Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Л. Курнявко, И. В. Широков, Построение инвариантов коприсоединенного представления групп Ли методами линейной алгебры, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 3–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:09:53

© 2016 г.

О. Л. Курнявко*, И. В. Широков*[†]

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Предложен метод получения инвариантов коприсоединенного представления групп Ли, который сводит данную задачу к известным задачам линейной алгебры. В основе данного метода лежит переход к симплектическим координатам на орбитах коприсоединенного представления, которые играют роль локальных координат на данных орбитах, а соответствующие функции перехода являются их параметрическими уравнениями. Исключая в функциях перехода симплектические координаты, можно получить полный набор инвариантов. Предложенный метод позволяет решать задачу построения инвариантов коприсоединенного представления для групп Ли произвольной размерности и структуры.

Ключевые слова: инварианты, коприсоединенное представление, группа Ли, алгебра Ли, поляризация, симплектические координаты.

DOI: 10.4213/tmf9025

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Впервые инвариантные функции коприсоединенного представления появились в 1931 году в работах Казимира [1], в связи с этим в наше время они носят его имя – функции Казимира. Важность изучения инвариантов коприсоединенного представления обусловлена многими важными приложениями в математике и физике. В частности, нахождение функций Казимира является существенным этапом исследования вполне интегрируемых гамильтоновых систем, которые могут рассматриваться как классические системы на орбитах коприсоединенного представления [2], [3].

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-07-00272), а также Министерством образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере научной деятельности (проект № 3107).

*Омский институт водного транспорта, Омск, Россия.
E-mail: kurnyavko@mail.ru, iv_shirokov@mail.ru

[†]Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Задача построения инвариантов коприсоединенного представления для полупростых алгебр Ли в основном была решена в работах [1], [4], [5]. Инварианты классических алгебр Ли были получены в работах [6]–[8]. Для неполупростых алгебр Ли до настоящего момента в общем случае задача не была решена. Основные результаты относятся к многочисленным специальным случаям (см., например, [9]). Важный результат был получен для случая разрешимых алгебр Ли произвольной размерности; в работе [10] на основе метода подвижного репера был получен алгебраический алгоритм построения инвариантов коприсоединенного представления. Также отметим работы [11], [12], посвященные проблеме построения представлений групп Ли и отчасти связанные с задачами, обсуждаемыми в настоящей статье.

Несмотря на существенные результаты, полученные в последние десять лет, до настоящего времени общий алгоритм построения инвариантов коприсоединенного представления, пригодный для произвольных алгебр Ли, отсутствует. В настоящей работе предлагается общий метод построения инвариантов коприсоединенного представления. Более того, данную задачу авторам удалось решить исключительно методами линейной алгебры.

1.2. Пусть G – вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G и пусть данная группа действует сама на себе внутренними автоморфизмами вида

$$G \rightarrow G, \quad x \rightarrow x' = g x g^{-1} \equiv S_g(x), \quad x, g \in G,$$

тогда дифференциал данного действия задает в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ отображение

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad X \rightarrow Y = \text{Ad}_g X, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (1)$$

называемое *присоединенным представлением группы Ли G* , где

$$\text{Ad}_g X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g x(t) g^{-1}, \quad X = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0},$$

а $x = x(t)$ – произвольная траектория в группе Ли G , проходящая через ее единицу.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{g}^*$ (коалгебру), для которого определено спаривание с алгеброй $\mathfrak{g}$, т. е.

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, X \rightarrow \alpha = \langle f, X \rangle \equiv f(X), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f \in \mathfrak{g}^*, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

тогда действию (1) присоединенного представления группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует действие данной группы в $\mathfrak{g}^*$

$$G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*: \quad (g, f) \rightarrow h \equiv \text{Ad}_g^* f, \quad g \in G, \quad f, h \in \mathfrak{g}^*, \quad X \in \mathfrak{g},$$

определяемое как

$$\langle \text{Ad}_g^* f, X \rangle = \langle f, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle,$$

которое называется *коприсоединенным представлением группы Ли G* . Последнее равенство также иногда будем записывать в виде $(\text{Ad}_g^* f)(X) = f(\text{Ad}_{g^{-1}} X)$. Нетрудно получить, что $(\text{Ad}_g^* f)_i = (\text{Ad}_{g^{-1}})_i^j f_j$, где $i = \overline{1, \dim \mathfrak{g}^*}$.

1.3. Рассмотрим пространство $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ гладких функций на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, которые понимаются как функции координат f_i элементов данной коалгебры в некотором базисе, т. е. $f = f_i e^i$, где $\mathfrak{g}^* = \{e^i\}$, $i = \overline{1, \dim \mathfrak{g}^*}$. Тогда действие коприсоединенного представления $f \rightarrow \bar{f} = \text{Ad}_g^*[f]$ индуцирует преобразование в пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$:

$$\psi(f) \rightarrow \bar{\psi}_g(f) = \psi(\text{Ad}_g^* f), \quad \psi(f), \bar{\psi}(f) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \quad (2)$$

Функция $\psi(f) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ такая, что

$$\psi(\text{Ad}_g^* f) = \psi(f), \quad g \in G, \quad f \in \mathfrak{g}^*, \quad (3)$$

называется *инвариантом коприсоединенного представления группы Ли G или функцией Казимира*. Дифференцируя последнее равенство в единице группы, можно получить выражения для генераторов коприсоединенного представления:

$$Y_i = C_{ij}(f) \frac{\partial}{\partial f_j}, \quad C_{ij}(f) = -C_{ij}^k f_k.$$

Тогда инфинитезимальное условие инвариантности имеет вид $Y_i[\psi(f)] = 0$, т. е.

$$C_{ij}(f) \frac{\partial \psi(f)}{\partial f_j} = 0. \quad (4)$$

Число независимых функций Казимира определяется рангом матрицы $C_{ij}(f)$ и называется *индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$* :

$$\text{ind } \mathfrak{g} = n - \sup_{f \in \mathfrak{g}^*} \text{rank } C_{ij}(f),$$

а учитывая, что для произвольной точки $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ значение $\text{rank } C_{ij}(f)|_{f=\lambda} = \dim O_\lambda$, где O_λ – орбита точки λ , получим

$$\text{ind } \mathfrak{g} = n - \sup_{f \in \mathfrak{g}^*} \dim O_\lambda.$$

1.4. Построение инвариантов коприсоединенного представления состоит в решении системы (4), однако в связи с отсутствием общего метода интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных в общем случае эта задача может быть весьма трудоемкой. В связи с этим ниже будет рассмотрен метод получения инвариантов, не связанный с необходимостью непосредственного решения системы (4).

1.5. В заключение рассмотрим важный с точки зрения дальнейшего изложения вопрос о параметризации орбит коприсоединенного представления. Всякая орбита O_λ коприсоединенного представления является поверхностью уровня функций Казимира $\psi_\mu(f)$, т. е.

$$\psi_\mu(f) = \omega_\mu, \quad \omega_\mu = \psi_\mu(\lambda), \quad \lambda \in O_\lambda, \quad \mu = \overline{1, \text{ind } \mathfrak{g}}.$$

Таким образом, каждая орбита определяется набором из $\text{ind } \mathfrak{g}$ чисел $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\text{ind } \mathfrak{g}})$, который в свою очередь определяется выбором ковектора λ такого, что

$\text{rank } C_{ij}(\lambda)$ имеет максимально возможное значение. При этом $\omega_\alpha = \psi_\alpha(\lambda_1) = \psi_\alpha(\lambda_2)$, где $\lambda_{1,2} \in O_\lambda$. В связи с этим целесообразно ввести параметризацию $\lambda(j)$ орбит O_λ , где $j = (j_1, j_2, \dots, j_{\text{ind } \mathfrak{g}})$ – это набор чисел такой, что различным наборам параметров j соответствуют ковекторы λ , принадлежащие различным орбитам O_λ . Следовательно, данная параметризация может быть определена из условия

$$\psi_\mu(\lambda(j)) = \omega_\mu(j), \quad \det \frac{\partial \omega_\mu(j)}{\partial j} \neq 0. \quad (5)$$

Очевидно, что левую часть последнего неравенства можно переписать в виде

$$\det \frac{\partial \omega_\mu(j)}{\partial j_\alpha} = \det \frac{\partial \psi_\mu}{\partial f_i} \frac{\partial f_i(j)}{\partial j_\alpha} \Big|_{f=\lambda(j)} = \det X_\mu^i \frac{\partial f_i(j)}{\partial j_\alpha},$$

где X_μ^i – компоненты векторов, образующих базис аннулятора ковектора $\lambda(j)$. Можно показать, что параметризацию $\lambda(j)$ можно выбирать линейным образом, т.е. $\lambda_i(j) = a_i^\alpha j_\alpha$, тогда неравенство (5) примет вид

$$\det X_\mu^i(\lambda(j)) a_i^\alpha \neq 0. \quad (6)$$

Поскольку построение аннулятора является элементарной задачей линейной алгебры, неравенство (6) позволяет выбрать набор параметров a_i^α , обеспечивающих искомую параметризацию.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ

2.1. Одним из важных этапов реализации метода построения инвариантов присоединенного представления, которому посвящена данная статья, является построение поляризации алгебры Ли относительно некоторого ковектора. Построение поляризации является известной алгебраической задачей, однако при ее решении могут возникать вопросы, которые обычно не рассматриваются исследователями. Так как целью настоящей статьи является разработка законченного алгоритма построения инвариантов, частью которого является нахождение поляризации, мы напомним некоторые важные определения и теоремы, связанные с данным понятием, а также сформулируем ряд полезных утверждений, которые позволяют эффективно решать данную задачу.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – соответствующая ей коалгебра, а $B_\lambda(X, Y)$ – кососимметричная форма на $\mathfrak{g}$, определяемая выражением

$$B_\lambda(X, Y) = \langle \lambda, [X, Y] \rangle, \quad (7)$$

которая в координатах имеет вид

$$B_\lambda(X, Y) = B_{ij} X^i Y^j, \quad B_{ij} = C_{ij}^k \lambda_k \equiv C_{ij}(\lambda).$$

Ядро формы $B_\lambda(X, Y)$, определяемое как

$$\text{Ker } B_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid B_\lambda(X, \mathfrak{g}) = 0\} \equiv \mathfrak{g}^\lambda, \quad (8)$$

совпадает с аннулятором $\mathfrak{g}^\lambda$ ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.

Подалгебра $\mathfrak{h}$ такая, что

$$B_\lambda(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) = 0, \quad (9)$$

называется *подчиненной ковектору* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Подалгебра $\mathfrak{h}$, подчиненная ковектору $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, которая имеет максимально возможную размерность, т.е. $\dim \mathfrak{h} = (\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^\lambda)/2$, называется *поляризацией алгебры $\mathfrak{g}$ относительно ковектора λ* или просто *поляризацией ковектора (функционала) λ* . В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathfrak{h} \equiv \mathcal{P}(\mathfrak{g})$. Задача построения поляризации в значительной мере сводится к использованию соответствующих теорем (см., например, [13]) для случая алгебр Ли, являющихся либо полупростыми, либо разрешимыми, либо неразрешимыми, для которых известна поляризация ортогонального дополнения к ее радикалу.

2.2. Рассмотрим задачу построения поляризации полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно невырожденного ковектора λ . Напомним некоторые определения. $X \in \mathfrak{g}$ называется *невырожденным вектором* в $\mathfrak{g}$, если характеристическое уравнение $\det(\text{ad}_X - It) = 0$ имеет минимально возможное количество нулей. Величина $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется *невырожденным ковектором* в $\mathfrak{g}^*$, если скобка Ли–Пуассона на данной коалгебре является невырожденной в данной точке λ , т.е. ранг $C_{ij}(\lambda)$ имеет максимально возможное значение. Всякому вектору $X \in \mathfrak{g}$ соответствует подалгебра $\text{Ann } X$ элементов $Z \in \mathfrak{g}$, коммутирующих с ним, называемая *аннулятором вектора X* , т.е. $[X, Z] = 0$, а всякому ковектору $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ соответствует подалгебра $\text{Ann } \lambda$, определяемая условием $\text{Ann } \lambda = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \langle \lambda, [Y, \mathfrak{g}] \rangle = 0\}$ и называемая *аннулятором ковектора λ* .

Существование формы Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$ дает возможность поставить в соответствие всякому вектору $X \in \mathfrak{g}$ определенный ковектор $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, определяемый соотношением $(X, Y) = \langle \lambda, Y \rangle$, т.е. $\lambda_i = b_{ij} X^j$, где b_{ij} – координаты формы Киллинга. В случае полупростой алгебры в силу невырожденности матрицы b_{ij} данное соответствие, очевидно, является взаимно однозначным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ – соответствующая ей коалгебра. Вектор $X \in \mathfrak{g}$ является невырожденным тогда и только тогда, когда соответствующий ему ковектор $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ также является невырожденным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – некоторый вектор в $\mathfrak{g}$, $\text{Ann } X$ – аннулятор данного вектора, а $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ – ковектор, соответствующий вектору X , тогда для любого $Z \in \text{Ann } X$ имеют место следующие равенства:

$$[Z, X] = 0, \quad ([Z, X], \mathfrak{g}) = 0, \quad (X, [Z, \mathfrak{g}]) = 0, \quad \langle \lambda, [Z, \mathfrak{g}] \rangle = 0.$$

Таким образом, $\text{Ann } X \subset \text{Ann } \lambda$. С другой стороны, для всякого Y из $\text{Ann } \lambda$ имеют место равенства

$$\langle \lambda, [Y, \mathfrak{g}] \rangle = 0, \quad (X, [Y, \mathfrak{g}]) = ([X, Y], \mathfrak{g}) = 0,$$

а значит, $[X, Y] \in \mathfrak{g}^\perp$ и, поскольку для алгебры, обладающей невырожденной формой Киллинга, $\mathfrak{g}^\perp = 0$, то $[X, Y] = 0$. Таким образом, $\text{Ann } \lambda \subset \text{Ann } X$, а значит, $\text{Ann } \lambda = \text{Ann } X$.

Пусть коектор λ является невырожденным, тогда $\text{Ann } \lambda$ является максимальной коммутативной подалгеброй [14], а значит, аннулятор $\text{Ann } X$ вектора X , соответствующего коектору λ , также является максимальной коммутативной подалгеброй, т. е. порождающий ее элемент является невырожденным. Аналогично из невырожденности X следует невырожденность λ . ■

В случае полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ее поляризация относительно коектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ определяется как (см., например, [13])

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{l}^{(+)} \oplus \mathfrak{k}, \quad (10)$$

где $\mathfrak{k}$ – некоторая подалгебра Картана, K – невырожденный элемент в подалгебре $\mathfrak{k}$, соответствующий коектору λ , и $\mathfrak{l}^{(+)}$ – линейная оболочка собственных векторов оператора ad_K , соответствующих положительным собственным числам. В силу утверждения 1 невырожденному коектору $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ соответствует невырожденный вектор $K \in \mathfrak{g}$, а значит, выражение (10) определяет поляризацию полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно невырожденного коектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.

Очевидным, но тем не менее важным случаем, сводящимся к нахождению поляризации полупростой алгебры Ли, является построение поляризации редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{g} = Z \oplus S$, где Z – центр в $\mathfrak{g}$, а S – полупростая подалгебра. Нетрудно видеть, что поляризация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяется как

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(Z) \oplus \mathcal{P}(S), \quad (11)$$

при этом очевидно, что $\mathcal{P}(Z) = Z$.

2.3. Рассмотрим задачу построения поляризации разрешимой алгебры Ли относительно невырожденного коектора. Всякая разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, определенная над произвольным алгебраически замкнутым полем (т. е. таким, что всякий полином произвольной ненулевой степени над данным полем имеет хотя бы один корень), содержит последовательность идеалов в исходной алгебре с размерностями $\dim \mathfrak{g}, \dim \mathfrak{g} - 1, \dim \mathfrak{g} - 2, \dots, 1, 0$ [13]. Практическое построение данной последовательности состоит в уплотнении верхнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(m-1)} \supset \mathfrak{g}^{(m)}, \quad \mathfrak{g}^{(m)} = [\mathfrak{g}^{(m-1)}, \mathfrak{g}^{(m-1)}], \quad \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad (12)$$

в котором размерности соседних элементов в общем случае могут отличаться более чем на единицу. Рассмотрим подробно процедуру уплотнения.

Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, π – ее линейное представление в пространстве V , а φ – некоторое линейное отображение вида $V \rightarrow \bar{V}$. Данное отображение индуцирует в пространстве $\bar{V}$ представление $\bar{\pi}$ такое, что

$$\bar{\pi}X = \varphi(\pi x), \quad X = \varphi(x), \quad x \in V, \quad X \in \bar{V}.$$

Тогда имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Подпространство $W \subset V$ инвариантно относительно представления π алгебры $\mathfrak{g}$ такого, что ядро некоторого отображения $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ инвариантно относительно данного представления, т. е. $\pi(\ker \varphi) \subset \ker \varphi$, тогда и только тогда, когда оно является полным прообразом инвариантного подпространства $\bar{W} \subset \bar{V}$ относительно представления $\bar{\pi}$, индуцированного отображением φ , т. е. когда $W = \varphi^{-1}(\bar{W})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из инвариантности подпространства $\overline{W} \subset \overline{V}$ относительно представления $\overline{\pi}$ следует:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}\overline{W} &\subset \overline{W}, & \overline{\pi}\varphi(W) &= \varphi(\pi W), \\ \varphi(\pi W) &\subset \varphi(W) & \Rightarrow \pi W &\subset W, \end{aligned}$$

т. е. инвариантность $\overline{W} \subset \overline{V}$ относительно $\overline{\pi}$. Здесь учтено, что $\varphi^{-1}(X) = x + \ker \varphi$, где $X = \varphi(x)$, $x \in W$, $X \in \overline{W}$. Аналогично можно показать и обратное. ■

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – некоторый ее идеал, отображение

$$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$$

и $\overline{\mathfrak{k}}$ – подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$, причем $\text{ad}_{\overline{\mathfrak{g}}} \overline{\mathfrak{k}} \subseteq \overline{\mathfrak{k}}$, тогда в силу утверждения 2 справедливо включение $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} = \varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{k}})$, причем $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$, так как $\varphi^{-1}(0) = \mathfrak{h}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра над произвольным алгебраически замкнутым полем, тогда $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – также разрешимая алгебра, а значит, в ней существует общий собственный вектор $\overline{X}$, т. е. удовлетворяющий уравнению $\text{ad}_{\overline{\mathfrak{g}}} \overline{X} = \alpha(\overline{\mathfrak{g}}) \overline{X}$, а значит, подалгебра $\overline{\mathfrak{k}} = \{\overline{X}\}$ инвариантна относительно $\text{ad}_{\overline{\mathfrak{g}}}$. Тогда имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Подалгебра $\mathfrak{k} = \varphi^{-1}\{X\}$ инвариантна относительно $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$, причем $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$ и $\dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{h} + 1$.*

Таким образом, для каждого идеала заданной размерности данное утверждение позволяет построить идеал размерности, большей на единицу, а значит, оно позволяет решить задачу уплотнения верхнего центрального ряда. Основным моментом в применении данного утверждения является построение общего собственного вектора, существование которого является следствием разрешимости данной алгебры. Отметим, что нахождение общего собственного вектора является известной алгебраической задачей.

Следуя [13], поляризацию разрешимой алгебры $\mathfrak{g}$ относительно ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ определим выражением

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \dots + \mathfrak{n}_n, \quad \mathfrak{n}_i = \ker B_i, \quad B_i = B_\lambda|_{\mathfrak{g}_i}, \quad (13)$$

где $\mathfrak{g}_i$ – элементы убывающей цепочки

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \dots \supset \mathfrak{g}_1 \supset \{0\}, \quad \dim \mathfrak{g}_i = i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

идеалов в $\mathfrak{g}$, где $n = \dim \mathfrak{g}$. Заметим, что если $B_\lambda = 0$ на $\mathfrak{g}$, то $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Таким образом, задача построения поляризации сводится к построению цепочки (14), которая может быть получена уплотнением верхнего центрального ряда (12) с помощью утверждения 3.

2.4. Рассмотрим задачу построения поляризации для произвольной алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, R – ее радикал, а $R^\perp$ – ортогональное дополнение R в $\mathfrak{g}$ относительно формы $B_\lambda(X, Y)$, т. е.

$$R^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid B_\lambda(X, R) = 0\},$$

причем для $R^\perp$ известна разрешимая поляризация $\mathcal{P}(R^\perp)$. Тогда существует поляризация $\mathcal{P}(R)$ радикала R такая, что

$$[\mathcal{R}(R^\perp), \mathcal{P}(R)] \subset \mathcal{P}(R), \quad (15)$$

а также поляризация $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяется суммой [13]

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \mathcal{R}(R) + \mathcal{P}(R^\perp). \quad (16)$$

Данная формула дает возможность построения поляризации для произвольной алгебры Ли. Таким образом, окончательно алгоритм построения поляризации относительно заданного ковектора принимает следующий вид.

1. Выделим в исходной алгебре радикал и его ортогональное дополнение.

2. Построим поляризацию ортогонального дополнения $R^\perp$. Если $R^\perp$ является полупростой, редуктивной или разрешимой алгеброй, то вопрос построения поляризации решается использованием формул (9), (11) или (13) соответственно; если алгебра $R^\perp$ является неразрешимой, но не является полупростой, то, используя разложение Леви–Мальцева, мы можем выделить в $R^\perp$ радикал и ортогональное дополнение к нему и применить данное рассуждение снова. В результате мы найдем поляризацию $\mathcal{P}(R^\perp)$ и тем самым удовлетворим первому из исходных условий для применения формулы (16).

3. Построим поляризацию радикала, удовлетворяющую (15), воспользовавшись (13), так как радикал по определению является разрешимой алгеброй Ли, при этом задача построения цепочки идеалов коразмерности 1 решается использованием утверждения 3.

В заключение заметим, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вполне разрешима, то для нее существует поляризация относительно любых точек $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Напротив, если $\mathfrak{g}$ – произвольная разрешимая или полупростая алгебра Ли, то могут существовать такие $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, для которых поляризация не существует [13].

2.5. Рассмотрим иллюстративный пример построения поляризации, который будет нам полезен в дальнейшем.

ПРИМЕР 1. Построим поляризацию $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = st(1, \mathbb{R})$ (так называемая алгебра Кириллова) размерности $\dim \mathfrak{g} = 6$, задаваемой коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 2e_2, & [e_1, e_3] &= -2e_3, & [e_1, e_4] &= -e_4, & [e_1, e_5] &= e_5, \\ [e_2, e_3] &= e_1, & [e_2, e_4] &= -e_5, & [e_3, e_5] &= -e_4, & [e_4, e_5] &= 2e_6, \end{aligned} \quad (17)$$

относительно некоторого невырожденного ковектора $\lambda = (\lambda_i(j))$, $i = \overline{1, \dim \mathfrak{g}}$.

Используя (6), нетрудно проверить, что для орбит коприсоединенного представления в данном случае допустима параметризация $\lambda(j) = (0, j_1, j_1, 0, 0, j_2)$. Выбор конкретного невырожденного ковектора не является принципиальным и не изменяет логики приведенных рассуждений. Используемый в данном случае вид ковектора позволяет избежать слишком громоздких вычислений.

2.5.1. Форма B_λ имеет вид

$$B_\lambda(X, Y) = C_{ij}(\lambda) X^i Y^j,$$

где

$$C_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2j_1 & -2j_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2j_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2j_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ядро $\mathfrak{g}^\lambda$ формы B_λ определяется соотношением (8) и имеет вид

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{e_2 + e_3, e_6\},$$

тогда размерность поляризации равна $\dim \mathfrak{h} = (\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^\lambda)/2 = 4$.

2.5.2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является неразрешимой алгеброй, а значит, для построения поляризации необходимо найти ее радикал R , который определяется как

$$R = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp = \{l_1 = e_4, l_2 = e_5, l_3 = e_6\},$$

и соответствующее ему ортогональное дополнение $R^\perp$ относительно формы B_λ , задающееся уравнением

$$B_\lambda(X, R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_\lambda(X, l_a) = 0,$$

где l_a – базис в R . Тогда для $R^\perp$ получим

$$R^\perp = \{\bar{l}_1 = e_1, \bar{l}_2 = e_2, \bar{l}_3 = e_3, \bar{l}_4 = e_6\}.$$

Коммутационные соотношения для l_α , $\alpha = \overline{1, \dim R^\perp}$ имеют вид

$$[\bar{l}_1, \bar{l}_2] = 2\bar{l}_2, \quad [\bar{l}_1, \bar{l}_3] = -2\bar{l}_3, \quad [\bar{l}_2, \bar{l}_3] = \bar{l}_1.$$

2.5.3. Построим поляризацию $\mathfrak{h}_{R^\perp}$ ортогонального дополнения $R^\perp$. Его аннулятор определяется как

$$(R^\perp)^\lambda = \{l_2 + l_3, l_4\},$$

и, следовательно, поляризация $\mathfrak{h}_{R^\perp}$ ортогонального дополнения к радикалу имеет размерность $\dim \mathfrak{h}_{R^\perp} = 3$.

Ортогональное дополнение $R^\perp$ является неразрешимой алгеброй, а значит, следуя приведенному выше алгоритму, для построения поляризации необходимо построить его радикал r , который в данном случае имеет вид $r = \{\bar{l}_4\}$, а также ортогональное дополнение $r^\perp = \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3, \bar{l}_4\}$. Тот факт, что ортогональное дополнение $r^\perp$ совпадает с $R^\perp$, означает, что найти поляризацию $R^\perp$ разложением на его радикал и соответствующее дополнение невозможно. Заметим, что центр алгебры $R^\perp$ совпадает с ее радикалом r , а значит,

$$R^\perp = r \oplus s,$$

где $r = \{\bar{l}_4\}$, $s = \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$, т. е. для построения поляризации для ортогонального дополнения $R^\perp$ необходимо построить поляризацию для радикала r и полупростой части s . Для поляризации $\mathfrak{h}_r$ радикала r , очевидно, имеем

$$\mathfrak{h}_r = \{\bar{l}_4\}.$$

Для построения поляризации $\mathfrak{h}_s$ алгебры s необходимо построить подалгебру Картана $\mathcal{K}$, содержащую регулярный элемент $K \in s$:

$$\mathcal{K} = \{p_1 = K^1 \bar{l}_1 + K^2 \bar{l}_2 + K^3 \bar{l}_3\},$$

и подалгебру $L^{(+)}$

$$L^{(+)} = \left\{ p_2 = \frac{K^3 + \sqrt{(K^3)^2 - 4K^1 K^2}}{4K^2} \bar{l}_1 + \frac{K^3 - \sqrt{(K^3)^2 - 4K^1 K^2}}{4K^1} \bar{l}_2 + \bar{l}_3 \right\}.$$

Тогда подалгебра $\mathfrak{h}_s = \mathcal{K} \oplus L^{(+)} = \{p_1, p_2\}$ является поляризацией алгебры s относительно функционала λ такого, что $\bar{\lambda}_i = b_{ij} K^i$, $i = 1, 2, 3$, где b_{ij} – координаты формы Киллинга (метрика Картана), которая определяется выражением

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $K^i = b^{ij} \bar{\lambda}_j$, где

$$b^{ij} = (b_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$K^1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{8}, \quad K^2 = \frac{\bar{\lambda}_3}{4}, \quad K^3 = \frac{\bar{\lambda}_2}{4},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{\lambda}_1}{8} \bar{l}_1 + \frac{\bar{\lambda}_3}{4} \bar{l}_2 + \frac{\bar{\lambda}_2}{4} \bar{l}_3, \\ p_2 &= \frac{(\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 + \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + 4\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_2}) l_1}{2\bar{\lambda}_2^2} + \frac{(-\bar{\lambda}_1^2 - \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + 4\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1} - 2\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3) l_2}{2\bar{\lambda}_2^2} + l_3. \end{aligned}$$

При этом необходимо помнить, что $\bar{\lambda}_i = \lambda(\bar{l}_i)$, а поскольку $\bar{l}_1 = e_1$, $\bar{l}_2 = e_2$, $\bar{l}_3 = e_3$, $\bar{l}_4 = e_6$, для выбранного ранее ковектора $\lambda(j) = (0, j_1, j_1, 0, 0, j_2)$ получим

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1 = 0, & \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2 = j_1, & \bar{\lambda}_3 &= \lambda_3 = j_1, & \bar{\lambda}_4 &= \lambda_6 = j_2, \\ p_1 &= \frac{j}{4} (\bar{l}_2 + \bar{l}_3), & p_2 &= \bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \bar{l}_3. \end{aligned}$$

Тогда искомая поляризация примет вид

$$\mathfrak{h}_{R^\perp} = \mathfrak{h}_r + \mathfrak{h}_s = \{e_6, p_1, p_2\}.$$

И окончательно для поляризации ортогонального дополнения к радикалу с точностью до линейной комбинации получим

$$\mathfrak{h}_{R^\perp} = \{e_6, e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3\}.$$

2.5.4. Построим вспомогательную алгебру $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}_{R^\perp} + R = \{p_i\}$:

$$p_1 = e_2 + e_3, \quad p_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad p_3 = e_6, \quad p_4 = e_4, \quad p_5 = e_5,$$

тогда

$$\begin{aligned} [p_1, p_2] &= 2p_2, & [p_1, p_4] &= -p_5, & [p_1, p_5] &= -p_4, \\ [p_2, p_4] &= p_5 - p_4, & [p_2, p_5] &= p_5 - p_4, & [p_4, p_5] &= 2p_3. \end{aligned}$$

Искомая цепочка идеалов в радикале исходной алгебры имеет вид

$$\{p_3, p_4, p_5\} \supset \{p_3, p_4 - p_5\} \supset \{p_3\},$$

т. е. в исходном базисе

$$R_3 = \{e_4, e_5, e_6\}, \quad R_2 = \{e_4 - e_5, e_6\}, \quad R_1 = \{e_6\}, \quad R_3 \supset R_2 \supset R_1.$$

Найдем ядро $\ker B_\alpha$, где $B_\alpha = B_\lambda|_{R_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\ker B_3 = \{e_6\}, \quad \ker B_2 = \{e_4 - e_5, e_6\}, \quad \ker B_1 = \{e_6\}.$$

Тогда поляризация $\mathfrak{h}_R$ радикала R имеет вид

$$\mathfrak{h}_R = \ker B_3 + \ker B_2 + \ker B_1 = \{e_4 - e_5, e_6\}.$$

2.5.5. Для поляризации ковектора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = (0, j_1, j_1, 0, 0, j_2)$ окончательно получим

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_R + \mathfrak{h}_{R^\perp} = \{e_4 - e_5, e_6\} + \{e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3, e_6\},$$

т. е.

$$\mathfrak{h} = \{e_1 - e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_4 - e_5, e_6\}.$$

3. ИНВАРИАНТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1. Пусть $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ и O_λ — некоторая орбита коприсоединенного представления, порожденная действием группы Ли G на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, содержащая точку λ . Всякая орбита коприсоединенного представления является симплектическим многообразием, для которого роль симплектической формы играет форма Кириллова:

$$\omega_\lambda(x, y) = \langle \lambda, [X, Y] \rangle, \quad \lambda \in \mathfrak{g}^*, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad x, y \in T_\lambda O_\lambda,$$

где $x = \text{ad}_X^* \lambda$, $y = \text{ad}_Y^* \lambda$, а ad^* – оператор коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что ограничение скобки Ли–Пуассона на данную орбиту совпадает со скобкой Ли–Пуассона, порожденной формой ω_λ , при этом структурные функции данной скобки Ли–Пуассона определяются как $J_{ij} = (-\omega_\lambda^{ij})^{-1} = C_{ij}^k \lambda_k$.

В силу теоремы Дарбу для произвольной орбиты O_λ существуют канонические координаты (q^a, p_a) такие, что соответствующая симплектическая форма имеет вид

$$\omega_\lambda = dp_a \wedge dq^a, \quad a = 1, \dots, \frac{1}{2} \dim O_\lambda. \quad (18)$$

Переход к каноническим координатам определяется функциями вида

$$f_i = f_i(q, p, \lambda), \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}^*, \quad (19)$$

которые в силу

$$\{f_i, f_j\} = C_{ij}^k f_k, \quad \{f_i, f_j\} = \frac{\partial f_i}{\partial q^a} \frac{\partial f_j}{\partial p_a} - \frac{\partial f_j}{\partial q^a} \frac{\partial f_i}{\partial p_a},$$

определяются как

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^a} \frac{\partial f_j}{\partial p_a} - \frac{\partial f_j}{\partial q^a} \frac{\partial f_i}{\partial p_a} = C_{ij}^k f_k, \quad (20)$$

$$f_i(0, 0, \lambda) = \lambda_i. \quad (21)$$

Полученные функции перехода можно рассматривать как уравнение поверхности, являющейся орбитой O_λ . Исключая в данных функциях переменные q и p , получим уравнение данной орбиты в виде

$$\psi_\mu(f) = C_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n - \dim O_\lambda,$$

где $C_\mu = \psi_\mu(\lambda)$. Таким образом, получим $n - \dim O_\lambda$ функций, для которых верно $\psi_\mu(\text{Ad}_g^* f) = \psi_\mu(f)$, т. е. инвариантных относительно действия коприсоединенного представления.

Пусть орбита O_λ имеет максимально возможную размерность, тогда преобразования (5) задают $\text{ind } \mathfrak{g}$ функций, инвариантных относительно действия коприсоединенного представления, т. е. полный набор решений системы (4). Таким образом, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Построение полного набора инвариантов коприсоединенного представления, т. е. интегрирование системы (4), равносильно построению канонического перехода к координатам Дарбу на орбитах максимальной размерности.*

3.2. Прежде чем переходить непосредственно к вопросу о построении координат Дарбу на невырожденных орбитах, рассмотрим две важные задачи.

Первая из них – это построение генераторов действия некоторой группы Ли на соответствующем однородном пространстве. Пусть M – однородное правое G -пространство, где G – группа Ли, действующая на M , H – подгруппа изотропии некоторой точки $q_0 \in M$, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли групп Ли G и H соответственно, причем $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \simeq T_{q_0} M$, т. е. базис в алгебре Ли $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\{e_i\} = \{e_A, e_a\}, \quad i = 1, \dots, \dim \mathcal{G}, \quad a = \overline{1, \dim M}, \quad A = \overline{1, \dim H}, \quad (22)$$

где $\{e_A\}$ – базис алгебры $\mathcal{H}$, $\{e_a\}$ – базис пространства $\mathcal{P}$. Действуя дифференциалами dL_g левых сдвигов на базисные векторы $\{e_A, e_a\}$, построим левоинвариантные поля $\xi_i(g)$:

$$\xi_i = dL_g e_i = \xi_i^a e_a + \xi_i^A e_A, \quad [\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k, \quad i, j, k = \overline{1, \dim G}.$$

Произвольный элемент $g \in G$ может быть представлен в виде $g = hs(q)$, где $s(q)$ – гладкое борелевское отображение, которое ставит в соответствие каждой точке $x \in M$ правый смежный класс $hs(q) \subset G$, а $h \in H$. Таким образом, имеет место отождествление $g = (h^A, q^a)$. В координатах h^A, q^a левоинвариантные поля имеют вид

$$\xi_i(g) = \xi_i^a(q) \partial_{q^a} + \xi_i^A(h, q) \partial_{h^A}.$$

Генераторы $X_i = X_i^a \partial_{q^a}$ действия группы G на пространстве M совпадают с проекцией левоинвариантных полей ξ_i на пространство M , т. е. $X_i = \pi_* \xi_i$. Можно показать, что операция проецирования равносильна ограничению данных векторных полей на пространство функций, постоянных в каждом правом классе смежности, т. е. функций, не зависящих от переменных h^A , тогда

$$X_i = \pi_* \xi_i = \xi_i^a(q) \partial_{q^a}. \quad (23)$$

Таким образом, единственным условием для построения искомых векторных полей является знание левоинвариантных векторных полей, соответствующих заданному базису алгебры Ли. Существенно, что задача построения данных полей для произвольных алгебр Ли решается методами линейной алгебры [15] и, более того, реализована авторами в системах компьютерной математики, таких как **Waterloo Maple** и **Wolfram Mathematica**.

Вторая задача, которую необходимо рассмотреть, связана с построением для генераторов X_i действия группы G на однородном пространстве M векторных полей вида $\hat{X}_i = X_i + \chi_i(q)$ – продолжений генераторов X_i , удовлетворяющих условию

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = C_{ij}^k \hat{X}_k.$$

Фактически требуется найти вид функций $\chi_i(q)$, которые можно добавить к генераторам X_i так, чтобы при этом не изменились коммутационные соотношения. Для этого требуется решить систему уравнений вида

$$X_i^a(q) \partial_{q^a} \chi_j^b(q) - X_j^a(q) \partial_{q^a} \chi_i^b(q) = C_{ij}^k \chi_k^b(q). \quad (24)$$

Согласно [16] решения этой системы образуют линейное пространство, в котором можно выделить модуль тривиальных решений, т. е. решений, эквивалентных нулевому. Построение эквивалентных решений равносильно калибровочному преобразованию $\partial_{q^a} \rightarrow \partial_{q^a} + \partial_{q^a} S(q)$, где $S(q)$ – произвольная гладкая функция. Пространство всех нетривиальных продолжений генераторов конечномерно и изоморфно факторпространству $\mathfrak{h}^* / [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^*$, где $\mathfrak{h}^*$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^*$ – пространства, сопряженные (т. е. коалгебры) к $\mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ соответственно. Прямым вычислением можно проверить, что

$$\hat{X}_i = X_i + \xi_i^A(0, q) \lambda_A, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \langle \lambda, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0. \quad (25)$$

3.3. Рассмотрим построение канонического перехода, линейного по переменным p_a , на некоторой невырожденной орбите O_λ коалгебры $\mathfrak{g}^*$, т. е. перехода вида

$$f_i(q, p) = \alpha_i^a(q) p_a + \chi_i(q), \quad \text{rank } \alpha_i^a(q) = \frac{1}{2} \dim O_\lambda. \quad (26)$$

Отметим, что в общем случае линейный переход (26), конечно, не существует, но если допустить, что $\alpha_i^a(q)$ и $\chi_i(q)$ являются голоморфными функциями от комплексных переменных q , то тем самым мы значительно расширим класс алгебр Ли и соответствующих орбит коприсоединенного представления, для которых этот переход существует (здесь необходимо считать, что линейные функционалы из $\mathfrak{g}^*$ продолжаются на комплексную алгебру $\mathfrak{g}^c$ по линейности). Также отметим, что, по-видимому, для всякой алгебры Ли и любой ее невырожденной орбиты переход (26) существует.

Для функций перехода вида (26) уравнения (20) распадаются на систему вида

$$\alpha_i^a(q) \partial_{q^a} \alpha_j^b(q) - \alpha_j^a(q) \partial_{q^a} \alpha_i^b(q) = C_{ij}^k \alpha_k^b(q), \quad (27)$$

$$\alpha_i^a(q) \partial_{q^a} \chi_j^b(q, \lambda) - \alpha_j^a(q) \partial_{q^a} \chi_i^b(q, \lambda) = C_{ij}^k \chi_k^b(q, \lambda). \quad (28)$$

Уравнение (27) равносильно уравнению

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad X_i = \alpha_i^a \partial_{q^a},$$

где X_i – генераторы локальной группы G преобразований, действующей в области Q изменения канонических переменных q . Так как $\text{rank } \alpha_i^a(q) = (\dim O_\lambda)/2 = \dim Q$, то существует подалгебра изотропии $\mathfrak{h}$ точки $q = 0$, причем

$$\dim \mathfrak{h} = n - \dim Q = n - \frac{1}{2} \dim O_\lambda. \quad (29)$$

Обозначим через $\{e_A\}$ базис алгебры изотропии $\mathfrak{h}$, а через $\{e_a\}$ – дополнительные базисные векторы в $\mathfrak{g}$, т. е. $e_i = \{e_A, e_a\}$. По определению подалгебры изотропии имеем $\alpha_A^a(0) = 0$, а значит, $\det \alpha_a^b(0) \neq 0$. Используя подходящую замену координат, всегда можно получить, что $\alpha_a^b(0) = \delta_a^b$. Полагая в (28) $i = A$, $j = B$, $q = 0$, получим $C_{AB}^C \lambda_C = 0$, что эквивалентно условию (9) подчиненности подалгебры $\mathfrak{h}$ функционалу λ , а поскольку имеет место равенство (29), то подалгебра $\mathfrak{h}$ является поляризацией алгебры $\mathfrak{g}$ относительно ковектора λ .

Таким образом, решение уравнения (27) равносильно решению задачи построения на некотором однородном пространстве M алгебры Ли векторных полей, реализующих алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с заданной подгруппой изотропии H . Для этого, во-первых, необходимо построить поляризацию $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, подчиненную заданному невырожденному ковектору λ , а во-вторых, найти левоинвариантные поля ξ_i на группе Ли G , соответствующие ее алгебре Ли относительно базиса $e_i = \{e_A, e_a\}$. Как было указано выше, обе эти задачи решаются методами линейной алгебры. Тогда в силу (23) получим

$$\alpha_i^a(q) = \xi_i^a(q).$$

Уравнение (28) формально эквивалентно уравнению (24), а значит, его решение сводится к решению рассмотренной выше задачи о построении продолжений генераторов преобразований однородных пространств. Таким образом, используя найденные на предыдущем шаге левоинвариантные поля, в силу (25) получим искомые

выражения для $\chi_i(q, \lambda)$:

$$\chi_i(q, \lambda) = \xi_i^A(0, q) \lambda_A, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \langle \lambda, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0,$$

где $\mathfrak{h}$ – поляризация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно невырожденного ковектора λ . Таким образом, искомый линейный переход к координатам Дарбу на невырожденной орбите O_λ определяется как

$$f_i(q, p) = \xi_i^a(q) p_a + \xi_i^A(0, q) \lambda_A. \quad (30)$$

Фактически интересующие нас функции перехода f_i получаются из левоинвариантных полей $\xi_i = \xi_i^a(q) \partial_{q^a} + \xi_i^A(h, q) \partial_{h^A}$ заменой $\partial_{h^A} \rightarrow \lambda_A$, $\partial_{q^a} \rightarrow p_a$, $h = 0$. Непосредственной подстановкой можно показать, что функции перехода (30) приводят симплектическую форму на рассматриваемой орбите к виду (18). Таким образом, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Задача построения полного набора инвариантов коприсоединенного представления группы Ли G эквивалентна задаче построения операторов $\hat{X}_i$ на некоторой орбите O_λ данного представления, имеющей максимальную размерность.*

В заключение приведем окончательный алгоритм построения инвариантов коприсоединенного представления группы Ли. Пусть имеются группа Ли G , ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \{e_i\}$ и соответствующая ей коалгебра $\mathfrak{g}^* = \{e^i\}$. Тогда:

1) для некоторого невырожденного ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ построим поляризацию $\mathfrak{h} = \mathcal{P}(\mathfrak{g}) = \{l_A\}$;

2) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ построим базис, дополнив соответствующим образом базис алгебры $\mathfrak{h}$, т.е. $\mathfrak{g} = \{l_A, l_a\}$;

3) построим в базисе $\{l_A, l_a\}$ левоинвариантные поля

$$\xi_i(h, q) = \xi_i^a(q) \partial_{q^a} + \xi_i^A(h, q) \partial_{h^A};$$

4) построим на $\mathfrak{g}$ координаты Дарбу, используя правило

$$F_i(q, p) = \xi_i(h, q) \Big|_{\substack{h=0 \\ \partial_{q^a} \rightarrow p_a \\ \partial_{h^A} \rightarrow \lambda_A}} = \xi_i^a(q) p_a + \xi_i^A(0, q) \lambda_A;$$

5) исключая в выражениях для координат Дарбу переменные q_a и p_a , а затем выполняя переходы $F_i \rightarrow f_i$ и $\Lambda_i \rightarrow \lambda_i$ к координатам Дарбу и координатам ковектора, соответствующим исходному базису алгебры Ли $\mathfrak{g} = \{e_i\}$, получим выражения вида $\psi_\mu(f) = \psi_\mu(\lambda)$, которые являются искомыми инвариантами коприсоединенного представления группы Ли G .

Еще раз отметим, что задача построения необходимых в данном алгоритме левоинвариантных полей ξ_i для произвольных алгебр Ли также решается методами линейной алгебры [15] и реализована авторами в системах компьютерной математики, таких как Waterloo Maple и Wolfram Mathematica.

3.4. В качестве иллюстративного примера рассмотрим построение инвариантов коприсоединенного представления группы G , алгеброй Ли которой является алгебра $st(1, \mathbb{R})$.

ПРИМЕР 2. Пусть G – группа Ли и $\mathfrak{g} = st(1, \mathbb{R})$ – ее алгебра Ли, которая задается коммутационными соотношениями вида (17). Поляризация данной алгебры относительно ковектора $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) = (0, j_1, j_1, 0, 0, j_2)$ имеет вид

$$\mathfrak{h} = \{e_1 - e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_4 - e_5, e_6\}.$$

Произведем замену базиса таким образом, чтобы первые четыре вектора соответствовали подалгебре $\mathfrak{h}$:

$$l_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad l_2 = e_2 + e_3, \quad l_3 = e_4 - e_5, \quad l_4 = e_6, \quad l_5 = e_1, \quad l_6 = e_5.$$

Коммутационные соотношения в данном базисе имеют вид

$$\begin{aligned} \{l_1, l_2\} &= -2l_1, & \{l_1, l_5\} &= 2l_2, & \{l_1, l_6\} &= -l_3, & \{l_2, l_3\} &= l_3, & \{l_2, l_5\} &= 2(l_1 - l_5), \\ \{l_2, l_6\} &= -l_3 - l_6, & \{l_3, l_5\} &= l_3 + 2l_6, & \{l_3, l_6\} &= 2l_4, & \{l_5, l_6\} &= l_6. \end{aligned}$$

Левоинвариантные поля, соответствующие базису l_i алгебры Ли $st(1, \mathbb{R})$ (неразрешимой!), имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2}(e^{2g^2-2g^5} + e^{2g^2+2g^5})\partial_1 + \frac{1}{2}(e^{-2g^5} - e^{2g^5})\partial_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(e^{-2g^5}g^3 - e^{2g^5}g^3 - 2e^{-g^5}g^6)\partial_3 - (g^6)^2\partial_4 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(e^{-2g^5} + e^{2g^5} - 2)\partial_5 + g^6(e^{-2g^5} - 1)\partial_6, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(e^{2g^2-2g^5} - e^{2g^2+2g^5})\partial_1 + \frac{1}{2}(e^{-2g^5} + e^{2g^5})\partial_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(e^{-2g^5}g^3 + e^{2g^5}g^3 - 2e^{-g^5}g^6)\partial_3 - (g^6)^2\partial_4 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(e^{2g^5} - e^{-2g^5})\partial_5 + e^{-2g^5}g^6\partial_6, \\ \xi_3 &= e^{-g^5}\partial_3 - 2g^6\partial_4 + (e^{-2g^5} - 1)\partial_6, \\ \xi_4 &= \partial_4, \quad \xi_5 = \partial_5 - g^6\partial_6, \quad \xi_6 = \partial_6. \end{aligned}$$

В силу (30) легко построить линейные функции перехода F_i для алгебры Ли $st(1, \mathbb{R})$, записанной в базисе l_i . Возвращаясь к исходному базису e_i , получим искомый переход к каноническим симплектическим координатам:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_5 - q^6 p_6, & f_2 &= j_1 e^{2q^5} + \frac{1}{2} e^{2q^5} p_5, \\ f_3 &= -j_2 (q^6)^2 + j_1 e^{-2q^5} - \frac{1}{2} e^{-2q^5} p_5 + q^6 e^{-2q^5} p_6, \\ f_4 &= -2j_2 q^6 + e^{-2q^5} p_6, & f_5 &= p_6, & f_6 &= j_2. \end{aligned}$$

Исключая переменные q^5, q^6, p_5, p_6 , получим искомые инварианты коприсоединенного представления рассматриваемой группы Ли:

$$(f_4 f_1 + f_3 f_5) f_5 - f_1^2 f_6 - f_2 (4 f_3 f_6 + f_4^2) = -4 j_1^2 j_2, \quad f_6 = j_2.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе подход позволяет решать задачу построения инвариантов коприсоединенного представления для групп Ли произвольной размерности и произвольной структуры, используя только методы линейной алгебры. Последнее крайне важно, так как это дает возможность реализовать алгоритм решения на компьютере, например в таких системах, как *Waterloo Maple* и *Wolfram Mathematica*.

Список литературы

- [1] H. G. B. Casimir, *Proc. R. Soc. Amsterdam*, **34** (1931), 844–846.
- [2] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Докл. АН СССР*, **231**:3 (1976), 536–538.
- [3] А. В. Болсинов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 68–92.
- [4] G. Racah, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **8** (1950), 108–112.
- [5] К. Шевалле, *Теория групп Ли*, ИЛ, М., 1948, 1958.
- [6] И. М. Гельфанд, *Матем. сборник*, **26(68)** (1950), 103–112.
- [7] А. Л. Переломов, В. С. Попов, *ЯФ*, **3** (1966), 924–931.
- [8] А. Л. Переломов, В. С. Попов, *Докл. АН СССР*, **174** (1967), 287–290.
- [9] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:30 (2002), 6293–6306, arXiv: math/0202006.
- [10] V. M. Boyko, J. Patera, R. Popovych, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:20 (2006), 5749–5762, arXiv: math-ph/0602046.
- [11] А. Н. Лезнов, И. А. Малкин, В. И. Манько, “Канонические преобразования и теория представлений групп Ли”, Тр. ФИАН, **96**, Наука, М., 1977, 24–71.
- [12] J. Guerrero, V. I. Manko, G. Marmo, A. Simoni, *Geometrical aspects of Lie groups representations and their optical applications*, arXiv: quant-ph/0112069.
- [13] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [14] А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [15] И. В. Широков, *Изв. вузов. Физика*, **6** (1997), 25–32.
- [16] И. В. Широков, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 407–423.

Поступила в редакцию 15.08.2015,
после доработки 30.10.2015