметь полюсов, отличных от сингулярностей инварианта $I(z) = g - (f_z/2) - (f^2/4)$. Следовательно, корни полинома $r(z)$ должны совпадать с конечными особыми точками уравнения (3), т.е. с $z = 0$ и $z = 1$, если рассматривается конфлюэнтное уравнение Гойна. Как следует из соотношения (10), функция $\rho(z)$ тогда записывается в виде произведения $z^{m_1}(z-1)^{m_2}$ с целыми или полужелыми показателями m_1 и m_2 .

Заметим, что в случае гипергеометрических уравнений $r(z)$ является полиномом второй степени. Допустимые полиномы для гипергеометрического уравнения и вырожденного гипергеометрического уравнения задаются формулами (12) и (13) соответственно. Только два свободных параметра сохраняются при преобразовании координат: начало координат x_0 и пространственный масштаб σ (заметим, что $\sigma = \sqrt{r_0}$, если $r_0 \neq 0$; $\sigma = \sqrt{r_1}$, если $r_0 = 0$ и $r_1 \neq 0$, и т.д.). Поэтому описанные выше ограничения во всех случаях приводят к пятипараметрическим потенциалам – к шести потенциалам в случае гипергеометрического уравнения и к трем потенциалам в случае вырожденного гипергеометрического уравнения. Для гипергеометрического уравнения в силу симметрии относительно перестановки $z \leftrightarrow 1 - z$ количество независимых потенциалов сокращается до четырех.

Далее мы покажем, что существуют только два гипергеометрических потенциала, которые нельзя преобразовать друг в друга путем подбора участвующих в них параметров. В качестве таких независимых потенциалов могут быть взяты потенциалы Экарта [6] и Пёшля–Теллера [11], которые получаются, например, при выборе $r = r_0$ и $r = r_1 z$ соответственно. В случае вырожденного гипергеометрического уравнения все три допустимых потенциала независимы. Это потенциалы Морзе [5], сумма потенциала гармонического осциллятора и обратно-квадратичного потенциала [4], а также сумма кулоновского и обратно-квадратичного потенциалов (потенциал Кратцера [13]).

3. ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА КОНФЛЮЭНТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ГОЙНА

Согласно вышесказанному допустимые виды не зависящего от E и μ преобразования координат, сводящего уравнение Шредингера к конфлюэнтному уравнению Гойна, задаются формулой

$$z'(x) = \rho = \frac{z^{m_1}(z-1)^{m_2}}{\sigma}, \quad (25)$$

где m_1 и m_2 – целые или полужелые числа, а σ – произвольный масштабный коэффициент. Чтобы согласовать содержащий энергию член E/ρ^2 с левой частью уравнения (6), мы должны взять $z^2(z-1)^2/\rho^2$ в виде полинома по z не выше четвертой степени. Это можно сделать, если $m_1 \leq 1$, $m_2 \leq 1$ и $m_1 + m_2 \geq 0$. В итоге

Рис. 1. Пятнадцать возможных пар (m_1, m_2) .

получаются 15 пар значений (m_1, m_2) (см. рис. 1). Взяв эти пары и далее согласовав содержащий потенциал член $V(z)/\rho^2$ с инвариантом в уравнении (6), мы получаем 15 семипараметрических потенциалов, задаваемых как

$$V(z) = z^{2m_1-2}(z-1)^{2m_2-2}(v_0 + v_1z + v_2z^2 + v_3z^3 + v_4z^4). \quad (26)$$

Некоторые из представленных потенциалов содержат в качестве частных случаев классические гипергеометрические потенциалы. На рис. 1 значения (m_1, m_2) , отвечающие этим случаям, обозначены квадратами. Для значений, отмеченных треугольниками, потенциалы содержат в качестве частных случаев классические потенциалы, интегрируемые в вырожденных гипергеометрических функциях. Имеются также случаи, когда конфлюэнтные потенциалы Гойна включают в качестве частных случаев классические потенциалы обоих гипергеометрических типов. Последним отвечают точки, отмеченные ромбами. Наконец, существуют потенциалы, которые в частных случаях условно интегрируемы в вырожденных гипергеометрических функциях (звездочки на рис. 1).

Заметим, что в силу симметрии относительно перестановки $m_1 \leftrightarrow m_2$ количество независимых потенциалов равно девяти. На рис. 1 эти девять случаев обозначены жирными непрозрачными символами.

Девять независимых конфлюэнтных потенциалов Гойна могут быть записаны в форме, представленной в табл. 1. Для шести из этих потенциалов имеются частные случаи либо гипергеометрического, либо вырожденного гипергеометрического классического потенциала или обоих типов сразу. Эти потенциалы были представлены Ламю и Бозе (см. табл. II в работе [18]). В таблице из работы [18] перечислены десять потенциалов, однако они являются частными случаями упомянутых шести

ТАБЛИЦА 1. Девять независимых семипараметрических конфлюэнтно-гойновских потенциалов.

№	(m_1, m_2)	Потенциал $V(z)$	Преобразование $z(x)$ или $x(z)$	Частный потенциал
1	$(0, 0)$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2} + \frac{V_3}{z-1} + \frac{V_4}{(z-1)^2}$	$z = \frac{x-x_0}{\sigma}$	${}_1F_1(z)$ [4]
2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + \frac{V_3}{z} + \frac{V_4}{z-1}$	$z = \text{ch}^2 \frac{x-x_0}{2\sigma}$	${}_2F_1(z)$ [11]
3	$(\frac{1}{2}, 0)$	$V_0 + V_1 z + \frac{V_2}{z} + \frac{V_3}{z-1} + \frac{V_4}{(z-1)^2}$	$z = \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}$	${}_1F_1(z)$ [4]
4	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z-1} + \frac{V_3}{(z-1)^2} + \frac{V_4}{(z-1)^3}$	$x = x_0 + \sigma(\sqrt{z(z-1)} - \text{sh}^{-1} \sqrt{z-1})$	—
5	$(1, 1)$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3 + V_4 z^4$	$z = \frac{1}{e^{(x-x_0)/\sigma} + 1}$	${}_2F_1(z)$ [6]
6	$(1, \frac{1}{2})$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3 + \frac{V_4}{z-1}$	$z = \sec^2 \frac{x-x_0}{2\sigma}$	${}_2F_1(z)$ [11]
7	$(1, 0)$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + \frac{V_3}{z-1} + \frac{V_4}{(z-1)^2}$	$z = e^{(x-x_0)/\sigma}$	${}_1F_1(z)$ [5], ${}_2F_1(z)$ [6]
8	$(1, -\frac{1}{2})$	$V_0 + V_1 z + \frac{V_2}{z-1} + \frac{V_3}{(z-1)^2} + \frac{V_4}{(z-1)^3}$	$x = x_0 + \sigma(2\sqrt{z-1} - 2 \text{tg}^{-1} \sqrt{z-1})$	—
9	$(1, -1)$	$V_0 + \frac{V_1}{z-1} + \frac{V_2}{(z-1)^2} + \frac{V_3}{(z-1)^3} + \frac{V_4}{(z-1)^4}$	$x = x_0 + \sigma(z - \ln z)$ $z = -W(e^{-(x-x_0)/\sigma})$	—

конфлюэнтных потенциалов Гойна: в первых трех строках представлены потенциалы, отвечающие $(m_1, m_2) = (0, 0)$, $(m_1, m_2) = (1/2, 0)$ и $(m_1, m_2) = (1, 0)$; четвертая и пятая строки относятся к случаю $(m_1, m_2) = (1/2, 1/2)$; шестая и седьмая строки задают потенциал с $(m_1, m_2) = (1/2, 1)$, а последние три строки описывают потенциал с $(m_1, m_2) = (1, 1)$. Некоторые негипергеометрические случаи из числа этих шести потенциалов рассматривались многими авторами и в различных задачах, например при исследовании кулоновской задачи с двумя центрами [2], [3] или уравнения Теукольского [19].

Оставшиеся три независимых потенциала, которые отмечены на рис. 1 черными звездочками, имеют как частные случаи пятипараметрические потенциалы, которые условно интегрируемы в вырожденных гипергеометрических функциях [20], [21]. Один из потенциалов с показателями $(m_1, m_2) = (1, -1)$ выражается через функцию Ламберта, которая является неявно задаваемой элементарной функцией [15]. Примечательно, что в свою очередь здесь имеется частный четырехпараметриче-

ский случай, который точно интегрируется в вырожденных гипергеометрических функциях [21].

Для всех пятнадцати представленных потенциалов решение стационарного уравнения Шредингера (1) выражается явно через конфлюэнтную функцию Гойна:

$$\psi = e^{\alpha_0 z} z^{\alpha_1} (z - 1)^{\alpha_2} H_c(\gamma, \delta, \varepsilon; \alpha, q; z). \quad (27)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4) и группируя коэффициенты при степенях z , получим восемь уравнений, которые линейны по пяти параметрам $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha, q$ конфлюэнтной функции Гойна H_c и квадратичны по трем параметрам $\alpha_k, k = 0, 1, 2$, сомножителей. Решив эти уравнения, получим

$$\gamma = 2\alpha_1 + m_1, \quad \delta = 2\alpha_2 + m_2, \quad \varepsilon = 2\alpha_0, \quad (28)$$

$$\alpha = \alpha_0(2(-\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + m_1 + m_2) + \frac{2m}{\hbar^2}(Er_3 - v_3), \quad (29)$$

$$q = (2\alpha_1 + m_1)(\alpha_0 - \alpha_2) - m_2\alpha_1 + \frac{2m}{\hbar^2}(E(2r_0 + r_1) - (2v_0 + v_1)) \quad (30)$$

и

$$\alpha_0^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(Er_4 - v_4) = 0, \quad (31)$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_1(m_1 - 1) + \frac{2m}{\hbar^2}(Er_0 - v_0) = 0, \quad (32)$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_2(m_2 - 1) + \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{n=0}^4 (Er_n - v_n) = 0, \quad (33)$$

где вспомогательные параметры $v_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$, вычисляются для каждого случая исходя из определения (26), а параметры $r_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$, определяются уравнением

$$\frac{z^2(z-1)^2}{\rho^2} = \sigma^2 z^{2-2m_1} (z-1)^{2-2m_2} = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + r_3 z^3 + r_4 z^4. \quad (34)$$

Таким образом, для любой строки табл. 1 мы имеем потенциал, заданный, как правило, параметрически парой функций $V(z), x(z)$. Для $z \in [0, 1]$ преобразование координат $x(z)$, определяемое уравнением (25), можно, вообще говоря, выразить через неполную бета-функцию:

$$x = x_0 + (-1)^{-m_2} \sigma B_z(1 - m_1, 1 - m_2). \quad (35)$$

Однако, благодаря тому что параметры m_1, m_2 являются целыми или полуцелыми числами, бета-функции сводятся к элементарным функциям. Эти функции или соответствующие им обратные преобразования $z(x)$ представлены в четвертом столбце табл. 1 (заметим, что, поскольку единственным требованием является вещественность итоговой функции $V(x)$, константа интегрирования x_0 и масштабный коэффициент σ могут быть комплексными). Отметим, что если мы имеем частные случаи классических гипергеометрических потенциалов, то обратное преобразование $z(x)$ представляется в элементарных функциях.

Рис. 2. Потенциал (37) для значений $(V_1, V_2, V_3, V_4) = (10, -10, 7, 1)$, $\sigma = 100$ (и $x_0 = -\sigma$). На вставке график преобразования координат (38).

Особым является случай $(m_1, m_2) = (1, 0)$, для которого $z = e^{(x-x_0)/\sigma}$, поскольку для него конфлюэнтный потенциал Гойна представляется в виде суммы вырожденного гипергеометрического потенциала Морзе [5] и гипергеометрического потенциала Эккарта [6]:

$$V(x) = V_0 + V_1 e^{(x-x_0)/\sigma} + V_2 e^{2(x-x_0)/\sigma} + \frac{V_3}{e^{(x-x_0)/\sigma} - 1} + \frac{V_4}{(e^{(x-x_0)/\sigma} - 1)^2}. \quad (36)$$

Потенциалы Розена–Морзе [7], Вудса–Саксона [8], Меннинга–Розена [9] и Хюльте–на [10] являются частными случаями потенциала Эккарта (чтобы получить потенциалы Эккарта, Розена–Морзе и Вудса–Саксона, следует применить комплексную подстановку $x_0 = x_1 + i\pi\sigma$).

Для трех значений (m_1, m_2) из правого нижнего квадранта на рис. 1 не существует классических гипергеометрических потенциалов. Отметим потенциал, отвечающий $(m_1, m_2) = (1, -1)$:

$$V(z) = V_0 + \frac{V_1}{z-1} + \frac{V_2}{(z-1)^2} + \frac{V_3}{(z-1)^3} + \frac{V_4}{(z-1)^4}, \quad (37)$$

для которого преобразование $z(x)$ задается W -функцией Ламберта [15],

$$z(x) = -W(-e^{-(x-x_0)/\sigma}). \quad (38)$$

При $x_0 = -\sigma$, $\sigma > 0$, данное преобразование приводит к потенциалу, определенному на положительной полуоси $x > 0$, единственная особая точка которого находится в начале координат и который стремится к $V_\infty = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + V_4$ на бесконечности (см. рис. 2). Поведение потенциала в бесконечности задается формулой

$$V|_{x \rightarrow +\infty} = V_\infty - A e^{-(x+\sigma)/\sigma} + \dots, \quad A = V_1 - 2V_2 + 3V_3 - 4V_4, \quad (39)$$

а в окрестности начала координат отвечает разложению

$$V|_{x \rightarrow 0} = \frac{V_4}{4x^2} + \frac{4V_4 - 3V_3}{6\sqrt{2}x^{3/2}} + \frac{V_2 - V_3 + V_4}{2x} + \frac{d_{-1}}{\sqrt{x}} + d_0 + d_1\sqrt{x} + \dots \quad (40)$$

Некоторые частные случаи потенциала (37) допускают решение в более простых математических функциях. Например, для потенциала с $V_2 = V_3 = V_4 = 0$ [21] и для условно интегрируемого потенциала с $V_3 = -\hbar^2/2m\sigma^2$, $V_4 = 3V_3/4$ решение уравнения Шредингера представляется в явном виде с помощью вырожденных гипергеометрических функций (см. ниже).

4. КЛАССИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Классические гипергеометрические потенциалы. Конфлюэнтное уравнение Гойна сводится к гипергеометрическому уравнению, если $\varepsilon = \alpha = 0$. Как следует из соотношений (28), (29) и (31), в данном случае $r_3 = r_4 = 0$ и $v_3 = v_4 = 0$, так что полиномы четвертой степени $r(z)$ и $v(z)$ в правых частях уравнений (34) и (26) становятся полиномами второй степени. Из уравнения (34) следует, что m_1 и m_2 удовлетворяют неравенству $m_1 + m_2 \geq 1$. Поэтому гипергеометрические потенциалы существуют для шести точек (m_1, m_2) , замыкающих верхний правый угол на рис. 1. Это классические пятипараметрические гипергеометрические случаи, описанные Бозе [16]. Потенциалы и соответствующие преобразования $z = z(x)$ (с примерами действительных и комплексных параметров x_0 , σ) представлены в табл. 2. Фактически лишь два из этих потенциалов независимы; остальные получаются из них путем задания надлежащих значений параметров. В качестве таких независимых потенциалов можно выбрать потенциалы Эккарта [6] и Пёшля–Теллера [11].

Классические вырожденные гипергеометрические потенциалы. Конфлюэнтное уравнение Гойна сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, если $\delta = 0$ и $q = \alpha$ или если $\gamma = 0$ и $q = 0$. В связи с симметрией уравнения относительно перестановки $z \leftrightarrow z - 1$ эти две возможности эквивалентны, хотя вторая из них легче для рассмотрения.

Действительно, пусть $\gamma = q = 0$. При $m_1 = 0$ мы легко получаем классические вырожденные гипергеометрические потенциалы. Прежде всего, из соотношений (28), (30) и (32) сразу видно, что $r_0 = r_1 = 0$ и $v_0 = v_1 = 0$, так что число исходных параметров задачи в этом случае сокращается на два. Получающиеся в результате три независимых потенциала, которые также можно получить, если положить $m_2 = 0$ и $m_1 = 0, 1/2, 1$ (см. табл. 2), образуют набор из трех классических пятипараметрических вырожденных гипергеометрических потенциалов: суммы кулоновского и центробежного потенциалов [13], суммы потенциала гармонического осциллятора и обратно-квадратичного потенциала [4], а также потенциала Морзе [5].

Условно интегрируемые вырожденные гипергеометрические потенциалы. Рассматривая случай, когда $\delta = 0$ и $q = \alpha$, при $m_2 \neq 0$ и случай $\gamma = q = 0$ при $m_1 \neq 0$, мы получаем шесть условно интегрируемых потенциалов (эти случаи отвечают значениям (m_1, m_2) , отмеченным звездочками на рис. 1). При этом некоторые из параметров потенциала не являются независимыми или имеют определенные значения и фиксированы. Только три из условно интегрируемых потенциалов независимы. Они представлены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 2. Классические гипергеометрические потенциалы. Номер в первом столбце обозначает номер независимого потенциала Гойна, к которому относится данный классический гипергеометрический потенциал.

№	(m_1, m_2)	Потенциал $V(z)$	$z(x)$	Ссылки
Классические гипергеометрические потенциалы				
	$(0, 1)$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2}$	$z = 1 - e^{(x-x_1)/\sigma},$ $x_0 = x_1 + i\pi\sigma;$ $z = 1 + e^{(x-x_0)/\sigma}$	Хюльтена [10] ($V_2 = 0$), Меннинга–Розена [9]; Вудса–Саксона [8] ($V_2 = 0$), Розена–Морзе [7], Эккарта [6]
	$(\frac{1}{2}, 1)$	$V_0 + V_1 z + \frac{V_2}{z}$	$z = \operatorname{th}^2 \frac{x-x_0}{2\sigma};$ $z = -\operatorname{tg}^2 \frac{x-x_0}{2\sigma_0},$ $\sigma = i\sigma_0$	Гиперболический Пёшля–Теллера [11]; тригонометрический Пёшля–Теллера [11], Скарфа [12] ($V_1 = 0, V_1 = V_2$)
2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z-1}$	$z = \operatorname{ch}^2 \frac{x-x_0}{2\sigma};$ $z = \cos^2 \frac{x-x_0}{2\sigma_0},$ $\sigma = i\sigma_0$	Гиперболический Пёшля–Теллера [11]; тригонометрический Пёшля–Теллера [11], Скарфа [12] ($V_1 = 0, V_1 = V_2$)
5	$(1, 1)$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2$	$z = \frac{1}{1+e^{(x-x_0)/\sigma}};$ $z = \frac{1}{1-e^{(x-x_1)/\sigma}},$ $x_0 = x_1 + i\pi\sigma$	Эккарта [6], Розена–Морзе [7], Вудса–Саксона [8] ($V_2 = 0$); Меннинга–Розена [9], Хюльтена [10] ($V_2 = 0$)
6	$(1, \frac{1}{2})$	$V_0 + V_1 z + \frac{V_2}{z-1}$	$z = \cos^{-2} \frac{x-x_0}{2\sigma};$ $z = \operatorname{ch}^{-2} \frac{x-x_0}{2\sigma_0},$ $\sigma = i\sigma_0$	Тригонометрический Пёшля–Теллера [11], Скарфа [12] ($V_1 = 0, V_1 = V_2$); гиперболический Пёшля–Теллера [11]
7	$(1, 0)$	$V_0 + \frac{V_1}{z-1} + \frac{V_2}{(z-1)^2}$	$z = e^{(x-x_0)/\sigma};$ $z = -e^{(x-x_1)/\sigma},$ $x_0 = x_1 + i\pi\sigma$	Меннинга–Розена [9], Хюльтена [10] ($V_2 = 0$); Вудса–Саксона [8] ($V_2 = 0$), Розена–Морзе [7], Эккарта [6]
Классические вырожденные гипергеометрические потенциалы				
1	$(0, 0)$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z^2}$	$z = \frac{x-x_0}{\sigma}$	Кулона [4] ($V_2 = 0$), центробежный [4] ($V_1 = 0$), Кратцера [13]
3	$(\frac{1}{2}, 0)$	$V_0 + V_1 z + \frac{V_2}{z}$	$z = \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}$	Гармонического осцилля- тора [4] ($V_2 = 0$), центробежный [4] ($V_1 = 0$)
7	$(1, 0)$	$V_0 + V_1 z + V_2 z^2$	$z = e^{(x-x_0)/\sigma}$	Морзе [5]

ТАБЛИЦА 3. Независимые условно интегрируемые вырожденные гипергеометрические потенциалы.

№	(m_1, m_2)	Потенциал $V(z)$	Преобразование $x(z)$	Ограничения
4	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$V_0 + \frac{V_1}{z} + \frac{V_2}{z-1} + \frac{V_3}{(z-1)^2} + \frac{V_4}{(z-1)^3}$	$x = x_0 + \sigma(\sqrt{z(z-1)} - \text{sh}^{-1}\sqrt{z-1})$	$V_3 = \frac{-3\hbar^2}{32m\sigma^2},$ $V_4 = \frac{5V_3}{3}$
8	$(1, -\frac{1}{2})$	$V_0 + V_1z + \frac{V_2}{z-1} + \frac{V_3}{(z-1)^2} + \frac{V_4}{(z-1)^3}$	$x = x_0 + \sigma(2\sqrt{z-1} - 2\text{tg}^{-1}\sqrt{z-1})$	$V_3 = \frac{-3\hbar^2}{16m\sigma^2},$ $V_4 = \frac{5V_3}{6}$
9	$(1, -1)$	$V_0 + \frac{V_1}{z-1} + \frac{V_2}{(z-1)^2} + \frac{V_3}{(z-1)^3} + \frac{V_4}{(z-1)^4}$	$x = x_0 + \sigma(z - \ln z),$ $z(x) = -W(-e^{-(x-x_0)/\sigma})$	$V_3 = \frac{-\hbar^2}{2m\sigma^2},$ $V_4 = \frac{3V_3}{4}$

В качестве примера явных решений рассмотрим следующий условно интегрируемый потенциал, относящийся к потенциалу типа Гойна с W -функцией Ламберта, для которого $(m_1, m_2) = (1, -1)$:

$$V = V_0 + \frac{V_1}{z-1} + \frac{V_2}{(z-1)^2} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} \left(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{3/4}{(z-1)^4} \right), \quad (41)$$

$$z = -W(-e^{-(x-x_0)/\sigma}).$$

Можно непосредственно проверить, что общее решение уравнения Шредингера для данного потенциала записывается в явном виде с помощью вырожденных гипергеометрических функций:

$$\psi = e^{\alpha_0 z} z^{\alpha_1} (z-1)^{1/2} (c_1 \cdot {}_1F_1(a; 1+2\alpha_1; -2\alpha_0 z) + c_2 \cdot U(a; 1+2\alpha_1; -2\alpha_0 z)), \quad (42)$$

где

$$\alpha_0 = \sigma \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}, \quad \alpha_1 = \sigma \sqrt{\frac{2m(V_0 - V_1 + V_2 - E)}{\hbar^2} + \frac{1}{4\sigma^2}} \quad (43)$$

и

$$a = \frac{1}{2} - \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{4m\sigma^4}{\alpha_0 \hbar^2} \left(V_0 - \frac{V_1}{4} - E \right). \quad (44)$$

Решение для симметричного аналога потенциала (41) при $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ было ранее представлено Уильямсом [20].

В завершение этого раздела мы хотели бы отметить, что можно указать множество других условно интегрируемых частных случаев для представленных выше конфлюэнтных потенциалов Гойна, однако эти решения имеют иную структуру, которая не связана с рассмотренным в настоящей статье анзацем $\psi = \phi(z)u(z)$, где $u(z)$ – функция Гойна. Например, имеются потенциалы, для которых решение записывается в виде комбинаций гипергеометрических функций [21], [22].

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Имеется множество работ, в которых изучается проблема сведения уравнения Шредингера к уравнениям класса Гойна (см., например, труды [1], [2] [18]–[25] и ссылки в них). Большое количество примеров потенциалов, особенно сводящихся к многократно конфлюэнтным уравнениям Гойна, приведены в книгах [1], [2]. В работе Ламе и Бозе [18] дан систематический анализ этого вопроса для всех пяти уравнений Гойна; и все же эта работа охватывает лишь случаи, когда преобразование координат допускает явную запись в элементарных функциях. В недавно вышедшей работе [25] представлено более общее рассмотрение потенциалов Гойна, но вопрос определения вида потенциалов не рассматривался.

Распад общего потенциала на ограниченное множество отдельных потенциалов с меньшим числом непрерывных параметров был ранее отмечен рядом авторов. К примеру, в работе [26] показано, что подобное явление неизбежно происходит, если потенциал пропорционален некоторому не зависящему от энергии параметру μ . Однако в указанной работе рассмотрение ограничивается случаем двух гипергеометрических уравнений и, что важнее, базируется на априорном предположении о независимости координатного преобразования от μ .

Основной результат настоящей работы заключается в утверждении, что независимость преобразования координат $z(x)$ от параметра μ является необходимой для любого уравнения, имеющего особенность в конечной точке комплексной z -плоскости при условии, что область изменения новой независимой переменной z включает окрестность этой особой точки.

Рассматривая пример конфлюэнтного уравнения Гойна, мы показали, что имеются пятнадцать вариантов преобразования координат, каждый из которых приводит к семипараметрическому потенциалу. Заметим, что эта ситуация аналогична той, которая встречается при решении квантовой двухуровневой задачи, где наблюдается сходная картина – возникновение специфических моделей, связанных с конфлюэнтным уравнением Гойна [27]. Однако в нашем случае механизм иной. Распад множества аналитически интегрируемых конфигураций полей на дискретное множество частных семипараметрических моделей является следствием комплексного описания физических взаимодействий, что характерно для лазерной физики.

Из-за симметрии конфлюэнтного уравнения Гойна относительно преобразования $z \longleftrightarrow 1 - z$ только девять потенциалов являются независимыми. Три из этих независимых потенциалов представляют собой различные обобщения классических гипергеометрических потенциалов Эккарта или Пёшля–Теллера, два других потенциала обобщают потенциал осциллятора и кулоновский вырожденный гипергеометрический потенциал, а один из потенциалов является суммой двух потенциалов – вырожденного гипергеометрического потенциала Морзе и гипергеометрического потенциала Эккарта. У трех оставшихся независимых потенциалов имеются лишь частные случаи условно интегрируемых вырожденных гипергеометрических потенциалов. Мы представили явное решение для одного из таких потенциалов, который относится к классу потенциалов конфлюэнтного уравнения Гойна с W -функцией Ламберта.

Существуют другие точно решаемые (см., например, статьи [21], [22]) или условно интегрируемые частные случаи представленных конфлюэнтных потенциалов Гойна, для которых решение выписывается в более простых специальных функциях. Однако эти решения имеют иную структуру. Например, существуют потенциалы,

для которых каждое из двух фундаментальных решений уравнения Шредингера записывается в виде комбинаций гипергеометрических функций (см. примеры в работах [21], [22], [28]–[34]). Несколько подобных потенциалов можно получить, применяя деформированные уравнения Гойна [35]. Мы намерены представить анализ таких потенциалов в следующей публикации.

Список литературы

- [1] A. Ronveaux (ed.), *Heun's Differential Equations*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [2] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе сингулярностей*, Невский диалект, СПб., 2002.
- [3] И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, М., 1976.
- [4] E. Schrödinger, *Ann. Phys.*, **384**:4 (1926), 361–376.
- [5] P. M. Morse, *Phys. Rev.*, **34**:1 (1929), 57–64.
- [6] C. Eckart, *Phys. Rev.*, **35**:11 (1930), 1303–1309.
- [7] N. Rosen, P. M. Morse, *Phys. Rev.*, **42**:2 (1932), 210–217.
- [8] R. D. Woods, D. S. Saxon, *Phys. Rev.*, **95**:2 (1954), 577–578.
- [9] M. F. Manning, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **44**:11 (1933), 953.
- [10] L. Hulthén, *Ark. Mat. Astr. Fys. A*, **28**:5 (1942), 1–12; **29**:1 (1942), 1–11.
- [11] G. Pöschl, E. Teller, *Z. Phys. A: Hadrons and Nuclei*, **83**:3–4 (1933), 143–151.
- [12] F. Scarf, *Phys. Rev.*, **112**:4 (1958), 1137–1140.
- [13] A. Kratzer, *Z. Phys.*, **3**:5 (1920), 289–307.
- [14] J. H. Lambert, *Acta Helvetica*, **3** (1758), 128–168.
- [15] L. Euler, *Acta Acad. Scient. Petropol.*, **2** (1783), 29–51.
- [16] A. K. Bose, *Phys. Lett.*, **7**:4 (1963), 245–246.
- [17] Г. А. Натанзон, *ТМФ*, **38**:2 (1979), 219–229.
- [18] A. Lemieux, A. K. Bose, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N. S.)*, **10**:4 (1969), 259–270.
- [19] E. W. Leaver, *J. Math. Phys.*, **27**:5 (1986), 1238–1265.
- [20] B. W. Williams, *Phys. Lett. A*, **334**:2–3 (2005), 117–122.
- [21] A. M. Ishkhanyan, *Phys. Lett. A*, **380**:5–6 (2016), 640–644, arXiv:1509.00846.
- [22] A. M. Ishkhanyan, *Eur. Phys. Lett.*, **112**:1 (2015), 10006.
- [23] M. F. Manning, *Phys. Rev.*, **48**:2 (1935), 161–164.
- [24] L. J. El-Jaick, B. D. B. Figueiredo, *J. Math. Phys.*, **49**:8 (2008), 083508, 28 pp.
- [25] D. Batic, R. Williams, M. Nowakowski, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:24 (2013), 245204, 21 pp.
- [26] А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко, В. Н. Могилевич, *ТМФ*, **88**:1 (1991), 59–65.
- [27] A. M. Ishkhanyan, A. E. Grigoryan, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:46 (2014), 465205, 22 pp.
- [28] C. Quesne, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:39 (2008), 392001, 6 pp.
- [29] S. Odake, R. Sasaki, *Phys. Lett. B*, **679**:4 (2009), 414–417, arXiv:0906.0142.
- [30] A. M. Ishkhanyan, T. A. Shahverdyan, T. A. Ishkhanyan, *Eur. Phys. J. D*, **69**:1 (2015), 10, 14 pp., arXiv:1404.3922.
- [31] T. A. Shahverdyan, T. A. Ishkhanyan, A. E. Grigoryan, A. M. Ishkhanyan, *J. Contemp. Phys. (Armenian Acad. Sci.)*, **50**:3 (2015), 211–226, arXiv:1412.1378.
- [32] G. Junker, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **232**:3–4 (1997), 155–161.
- [33] G. Lévai, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **264**:2–3 (1999), 117–123, arXiv:quant-ph/9909004.
- [34] A. Sinha, G. Lévai, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **322**:1–2 (2004), 78–83.
- [35] А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **179**:2 (2014), 189–195.

Поступила в редакцию 12.08.2015,
после доработки 23.10.2015