Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лосяков, Квантово-механическая модель в теории гравитации, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 310–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:19:09

© 2016 г.

В. В. Лосяков^{*†}

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрена модель, в которой на d -мерной сфере определено однородное по этой сфере вещественное массивное скалярное поле, причем радиус этой сферы, временной масштаб и скалярное поле связаны между собой уравнениями общей теории относительности. Эта система с тремя степенями свободы проквантована, определены наблюдаемые и найдены динамические средние значения наблюдаемых в режиме, когда масса скалярного поля много меньше массы Планка.

Ключевые слова: общая теория относительности, квантование гравитации, квантовая механика, квантование калибровочных теорий.

DOI: 10.4213/tmf9027

1. ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности (теория гравитации) и квантовая теория были сформулированы исторически практически одновременно. Причем если первая была признана вершиной классической физики, то вторая настаивала на принципиальном пересмотре основ классической теории.

Развитие квантовой теории, несмотря на возникшие трудности математического характера, поражаало воображение: предсказание позитрона, вычисление и экспериментальное подтверждение радиационных поправок, успехи физики конденсированного состояния, атомной спектроскопии и т. д. Здесь следует отметить, что квантовая механика как квантовая теория с конечным числом степеней свободы нашла свою математическую формулировку после работ фон Неймана [1]. При разумных предположениях оказалось, что все представления канонических коммутационных соотношений в квантовой механике унитарно-эквивалентны. Совсем другая ситуация сложилась в квантовой теории поля – квантовой теории с бесконечным числом степеней свободы. Эмх [2] писал: “... теорема единственности фон Неймана не

Настоящая работа поддержана РФФИ (грант № 14-01-90405).

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: losyakov@lpi.ru

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

допускает обобщения на квантовые теории поля. Не только было неопровержимо доказано, что неэквивалентные представления существуют, но и их оказалось так много, что они буквально обрушились на физиков...". Попытки построить математически строгую формулировку физически значимой квантовой теории поля с взаимодействием до сих пор не увенчались успехом. В результате у физиков появилась так называемая S -матричная формулировка квантовой теории поля, которая позволяет вычислять сечения рассеяния частиц в рамках теории возмущений (см., например, [3]). Главное достоинство такой теории заключается в том, что результаты вычислений в ней блестяще подтверждаются экспериментально. В первую очередь это относится к электрослабым взаимодействиям.

Гравитационное взаимодействие на уровне элементарных частиц тоже слабое, но дело в том, что оно *слишком* слабое. На мой взгляд, с точки зрения разумного человека, например экспериментатора, учитывать квантовые поправки от гравитационного поля в процессах рассеяния – это то же самое, что заниматься лэмбовским сдвигом до экспериментального обнаружения электромагнитных волн. В 1969 году Дирак ([4], с. 321) писал: “Какие-либо экспериментальные данные о квантовании гравитационного поля отсутствуют”. С тех пор в этом смысле мало что изменилось. Конечно же, теоретиков это остановить не могло. Но и они на этом пути столкнулись с принципиальными трудностями: в отличие от теории электрослабых взаимодействий (да и сильных тоже), теория гравитации в рамках S -матричного подхода оказалась неперенормируемой.

Теоретические работы по квантованию гравитации можно очень условно распределить по следующим направлениям.

1. Формальное квантование гравитации как калибровочной теории со связями первого рода вне рамок теории возмущений со всеми нерешенными проблемами, присущими любой квантовой теории поля с взаимодействием (см. монографию Гитмана, Тютиня [5]).

2. Обобщение теории гравитации на классическом уровне с целью улучшить ультрафиолетовое поведение в S -матричной постановке (например, супергравитация [6]).

3. Квантование гравитации вне рамок квантовой теории поля. Самая яркая, на мой взгляд, теория этого направления – теория струн, изначально сформулированная безотносительно к теории гравитации и оказавшая решительное влияние на современную теоретическую и математическую физику [7], [8]. Поляков [9] писал: “Уникальная особенность критических струн состоит в том, что они описывают гравитоны”.

К сожалению или к счастью, но до сих пор физика остается физикой: нет эксперимента – нет хорошей теории.

Но маленькая лазейка есть (опробована при построении квантовой теории). Если нет эксперимента реального, иногда возможен эксперимент мысленный. Гравитацию нужно усилить. Из общих соображений можно предположить, что роль квантовой гравитации существенна в начале нашего мира или вблизи черной дыры (излучение Хокинга). Но что интересно, в этих мысленных экспериментах существенна зависимость от времени, нестационарность процесса. Это никоим образом не укладывается в картину S -матричного подхода, где начальное состояние задается

в бесконечно удаленном прошлом, а результат рассеяния наблюдается в бесконечно далеком будущем. А вот квантовая механика для этого подходит идеально.

Поэтому, чтобы получить хоть какую-нибудь достоверную информацию о квантовых свойствах гравитации, попытаемся классическую общую теорию относительности непротиворечивым образом редуцировать до системы с конечным числом степеней свободы, проквантовать, определить наблюдаемые и изучить получившуюся квантово-механическую модель, не терзаясь нерешенными проблемами квантовой теории поля.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$, определяет инвариантное расстояние в пространстве-времени (сигнатура метрического тензора $(-, +, \dots, +)$)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Символы Кристоффеля (связность) записываются в виде

$$\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}), \quad \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = g^{\mu\epsilon} \Gamma_{\epsilon,\nu\lambda},$$

где $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$. Тензор кривизны Римана, тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$R_{\lambda\nu\epsilon}^\mu = \partial_\nu \Gamma_{\lambda\epsilon}^\mu - \partial_\epsilon \Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\lambda\epsilon}^\sigma - \Gamma_{\epsilon\sigma}^\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Для действия Эйнштейна в случае гравитации с Λ -членом ($\Lambda = m_\lambda^2$) справедливо выражение

$$S_g = \frac{1}{4} m_P^{d-1} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2m_\lambda^2), \quad (1)$$

m_P – масса Планка, $g = \det g_{\mu\nu}$, $d^{d+1}x = dx_0 dx_1 \dots dx_d$.

Ниже мы увидим, что простейшую квантово-механическую модель можно построить, если дополнить ее материей. Материю выберем тоже простейшую: вещественное массивное (массы m) скалярное поле ϕ . Соответствующее действие имеет вид

$$S_m = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (2)$$

уравнения движения – вид

$$m_P^{d-1} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + m_\lambda^2 g_{\mu\nu} \right] = 2T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \phi \partial_\sigma \phi + m^2 \phi^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (4)$$

3. МОДЕЛЬ

Рассмотрим пространство-время с метрикой

$$ds^2 = -e^2(t) dt^2 + a^2(t) \sum_{i=1}^d d\theta_i^2 \prod_{k=1}^{i-1} \sin^2 \theta_k, \quad (5)$$

$0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 1, \dots, d-1$, $0 \leq \theta_d < 2\pi$, d – размерность пространства (не обязательно равна трем), $-\infty < t < \infty$ – время, $a(t) > 0$, $e(t) > 0$ – физические переменные, определяющие рассматриваемое пространство-время. Топология такого пространства-времени – $S^d \times \mathbb{R}^1$. Она совпадает с топологией пространства-времени де Ситтера. Эта метрика также известна как метрика закрытой изотропной модели [10].

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ диагонален:

$$g_{00} = -e^2(t), \quad g_{ik} = \delta_{ik} a^2(t) \prod_{m=1}^{i-1} \sin^2 \theta_m \equiv \delta_{ik} a^2 g_i, \quad i, k = 1, \dots, d,$$

$$g^{00} = -\frac{1}{e^2}, \quad g^{ik} = \delta_{ik} \frac{1}{a^2 g_i}, \quad i, k = 1, \dots, d.$$

Тензор Риччи записывается как

$$R_{00} = -d \frac{\ddot{a}}{a} + d \frac{\dot{e}}{e} \frac{\dot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0,$$

$$R_{ik} = \delta_{ik} \frac{g_i}{e^2} \left(a\ddot{a} + (d-1)\dot{a}^2 + (d-1)^2 - \frac{\dot{e}}{e} a\dot{a} \right), \quad (6)$$

скалярная кривизна – как

$$R = \frac{d}{e^2 a^2} \left[2a\ddot{a} + (d-1)\dot{a}^2 + (d-1)e^2 - 2\frac{\dot{e}}{e} a\dot{a} \right].$$

Материю рассмотрим тоже модельную (поле однородно на поверхности сферы). Пусть

$$\phi(t, x) = \phi(t). \quad (7)$$

После подстановки тензора Риччи (6) и ограничения (7) на скалярное поле в уравнения Эйнштейна (3) и уравнение на скалярное поле (4) получим

$$\mu = \nu = 0: \quad m_{\text{P}}^{d-1} \left[\frac{d(d-1)}{2a^2} (\dot{a}^2 + e^2) - m_{\lambda}^2 e^2 \right] = \dot{\phi}^2 + m^2 e^2 \phi^2,$$

$$\mu = i, \quad \nu = 0: \quad 0 = 0,$$

$$\mu = i, \quad \nu = k: \quad m_{\text{P}}^{d-1} \left[(d-1) \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{d-2}{2a^2} (\dot{a}^2 + e^2) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{e}}{e} \right) - m_{\lambda}^2 e^2 \right] = -\dot{\phi}^2 + m^2 e^2 \phi^2,$$

$$\ddot{\phi} + \left(d \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{e}}{e} \right) \dot{\phi} + m^2 e^2 \phi = 0.$$

Отсюда сразу видно, что проведенная редукция непротиворечива. Действительно, рассмотренная модель характеризуется тремя переменными $a(t)$, $e(t)$, $\phi(t)$, которые

находятся из решения трех уравнений. Более того, уравнения Эйнштейна ковариантны относительно общих преобразований координат

$$x^\mu \longrightarrow X^\mu = X^\mu(x),$$

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow G_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\nu} g_{\lambda\sigma}(x), \quad \phi(x) \longrightarrow \Phi(X) = \phi(x).$$

Это приводит к тому, что из полного числа $(d+1)(d+2)/2 + 1$ уравнений движения независимых уравнений на $d+1$ меньше, что отражает калибровочность теории гравитации. Можно проверить, что в редуцированной модели это свойство сохраняется. Третье уравнение движения следует из первого и последнего, и все уравнения движения ковариантны относительно перемасштабирования времени:

$$t \longrightarrow T = f(t),$$

$$a(t) \longrightarrow A(T) = a(t), \quad e(t) \longrightarrow E(T) = \frac{e(t)}{\dot{f}(t)}, \quad \phi(t) \longrightarrow \Phi(T) = \phi(t). \quad (8)$$

Рассмотренные уравнения движения можно получить из принципа наименьшего действия, если подставить метрику (5) в действие (1).

Детерминант метрического тензора имеет вид

$$g \equiv \det g_{ik} = -e^2 a^{2d} \prod_{m=1}^d \sin^{2(d-m)} \theta_m, \quad \sqrt{-g} = e a^d \prod_{m=1}^d \sin^{d-m} \theta_m.$$

Определим элемент d -мерного телесного угла и полный телесный угол:

$$d\Omega_d = \prod_{m=1}^d d\theta_m \sin^{d-m} \theta_m, \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}.$$

Выполнив подстановку, получим

$$S_g = \frac{1}{4} m_P^{d-1} \Omega_d \int_{t_i}^{t_f} dt a^d \left[-d(d-1) \left(\frac{\dot{a}^2}{e a^2} + \frac{e}{a^2} \right) - 2m_\lambda^2 e \right] + \frac{m_P^{d-1} \Omega_d}{2e} \partial_0 a^d \Big|_{t_i}^{t_f}.$$

Аналогично, используя (7), найдем действие для материи:

$$S_m = \frac{1}{2} \Omega_d \int_{t_i}^{t_f} dt a^d \left[\frac{\dot{\phi}^2}{e} - e m^2 \phi^2 \right].$$

Приведем переменные модели к безразмерному виду. Для этого введем два безразмерных параметра

$$\mu = \sqrt{\frac{d(d-1)}{2}} \frac{m}{m_\lambda}, \quad \zeta = \frac{d(d-1)}{2} \frac{m_P^2}{m_\lambda^2} \left(\frac{\Omega_d m_\lambda^2}{m_P m} \right)^{2/d},$$

время будем измерять в единицах, обратных массе скалярного поля, $t \longrightarrow t/m$, и определим новые переменные

$$q(t) = \left(\frac{\Omega_d m_\lambda^2}{m_P m} \right)^{1/d} m_P a(t), \quad Q(t) = \frac{m}{m_\lambda} m_P^{-(d-1)/2} \phi(t).$$

Таким образом, полное действие для рассматриваемой модели имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt q^d \left[\frac{1}{e} \left(\dot{Q}^2 - \mu^2 \frac{\dot{q}^2}{q^2} \right) - e \left(Q^2 + 1 - \frac{\zeta}{q^2} \right) \right], \quad (9)$$

где $q(t)$, $Q(t)$, $e(t)$ – переменные модели, μ , ζ – ее параметры. Уравнения движения, соответствующие этому действию, совпадают с уравнениями движения, полученными ранее. Кроме того, это действие инвариантно относительно репараметризации времени (8).

4. ОБОБЩЕННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА МОДЕЛИ

Лагранжиан модели имеет вид

$$L(\mathcal{Q}, \dot{\mathcal{Q}}, e) = \frac{1}{2} q^d \left[\frac{1}{e} \left(\dot{Q}^2 - \mu^2 \frac{\dot{q}^2}{q^2} \right) - e \left(Q^2 + 1 - \frac{\zeta}{q^2} \right) \right], \quad \mathcal{Q} = (q, Q).$$

Особенность теории состоит в том, что лагранжиан не зависит от $\dot{e}$ и ее гессиян равен нулю. Обобщенный гамильтонов подход для теорий такого рода был введен Дираком [11] и подробно рассмотрен Гитманом и Тютиным [5].

Если определить обобщенные импульсы $\mathcal{P} = (p, P)$:

$$\mathcal{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{Q}}}, \quad p = -\mu^2 \frac{q^{d-2}}{e} \dot{q}, \quad P = \frac{q^d}{e} \dot{Q},$$

то уравнения движения модели можно получить, варьируя действие в обобщенной гамильтоновой форме

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{P} \dot{\mathcal{Q}} - \lambda \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})], \quad (10)$$

причем в нашем случае есть связь

$$\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \frac{1}{2q^d} \left(P^2 - \frac{1}{\mu^2} q^2 p^2 \right) + \frac{1}{2} q^d \left(Q^2 + 1 - \frac{\zeta}{q^2} \right)$$

с множителем Лагранжа $\lambda = e$ и с каноническим гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, e) = \mathcal{P} \dot{\mathcal{Q}} - L(\mathcal{Q}, \dot{\mathcal{Q}}, e)|_{\dot{\mathcal{Q}}=f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, e)} = \lambda \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}),$$

пропорциональным связи и обращающимся на ней в нуль. Можно показать, что такой вид действия в обобщенной гамильтоновой динамике фиксирует рассмотренную модель как калибровочную теорию с первичной связью первого рода.

Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta q} &= \dot{p} + e \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial q} = 0, & \frac{\delta S}{\delta p} &= \dot{q} - e \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial p} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta Q} &= \dot{P} + e \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial Q} = 0, & \frac{\delta S}{\delta P} &= \dot{Q} - e \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial P} = 0, & \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

Из условия сохранения связи со временем, не используя обращения в нуль соответствующих вариационных производных на уравнениях движения, можно получить, что

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \mu^2 \frac{q^{d-2}}{p} \left[\frac{\delta S}{\delta p} \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial q} + \frac{\delta S}{\delta Q} \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial P} + \frac{\delta S}{\delta P} \frac{\partial \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial Q} \right].$$

Таким образом, уравнение $\delta S/\delta q = 0$ вообще можно не рассматривать. Число независимых уравнений движения на единицу меньше числа определяемых переменных. Для того чтобы решение классических уравнений движения было единственным, одну из переменных (или функцию от них) следует зафиксировать – наложить полностью устраняющее произвол калибровочное условие. Сделать это нужно непротиворечивым образом. Для выбора калибровочного класса предлагается следующая калибровка¹⁾:

$$q = e^t. \quad (11)$$

При этом соблюдаются условия, наложенные ранее: $q > 0$, $-\infty < t < \infty$. Но не это главное. В этом случае из уравнения $\delta S/\delta p = 0$ однозначно определяется лагранжев множитель

$$e = -\mu^2 \frac{e^{(d-1)t}}{p}, \quad (12)$$

а из уравнения связи $\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$ находим импульс, сопряженный координате q ,

$$p = -\mu e^{-t} \sqrt{P^2 + e^{2dt}(Q^2 + 1 - \zeta e^{-2t})}. \quad (13)$$

Знак корня квадратного при разрешении связи выбран так, чтобы выполнялось условие $e > 0$ (см. (12)).

В результате остаются два уравнения $\delta S/\delta Q = 0$, $\delta S/\delta P = 0$, которые принимают вид

$$\dot{P} = -\mu e^{2dt} \frac{Q}{\sqrt{P^2 + e^{2dt}(Q^2 + 1 - \zeta e^{-2t})}}, \quad \dot{Q} = \mu \frac{P}{\sqrt{P^2 + e^{2dt}(Q^2 + 1 - \zeta e^{-2t})}}. \quad (14)$$

Эти уравнения движения гамильтоновы. Классическая динамика (не обобщенная, а просто гамильтонова) происходит в фазовом пространстве $-\infty < P, Q < \infty$ без каких-либо ограничительных связей и определяется физическим гамильтонианом

$$H_{\text{phys}} = \mu \sqrt{P^2 + e^{2dt}(Q^2 + 1 - \zeta e^{-2t})}. \quad (15)$$

Отметим, что согласно “канонической” процедуре [5] калибровочное условие (11) и первичная связь первого рода $\varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$ образуют вторичные связи второго рода. Далее следует выполнить каноническое преобразование

$$P, p; Q, q \longrightarrow P, p; Q, q - e^t.$$

Такое каноническое преобразование, зависящее от времени, приводит к тому, что канонический гамильтониан, равный нулю на уравнениях движения, переходит в H_{phys} , а скобки Дирака для переменных P, Q переходят в обычные скобки Пуассона.

5. КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ

Канонические переменные P, Q независимы и определены на всей фазовой плоскости. Квантование подразумевает, что мы определяем два самосопряженных оператора $\hat{P}$, $\hat{Q}$ (в данной ситуации это возможно) и налагаем на них канонические

¹⁾Возможен выбор и другого калибровочного класса, например $Q = f(t)$. В этом случае физическими переменными будут q, p и это будет уже другая модель.

коммутационные соотношения

$$\widehat{Q}\widehat{P} - \widehat{P}\widehat{Q} \equiv [\widehat{Q}, \widehat{P}] = i.$$

Построим гамильтониан $\widehat{H}_{\text{phys}}$. Для этого воспользуемся спектральной теоремой и ее следствиями (см. [12]).

Пусть $\hat{h}$ – самосопряженный оператор, действующий на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть оператор $\hat{h}$ имеет чисто точечный спектр λ_N , т. е. собственные векторы $|\phi_N\rangle$ этого оператора образуют базис пространства $\mathcal{H}$. Тогда оператор $\hat{h}$ можно представить в виде линейной комбинации проекторов

$$\hat{h} = \sum_N \lambda_N |\phi_N\rangle \langle \phi_N|,$$

причем область его определения состоит из тех векторов $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, для которых

$$\sum_N \lambda_N^2 |\langle \phi_N | \phi \rangle|^2 < \infty.$$

Если есть классическая наблюдаемая $f(h)$, то соответствующая наблюдаемая в квантовой механике $\hat{f}(h)$ определяется следующим образом:

$$\hat{f}(h) = \sum_N f(\lambda_N) |\phi_N\rangle \langle \phi_N|,$$

и если функция $f(\lambda)$ вещественнозначная, то оператор $\hat{f}(h)$ самосопряжен.

В рассматриваемом случае

$$H_{\text{phys}} = f(h) = \mu\sqrt{h}, \quad \hat{h} = \widehat{P}^2 + e^{2dt}(\widehat{Q}^2 + 1 - \zeta e^{-2t}).$$

Самосопряженный оператор $\hat{h}$ с точностью до коэффициента $1/2$ – гамильтониан гармонического осциллятора с единичной массой и частотой, равной $\omega(t) = e^{dt}$. Его собственные состояния $|\phi_N(t)\rangle$ и собственные значения $\lambda_N(t)$ находятся из уравнения $\hat{h}|\phi_N(t)\rangle = \lambda_N(t)|\phi_N(t)\rangle$ (время в данной задаче играет роль параметра) и хорошо известны.

Введем операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-dt/2}\widehat{P} + ie^{dt/2}\widehat{Q}), \quad \hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-dt/2}\widehat{P} - ie^{dt/2}\widehat{Q}),$$

тогда

$$|\phi_N(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a}^+(t))^N |\phi_0(t)\rangle, \quad \lambda_N(t) = e^{dt}(2N+1) + e^{2dt}(1 - \zeta e^{-2t}), \quad N = 0, 1, \dots,$$

где $|\phi_0(t)\rangle$ – решение уравнения $\hat{a}(t)|\phi_0(t)\rangle = 0$.

Теперь можно определить физический гамильтониан

$$\widehat{H}_{\text{phys}} = \mu \sum_{N=0}^{\infty} \sqrt{e^{dt}(2N+1) + e^{2dt}(1 - \zeta e^{-2t})} |\phi_N(t)\rangle \langle \phi_N(t)|. \quad (16)$$

Чтобы физический гамильтониан был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 + e^{dt}(1 - \zeta e^{-2t}) \geq 0.$$

Если теперь потребовать, чтобы рассматриваемая задача была определена при любых временах $(-\infty < t < \infty)$, на параметры задачи следует наложить условие²⁾

$$\zeta \leq d \frac{(d-2)^{2/d-1}}{2^{2/d}}, \quad d > 2. \quad (17)$$

Заданное состояние модели $|\Phi_0\rangle$ из области определения $\hat{H}_{\text{phys}}(t_0)$ эволюционирует согласно уравнению Шредингера³⁾

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{phys}} |\Phi(t)\rangle, \quad |\Phi(t_0)\rangle = |\Phi_0\rangle.$$

Если воспользоваться разложением

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N(t) |\phi_N(t)\rangle, \quad (18)$$

то для коэффициентов разложения $c_N(t)$ можно записать следующую систему дифференциальных рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{c}_N(t) + i\mu\sqrt{\lambda_N(t)}c_N(t) = & \frac{1}{4}d(\sqrt{(N+2)(N+1)}c_{N+2}(t) - \\ & - \sqrt{N(N-1)}c_{N-2}(t)), \quad N = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

6. НАБЛЮДАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Какие свойства модели интересны? Прежде всего интерес представляют геометрия пространства-времени, которое получается в процессе эволюции начального состояния, и состояние материи в этом пространстве-времени. Поэтому для начала ограничимся такими наблюдаемыми: метрика пространства-времени модели и тензор энергии-импульса скалярного поля. Для нахождения квантовых наблюдаемых нужно определить наблюдаемые классические.

Метрика в модели определяется величиной масштабного фактора $a(t)$ и компонентой метрического тензора $g_{00} = -e^2$:

$$a = \frac{\mu}{m\sqrt{\zeta}} e^t, \quad g_{00} = -\mu^2 \frac{e^{2dt}}{P^2 + e^{2dt}(Q^2 + 1 - \zeta e^{-2t})}.$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид (см. (3))

$$T_0^0 = -\frac{me^{-dt}}{2\Omega_d}(e^{-dt}P^2 + e^{dt}Q^2), \quad T_k^i = \delta_k^i \frac{me^{-dt}}{2\Omega_d}(e^{-dt}P^2 - e^{dt}Q^2), \quad T_0^i = 0,$$

²⁾Условие конечности ϵ превращает это соотношение в строгое неравенство.

³⁾Однопараметрическое семейство гамильтонианов $\hat{H}_{\text{phys}}(t)$ имеет общую область определения.

квантово-механические наблюдаемые –

$$\hat{g}_{00} = -\mu^2 e^{dt} \sum_{N=0}^{\infty} \left| \phi_N(t) \right\rangle \frac{1}{2N+1 + e^{dt}(1 - \zeta e^{-2t})} \langle \phi_N(t) |, \quad (19)$$

$$\hat{T}_0^0 = -\frac{me^{-dt}}{2\Omega_d} (\hat{a}^+(t)\hat{a}(t) + \hat{a}(t)\hat{a}^+(t)), \quad \hat{T}_k^i = \delta_k^i \frac{me^{-dt}}{2\Omega_d} ((\hat{a}^+(t))^2 + (\hat{a}(t))^2). \quad (20)$$

Что же касается масштабного фактора, то в выбранном калибровочном классе эта величина – параметр. Более того, так как масштабный фактор – инвариант при репараметризационных преобразованиях (8), после всех проведенных вычислений время t следует выразить через инвариантный масштабный фактор a .

Знание коэффициентов разложения $c_N(t)$ для состояния $|\Phi(t)\rangle$ (см. (18)) позволяет просто вычислить средние значения наблюдаемых в этом состоянии:

$$\begin{aligned} g_{00}(t) &\equiv \langle \Phi(t) | \hat{g}_{00} | \Phi(t) \rangle = -\mu^2 e^{dt} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_N(t) c_N(t)}{2N+1 + e^{dt}(1 - \zeta e^{-2t})}, \\ T_0^0(t) &\equiv \langle \Phi(t) | \hat{T}_0^0 | \Phi(t) \rangle = -\frac{me^{-dt}}{2\Omega_d} \sum_{N=0}^{\infty} (2N+1) \bar{c}_N(t) c_N(t), \\ T(t) \delta_k^i &\equiv \langle \Phi(t) | \hat{T}_k^i | \Phi(t) \rangle = \delta_k^i \frac{me^{-dt}}{2\Omega_d} \sum_{N=2}^{\infty} \sqrt{N(N-1)} (\bar{c}_N(t) c_{N-2}(t) + \bar{c}_{N-2}(t) c_N(t)). \end{aligned}$$

7. ВЫЧИСЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ $M \ll M_P$

Из соотношения (17) можно получить ограничение

$$\mu < \frac{1}{[(d-1)\Omega_d]^{1/(d-2)}} \sqrt{\frac{d}{d-2}} \left(\frac{m}{m_P} \right)^{(d-1)/(d-2)}, \quad d > 2,$$

поэтому, если $m \ll m_P$, можно считать $\mu \rightarrow 0$. А так как физический гамильтониан $\hat{H}_{\text{phys}}$ пропорционален этому малому параметру, то в некотором достаточно большом⁴⁾ интервале от начального момента времени t_0 заданное начальное состояние $|\Phi_0\rangle$ практически не изменяется.

Пусть начальное состояние вакуумное, тогда имеем

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi_0\rangle = |\phi_0(t_0)\rangle, \quad \hat{a}(t_0)|\phi_0(t_0)\rangle = 0. \quad (21)$$

Теперь это состояние следует разложить по базису $|\phi_N(t)\rangle$ для определения коэффициентов $c_N(t)$ и вычислить средние значения наблюдаемых как функции масштабного фактора a .

Опуская промежуточные вычисления, приведем ответы: коэффициенты разложения

$$c_{2N} = \frac{(-1)^N \sqrt{(2N)!}}{2^N N! \sqrt{\text{ch}(d(t-t_0)/2)}} \text{th}^N \frac{d(t-t_0)}{2}, \quad c_{2N+1}(t) = 0, \quad N = 0, 1, \dots,$$

⁴⁾Если начальное состояние не сильно возбуждено, то грубо это приближение работает, когда безразмерный масштабный фактор $0 < q \ll (d/\mu)^{1/d} \gg 1$.

тензор энергии импульса (см. рис. 1)

$$T_0^0(a) = -\frac{m}{4\Omega_d a_0^d} \left[1 + \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2d} \right], \quad T(a) = -\frac{m}{4\Omega_d a_0^d} \left[1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^{2d} \right], \quad (22)$$

квантовая компонента метрического тензора⁵⁾ (см. рис. 2)

$$g_{00}(a) = -\frac{d(d-1)}{4} m m_P^{d-1} a_0^{d/2} \frac{a^{3d/2}}{a^d + a_0^d} \int_0^1 \frac{du u^{\beta(a)-1}}{\sqrt{1 - uz^2(a)}}, \quad (23)$$

$$\beta(a) = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2m} \Omega_d m_P^{d-1} a^{d-2} (2m_\lambda^2 a^2 - d(d-1)) \right], \quad z(a) = \frac{a^d - a_0^d}{a^d + a_0^d},$$

где a_0 – начальный масштабный фактор.

Мы не будем подробно анализировать полученные формулы. Цель этой работы – построение квантово-механической модели в рамках общей теории относительности, и эти формулы лишь иллюстрируют ее возможности. Отметим лишь асимптотическое поведение полученных решений.

Во-первых, определим плотность энергии $\varepsilon = -T_0^0$ и давление $p\delta_i^k = T_i^k$. Тогда уравнение состояния материи в начальный момент времени $\varepsilon = \varepsilon(a_0), p(a_0) = 0$ выходит на асимптотику ($a \gg a_0$)

$$\varepsilon = -p = \frac{1}{2} \varepsilon(a_0). \quad (24)$$

Во-вторых, рассмотрим классический аналог полученных решений. В начальный момент зададим состояние поля с минимальной энергией (аналог вакуумного состояния) – $\phi(t_0) = \dot{\phi}(t_0) = 0$. Тогда решение классических уравнений движения в собственном времени τ [10] хорошо известно – это метрика де Ситтера, причем скалярное поле остается невозбужденным:

$$\phi(\tau) = 0, \quad e(\tau) = 1, \quad a(\tau) = a(\tau_0) \operatorname{ch} \kappa_{\text{dS}}(\tau - \tau_0), \quad \kappa_{\text{dS}}^2 = \frac{2m_\lambda^2}{d(d-1)}.$$

Асимптотика этого решения при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид

$$a(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{\kappa_{\text{dS}} \tau}.$$

В рассмотренной модели нетрудно найти асимптотику среднего значения g_{00} :

$$g_{00}(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} -\frac{d(d-1)}{2} \sqrt{\pi \Omega_d} (m_P a_0)^{(d-1)/2} \frac{m}{m_\lambda} \sqrt{\frac{m}{m_P}}.$$

Если теперь по этой метрике перейти к собственному времени, то закон роста масштабного фактора тоже будет экспоненциальным (метрика де Ситтера), но показатель роста будет совершенно другим:

$$a(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\kappa_{\text{dS}} \kappa_Q} \tau}, \quad \kappa_Q^2 = \frac{4\varepsilon(a_0)}{\pi d(d-1) m_P^{d-1}}, \quad \varepsilon(a_0) = \frac{m}{2\Omega_d a_0^d}, \quad (25)$$

⁵⁾ Пусть $F(\alpha, \beta; \gamma | z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, тогда

$$\int_0^1 \frac{du u^{\beta-1}}{\sqrt{1-z^2 u}} = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{1}{2}, \beta; \beta+1 \mid z^2\right).$$

Рис. 1. Графики T_0^0 (сплошная кривая) и T (штриховая кривая) в зависимости от масштабного фактора. Единица измерения компонент $T_\mu^\nu = m/(2a_0^d \Omega_d)$, $d = 3$.

Рис. 2. Графики g_{00} в зависимости от масштабного фактора (в единицах μ^2); $\zeta = 1.8$ – сплошная кривая, $\zeta = 1.5$ – штриховая кривая, $\zeta = 1$ – пунктирная кривая, $d = 3$, $q_0 = 1/16$.

где $\varepsilon(a_0)$ – плотность энергии нулевых колебаний в начальный момент. Более того, этот показатель роста зависит от начального масштабного фактора a_0 , величины, которой нет среди параметров лагранжиана исходной классической теории. Он определяется начальным квантовым состоянием, которое только в начальный момент является вакуумное (особенность нестационарной задачи). Что же по-другому “раскачивает” масштабный фактор в квантовой теории? Ответ, в общем-то, очевиден – нулевые колебания осциллятора, который отвечает за материю в рассмотренной модели. Отметим также, что “затравочный” Λ -член (определяется κ_{ds}^2) взаимодействует с квантовым κ_Q^2 не по правилу среднеарифметического (т. е. сложения), а по правилу среднегеометрического (перемножения с извлечением корня квадратного), что говорит о существенном взаимном влиянии гравитации и материи в данной модели.

Благодарности. Б. Л. Воронов говорит, что если участник “уносит” с семинара одну идею, то это хороший семинар, если больше – уникальный. В этом смысле любая беседа с Игорем Викторовичем Тютиным уникальна. Поэтому я искренне благодарен Игорю Викторовичу за возможность с ним общаться (в том числе и по поводу этой работы) и поздравляю его с днем рождения.

Автор благодарен С. Апенко, А. Семенову, Э. Ахмедову за обсуждения, а также П. Арсееву, К. Зыбину, А. Маршакову и участникам руководимых ими семинаров за возможность высказаться и замечания. Отдельная благодарность Е. Гончарову за ценное замечание и А. Смирнову за уточняющие пояснения.

Список литературы

- [1] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.
- [2] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.
- [3] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [4] П. А. М. Дирак, *Собрание научных трудов*, т. IV: *Гравитация и космология. Воспоминания и размышления (лекции, научные статьи 1937–1984 гг.)*, Физматлит, М., 2005.
- [5] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [6] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, *Phys. Rev. D*, **13**:12 (1976), 3214–3218.
- [7] А. Ю. Морозов, *УФН*, **162**:8 (1992), 83–175.
- [8] А. В. Маршаков, *УФН*, **172**:9 (2002), 977–1020.
- [9] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, 1995.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 1988.
- [11] П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, М., 1968.
- [12] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983.

Поступила в редакцию 18.08.2015