Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Соответствие Вейля для заряженной частицы в поле магнитного монополя, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 383–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:44:02

© 2016 г.

М. А. Соловьев*

СООТВЕТСТВИЕ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ

Построено обобщенное соответствие Вейля для электрически заряженной частицы в поле магнитного монополя Дирака. Исходными для нас являются глобальное лагранжево описание данной системы в терминах теории расслоений как системы со связью и калибровочной симметрией $U(1)$ и редукция предсимплектической структуры, возникающей на поверхности связи. В отличие от предложенной недавно схемы квантования, основанной на использовании кватернионного гильбертова модуля, в нашем построении классическим наблюдаемым сопоставляются операторы, действующие в комплексном гильбертовом пространстве $U(1)$ -эквивариантных функций, введенном Гройбом и Петри. Эти функции определены на тотальном пространстве расслоения, топологически эквивалентного расслоению Хопфа.

Ключевые слова: соответствие Вейля, звездочное произведение, магнитный монополь, квантование зарядов, расслоение Хопфа, калибровочная симметрия, предсимплектическая редукция.

DOI: 10.4213/tmf9029

*Посвящается 75-летию
Игоря Викторовича Тютина*

1. ВВЕДЕНИЕ

После замечательных работ Дирака [1], [2], в которых была выдвинута идея о магнитных монополях (частиц с одним магнитным полюсом) и развита общая теория заряженных частиц и монополей, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, появилось необозримое число статей по этой тематике. Дирак построил свою теорию, предполагая, что каждый полюс является концом ненаблюдаемой струны, вдоль которой электромагнитные потенциалы сингулярны, и вводя динамические координаты и импульсы для описания движения струн. В 1974 г. Тютин [3], используя методы теории самосопряженных операторов, выполнил строгий анализ рассеяния бесспиновой заряженной частицы в поле бесконечно тонкого соленида, потенциал которого совпадает с потенциалом монополя Дирака. Он доказал,

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: soloviev@td.lpi.ru

в частности, что сечение рассеяния не зависит от направления нити сингулярностей в том и только том случае, когда магнитный поток принимает дискретные значения, соответствующие дираковскому условию квантования зарядов. Годом позже Ву и Янг [4], [5], а также Гройб и Петри [6] показали, что теория расслоений дает возможность последовательного описания квантовой динамики частицы в поле монополя без линий сингулярности и выявляет топологическую природу квантования зарядов. Расслоение, соответствующее данной задаче, – это расслоение Хопфа, использованное им в статье [7] для определения третьей гомотопической группы двумерной сферы. Впоследствии было показано, что расслоение Хопфа возникает естественным образом во многих задачах теоретической физики (см. работу [8]). Относительно используемых ниже понятий теории расслоений мы рекомендуем книгу [9] или статью [10].

Магнитные монополи до сих пор не наблюдали в эксперименте (см. статью [11] по поводу их экспериментального статуса). Тем не менее квантовая динамика системы заряд–монополь, являясь инструктивным прототипом ряда важных структур современной математической физики, продолжает привлекать внимание исследователей. К наиболее интересным обсуждавшимся в последнее время вопросам относится полное построение для этой системы соответствия Вейля–Вигнера между классическими и квантовыми величинами. Сложность этой задачи обусловлена тем, что симплектическая структура ее фазового пространства не является канонической. В работе [12] была предпринята попытка построить соответствие Вейля для заряженной частицы в поле монополя в терминах кватернионного гильбертова модуля, следуя предшествующей работе Эмха и Ядзика [13], где неканонические коммутационные соотношения генераторов трансляций конфигурационного пространства реализованы с помощью кватернионнозначных операторов. Цель данной работы состоит в определении обобщенного соответствия Вейля для системы заряд–монополь с более привычным операторным представлением в комплексном гильбертовом пространстве. Это удастся сделать, используя лагранжево описание [14], [15] динамики на расширенном фазовом пространстве, объединяющем динамические и калибровочные степени свободы.

Настоящая статья устроена следующим образом. В разделе 2 мы вводим обозначения и напоминаем основные факты о гамильтоновых уравнениях движения заряженной частицы в магнитном поле. В разделе 3 определено главное расслоение $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ со структурной группой $U(1)$, использование которого позволяет построить глобальное лагранжево описание динамики заряженной частицы в поле монополя. Соответствующий слабо калибровочно-инвариантный лагранжиан и возникающая при преобразовании Лежандра поверхность связи в расширенном фазовом пространстве рассматриваются в разделе 4. В разделе 5 выполнена редукция предсимплектической структуры на поверхности связи, устанавливающая связь лагранжевой системы на пространстве расслоения с исходной гамильтоновой системой. В разделе 6 показано, что последовательное квантование рассматриваемой динамической системы как системы со связью первого рода приводит к дираковскому условию квантования зарядов и выделению в гильбертовом пространстве состояний замкнутого подпространства эквивариантных (т. е. согласованных с действием калибровочной группы $U(1)$) функций. В этом же разделе обобщенное соответствие Вейля определено как суперпозиция трех отображений: подъема функции на рас-

ширенное фазовое пространство, обычного преобразования Вейля и последующего ограничения операторов на эквивариантные волновые функции. В разделе 7 обсуждается возникающее при этом звездочное произведение функций на исходном фазовом пространстве. Раздел 8 содержит заключительные замечания.

2. ГАМИЛЬТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Движение электрически заряженной частицы с зарядом e и массой m в магнитном поле $\mathbf{B}$ описывается уравнением

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

где

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right)$$

и предполагается, что в выбранной системе единиц скорость света $c = 1$. Хорошо известно (см., например, книгу [16]), что уравнение (1) можно записать в гамильтоновом виде:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\},$$

взяв в качестве гамильтониана кинетическую энергию

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \quad (2)$$

и определив пуассонову структуру посредством выражения

$$\{f, g\}_B = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} + e\epsilon_{ijk} B^i \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_k}, \quad (3)$$

что равносильно заданию симплектической формы на фазовом пространстве следующим образом:

$$\omega = dp_i \wedge dx^i + \frac{e}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k. \quad (4)$$

В формулах (3), (4) и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Если магнитное поле можно записать как $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, то уравнение (1) является гамильтоновым и по отношению к стандартной симплектической структуре $dp_i \wedge dx^i$ с гамильтонианом $H_{\mathbf{A}} = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2/2m$. Однако глобально такое представление невозможно в случае поля магнитного монополя, которое имеет вид

$$B^i(\mathbf{x}) = \mu \frac{x^i}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (5)$$

где μ – заряд монополя. Поток поля (5) через сферу, окружающую монополь, равен $4\pi\mu$, тогда как для поля вида $\nabla \times \mathbf{A}$ он равен нулю по теореме Стокса. Соответственно, любой вектор-потенциал для поля (5) имеет сингулярности. В частности, при определении его в сферических координатах посредством равенств $A_r = 0$, $A_\vartheta = 0$, $A_\varphi = (\mu/r) \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ нитью сингулярности служит полюсь $\vartheta = \pi$, а если заменить tg

на $-\text{ctg}$, мы снова получаем лишь локальное представление с нитью сингулярностей $\vartheta = 0$.

При рассмотрении движения заряженной частицы в поле монополя мы считаем $\mathbf{x}$ вектором взаимного расстояния между частицей и монополем и исключаем точку $\mathbf{x} = 0$ из конфигурационного пространства, полагая, что оно имеет вид $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

3. ОТОБРАЖЕНИЕ КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И РАССЛОЕНИЕ ХОПФА

Глобальный лагранжиан для рассматриваемой системы можно построить на расширенном конфигурационном пространстве, включающем калибровочную степень свободы. Удобная реализация этого расширения получается следующим образом. Рассмотрим множество $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ пар комплексных чисел $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ таких, что $\bar{z}z = |z_1|^2 + |z_2|^2 \neq 0$. Преобразование π_{KS} Кустаанхеймо–Штифеля [17] отображает $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ по правилу

$$\pi_{\text{KS}}(z) = (x^1, x^2, x^3), \quad x^j = \bar{z}\sigma_j z, \quad (6)$$

где σ_j – матрицы Паули, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (и где $\bar{z}$ трактуется как строка, т.е. черта подразумевает комплексное сопряжение и транспонирование). Группа $U(1)$ действует на множестве $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ естественным образом: $z \rightarrow ze^{i\theta}$, $e^{i\theta} \in U(1)$. Данное действие является свободным, т.е. стабилизатор любой точки z тривиален, и легко проверить, что $\pi_{\text{KS}}(z) = \pi_{\text{KS}}(z')$ в том и только том случае, когда z и z' принадлежат одной орбите. Это означает, что мы имеем главное расслоение с тотальным пространством $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, базой $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, проекцией π_{KS} и группой $U(1)$. Следует упомянуть и другую реализацию этого расслоения: с тотальным пространством, составленным из пар (r, g) , где $r \in \mathbb{R}_+$, $g = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2)$, т.е. $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, и с проекцией на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, определяемой формулами

$$|\mathbf{x}| = r, \quad \frac{1}{r} \sum_j x^j \sigma_j = g \sigma_3 g^{-1}. \quad (7)$$

При этом группа $U(1)$ действует на $SU(2)$ правыми сдвигами как подгруппа диагональных матриц. При ограничении на единичную сферу в $\mathbb{C}^2$, что соответствует $r = 1$ во второй реализации, отображение π_{KS} становится отображением Хопфа и мы получаем расслоение Хопфа $S^3 \approx SU(2) \rightarrow SU(2)/U(1) \approx S^2$. Поэтому рассматриваемое расслоение, как и расслоение Хопфа, не имеет глобального сечения, т.е. не существует непрерывного отображения $\varsigma: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ такого, что $\pi_{\text{KS}} \circ \varsigma = \text{id}$.

Векторные поля на пространстве $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ запишем в виде

$$v_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}.$$

В частности, вектор с компонентами $v = iz$, $\bar{v} = -i\bar{z}$ является касательным к $U(1)$ -орбите точки z , т.е. к проходящему через нее слою. На рассматриваемом главном расслоении имеется естественная связность, геометрически задаваемая гладким полем горизонтальных пространств H_z , состоящих из касательных векторов, удовлетворяющих условию

$$\bar{z}v - \bar{v}z = 0. \quad (8)$$

Иначе говоря, пространство H_z ортогонально слою в точке z относительно скалярного произведения $\text{Re } \bar{u}v$. Векторное поле

$$\nabla_j = \frac{1}{2\bar{z}z} \left(z_\alpha \sigma_j^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial z_\beta} + \bar{z}_\alpha \sigma_j^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} \right), \quad (9)$$

имеющее компоненты $v_j = (2\bar{z}z)^{-1} \sigma_j z$, $\bar{v}_j = (2\bar{z}z)^{-1} \bar{\sigma}_j \bar{z}$, очевидно, удовлетворяет условию (8). Производная отображения (6) переводит вектор $(\nabla_j)_z$ в вектор $w_j^i (\partial/\partial x^i)_{\pi_{KS}(z)}$ с компонентами

$$w_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial z_\alpha} v_{j\alpha} + \bar{v}_{j\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2\bar{z}z} (\bar{z} \sigma_i \sigma_j z + \bar{\sigma}_j \sigma_i \bar{z}) = \delta_j^i.$$

Таким образом, ∇_j является горизонтальным лифтом векторного поля $\partial/\partial x^j$.

4. ЛАГРАНЖИАНЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ РАССЛОЕНИЯ

В работе [15] рассматривался лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [4(\bar{z}z)(\dot{\bar{z}}\dot{z}) + (\dot{\bar{z}}\dot{z} - \bar{z}\dot{z})^2] + i\epsilon\mu \frac{\dot{\bar{z}}\dot{z} - \bar{z}\dot{z}}{\bar{z}z}, \quad (10)$$

определенный на пространстве $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Эквивалентный лагранжиан в терминах переменных r, g для второй упомянутой в разделе 3 реализации расслоения Кустаанхеймо–Штифеля обсуждался в статье [14]. Лагранжиан (10) слабо инвариантен относительно калибровочных преобразований $z \rightarrow ze^{\theta(t)}$. Действительно, выражение в квадратных скобках в (10) инвариантно относительно этих преобразований, а выражение $i(\dot{\bar{z}}\dot{z} - \bar{z}\dot{z})/\bar{z}z$ изменяется на $2\dot{\theta}$, т. е. на полную производную.

Используя запись $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_1 e^{i\varphi_2}$, легко видеть, что сумма угловых скоростей $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$ входит в лагранжиан (10) линейно с коэффициентом $\epsilon\mu$, что демонстрирует его сингулярность в явном виде. Соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид тождества $0 = 0$, т. е. движение по калибровочной координате $\chi = \varphi_1 + \varphi_2$ полностью не определено. Вводя импульсные переменные

$$k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{z}}} = 2m(\bar{z}z)\dot{z} + m(\dot{\bar{z}}\dot{z} - \bar{z}\dot{z})z + i\epsilon\mu \frac{z}{\bar{z}z}, \quad (11)$$

$$\bar{k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2m(\bar{z}z)\dot{\bar{z}} - m(\dot{\bar{z}}\dot{z} - \bar{z}\dot{z})\bar{z} - i\epsilon\mu \frac{\bar{z}}{\bar{z}z}, \quad (12)$$

мы находим, что они связаны соотношением

$$\bar{z}k - \bar{k}z = 2i\epsilon\mu. \quad (13)$$

Как и для всякого сингулярного лагранжиана, формулы (11), (12) не определяют скорости $\dot{z}$, $\dot{\bar{z}}$ как однозначные функции импульсов и координат, но им удовлетворяют функции $\dot{z} = k/(2m(\bar{z}z))$, $\dot{\bar{z}} = \bar{k}/(2m(\bar{z}z))$. Подставляя их в выражение $\bar{k}\dot{z} + \dot{\bar{z}}k - L$, мы получаем гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m\bar{z}z} \left(\bar{k}k - \frac{\epsilon^2 \mu^2}{\bar{z}z} \right). \quad (14)$$

Любое другое решение уравнений (11), (12) также дает этот гамильтониан на поверхности связи.

На расширенном фазовом пространстве $\mathcal{P} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^2$ имеется стандартная симплектическая структура

$$\Omega = d\bar{k} \wedge dz - d\bar{z} \wedge dk. \quad (15)$$

Разложение векторного поля ξ на пространстве $\mathcal{P}$ по базисным векторным полям запишем в следующем виде:

$$\xi = v_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial k_\alpha} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{k}_\alpha}. \quad (16)$$

Тогда верно равенство

$$\Omega(\xi, \xi') = 2 \operatorname{Re}(\bar{u}v' - \bar{u}'v). \quad (17)$$

Поверхность связи (13) обозначим $\mathcal{C}$, и пусть $c(z, k) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(\bar{z}k) - \epsilon\mu$. Касательное пространство $T_{(z,k)}\mathcal{C}$ определяется условием $dc_{(z,k)}(\xi) = 0$ или, в подробной записи,

$$T_{(z,k)}\mathcal{C} = \{\xi \in T_{(z,k)}\mathcal{P} : \operatorname{Im}(\bar{z}u - \bar{k}v) = 0\}. \quad (18)$$

Поверхность $\mathcal{C}$ имеет коразмерность, равную 1, и поэтому коизотропна. Иными словами, для любых $(z, k) \in \mathcal{C}$ касательное пространство $T_{(z,k)}\mathcal{C}$ содержит симплектически ортогональное ему подпространство

$$(T_{(z,k)}\mathcal{C})^\perp = \{\xi' \in T_{(z,k)}\mathcal{P} : \Omega(\xi, \xi') = 0 \text{ для всех } \xi \in T_{(z,k)}\mathcal{C}\}.$$

Группа $U(1)$ действует на $\mathcal{C}$ посредством преобразований $z \rightarrow ze^{i\theta}$, $k \rightarrow ke^{i\theta}$, и подпространство $(T_{(z,k)}\mathcal{C})^\perp$ есть не что иное, как одномерное пространство векторов, касательных к орбите точки (z, k) относительно этого действия. Действительно, эти векторы кратны вектору $\xi_{(z,k)}$ с компонентами $v = iz$, $\bar{v} = -i\bar{z}$, $u = ik$, $\bar{u} = -i\bar{k}$, и условие $\Omega(\xi, \xi_{(z,k)}) = 0$ равносильно условию $\operatorname{Im}(\bar{z}u - \bar{k}v) = 0$ в формуле (18). Таким образом, предсимплектическая структура на поверхности $\mathcal{C}$, определяемая образом $i_C^*\Omega = \Omega|_{\mathcal{C}}$ симплектической формы (15) относительно естественного вложения $i_C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$, согласована с действием группы $U(1)$ на $\mathcal{C}$. Эта предсимплектическая структура индуцирует симплектическую структуру на фактор-многообразии $\mathcal{C}/U(1)$, которое согласно общепринятой терминологии [18] называется редуцированным многообразием для $(\mathcal{C}, \Omega|_{\mathcal{C}})$.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что динамическая система, определяемая на $\mathcal{C}/U(1)$ гамильтонианом (14), тождественна гамильтоновой системе раздела 2. Пусть $\mathcal{B} = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$. Определим проекцию $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ следующим образом:

$$\pi(z, k) = (\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad x^j = \bar{z}\sigma_j z, \quad p_j = \frac{1}{2\bar{z}z}(\bar{z}\sigma_j k + \bar{k}\sigma_j z). \quad (19)$$

Обозначая ограничение отображения π на поверхность связи $\mathcal{C}$ через π_C , имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xleftarrow{i_C} & \mathcal{C} \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_C & \\ \mathcal{B} & & \end{array}. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 1. *Четверка $(\mathcal{C}, U(1), \mathcal{B}, \pi_c)$ является главным расслоением со структурной группой $U(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $U(1)$ действует на поверхности $\mathcal{C}$ свободно. Это действие также является собственным, поскольку группа $U(1)$ компактна. Отображение π_c сюръективно, так как для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ найдется такое $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, что $\pi_{\text{KS}}(z) = \mathbf{x}$ и для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ найдется единственное $k \in \mathbb{C}^2$ такое, что $(z, k) \in \mathcal{C}$ и $\pi(z, k) = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, поскольку детерминант системы уравнений

$$\text{Im}(\bar{z}k) = e\mu, \quad \frac{1}{\bar{z}z} \text{Re}(\bar{z}\sigma_j k) = p_j \quad (21)$$

равен $-1/(\bar{z}z)$ и отличен от нуля. Ясно, что если (z, k) и (z', k') принадлежат одной орбите, то их образы в $\mathcal{B}$ при отображении π_c совпадают. Обратно, если $\pi_c(z, k) = \pi_c(z', k')$, то $\pi_{\text{KS}}(z) = \pi_{\text{KS}}(z')$. Значит, $z' = ze^{i\theta}$ при некотором $e^{i\theta} \in U(1)$ и, следовательно, $k' = ke^{i\theta}$. Остается заметить, что выполнено условие локальной тривиальности, которое входит в определение главного расслоения. Действительно, оно выполнено для расслоения, рассмотренного в разделе 3, а в силу сказанного выше каждому его локальному сечению соответствует локальное сечение обсуждаемого здесь расслоения. Теорема доказана.

5. РЕДУКЦИЯ

Чтобы показать связь между симплектической формой (4) на пространстве $\mathcal{B}$ и симплектической формой (15) на расширенном фазовом пространстве $\mathcal{P}$, а также между гамильтонианами (2) и (14), нам понадобится легко проверяемое тождество

$$\sum_j (\bar{z}\sigma_j u)(\bar{z}'\sigma_j u') = 2(\bar{z}u')(\bar{z}'u) - (\bar{z}u)(\bar{z}'u'), \quad (22)$$

которое справедливо при любых z, z', u, u' в пространстве $\mathbb{C}^2$. Его частным случаем является тождество

$$\sum_j (\bar{z}\sigma_j u)^2 = (\bar{z}u)^2. \quad (23)$$

Вычислим сначала поднятие $\pi^*H \stackrel{\text{def}}{=} H \circ \pi$ гамильтониана $H = (1/2m) \sum_j p_j^2$ на пространство $\mathcal{P}$ посредством отображения (19).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция π^*H имеет вид*

$$\pi^*H = \frac{1}{2m\bar{z}z} \left(\bar{k}k + \frac{(\bar{z}k - \bar{k}z)^2}{4\bar{z}z} \right). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тождество (22), получаем, что

$$\sum_j (\bar{z}\sigma_j k + \bar{k}\sigma_j z)^2 = 4(\bar{z}z)(\bar{k}k) - (\bar{z}k - \bar{k}z)^2,$$

откуда и следует (24).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\pi_c^* H = \frac{1}{2m\bar{z}z} \left(\bar{k}k - \frac{e^2\mu^2}{\bar{z}z} \right). \quad (25)$$

Пусть, как обычно, $\pi^*\omega$ – обратный образ дифференциальной формы ω относительно отображения π , который определяется посредством соотношения

$$(\pi^*\omega)(\xi, \xi') = \omega(\pi_*\xi, \pi_*\xi'),$$

где π_* – производная отображения π .

ТЕОРЕМА 2. *Обратный образ симплектической формы (4) относительно отображения (19) выражается формулой*

$$\begin{aligned} (\pi^*\omega)(\xi, \xi') &= 2 \operatorname{Re}(\bar{u}v' - \bar{u}'v) - \frac{2}{\bar{z}z} [\operatorname{Im}(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}u - \bar{k}v) - \operatorname{Im}(\bar{z}v) \operatorname{Im}(\bar{z}u' - \bar{k}v')] - \\ &\quad - \frac{4}{(\bar{z}z)^2} (\operatorname{Im}(\bar{z}k) - e\mu) [\operatorname{Im}(\bar{z}z) \operatorname{Im}(\bar{v}v') - \operatorname{Im}((\bar{v}z)(\bar{z}v'))] \end{aligned} \quad (26)$$

при любых касательных векторах $\xi = (u, v)$ и $\xi' = (u', v')$ в точке $(z, k) \in \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторные поля на пространстве $\mathcal{B}$ обозначим ξ и запишем в виде

$$\xi = w^j \frac{\partial}{\partial x^j} + s_j \frac{\partial}{\partial p_j}. \quad (27)$$

Из определения (4) следует, что

$$\omega(\xi, \xi') = s_j w'^j - s'_j w^j + e\epsilon_{ijk} B^i w^j w'^k. \quad (28)$$

Производная π_* отображает векторное поле ξ вида (16) с компонентами (v, u) в поле ξ с компонентами

$$w^j = \frac{\partial x^j}{\partial z} v + \bar{v} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} = \bar{z}\sigma_j v + \bar{v}\sigma_j z = 2 \operatorname{Re}(\bar{z}\sigma_j v), \quad (29)$$

$$s_j = \frac{\partial p_j}{\partial k} u + \bar{u} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{k}} + \frac{\partial p_j}{\partial z} v + \bar{v} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}z} \operatorname{Re}[\bar{z}\sigma_j u + \bar{k}\sigma_j v - 2(\bar{z}v)p_j]. \quad (30)$$

Покажем, что при $B^i = \mu \bar{z}\sigma_i z / (\bar{z}z)^3$ подстановка выражений (29), (30) и аналогичных выражений для w'^j, s'_j в формулу (28) дает равенство (26). Вычислим сначала сумму $s_j w'^j$. Она является вещественной частью суммы

$$\frac{1}{\bar{z}z} \sum_j [\bar{z}\sigma_j u + \bar{u}\sigma_j z + \bar{k}\sigma_j v + \bar{v}\sigma_j k - 2(\bar{z}v + \bar{v}z)p_j](\bar{z}\sigma_j v'). \quad (31)$$

Используя (22), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_j 2p_j(\bar{z}\sigma_j v') &\equiv \frac{1}{\bar{z}z} \sum_j (\bar{z}\sigma_j k + \bar{k}\sigma_j z)(\bar{z}\sigma_j v') = \\ &= \frac{1}{\bar{z}z} [(\bar{z}k)(\bar{z}v') + 2(\bar{k}v')(\bar{z}z) - (\bar{k}z)(\bar{z}v')] = 2\bar{k}v' + \frac{2i}{\bar{z}z}(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}k). \end{aligned}$$

Применяя (22) к остальным членам выражения (31), находим, что его можно записать как

$$\begin{aligned}
 2\bar{u}v' + \frac{2i}{\bar{z}z}(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}u) + \frac{1}{\bar{z}z}[2(\bar{z}v)(\bar{k}v') - (\bar{k}v)(\bar{z}v') + 2(\bar{z}k)(\bar{v}v') - (\bar{v}k)(\bar{z}v')] - \\
 - \frac{2}{\bar{z}z}(\bar{z}v + \bar{v}z) \left(\bar{k}v' + \frac{i}{\bar{z}z}(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}k) \right) = 2\bar{u}v' + \frac{2i}{\bar{z}z}(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}u) - \\
 - \frac{1}{\bar{z}z}[(\bar{z}v')(\bar{k}v + \bar{v}k) + 2(\bar{v}z)(\bar{k}v')] + \frac{2}{\bar{z}z}(\bar{z}k)(\bar{v}v') - \\
 - \frac{2i}{(\bar{z}z)^2}(\bar{z}v + \bar{v}z)(\bar{z}v') \operatorname{Im}(\bar{z}k).
 \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогичным образом, $s'_j w^j$ есть вещественная часть выражения

$$\begin{aligned}
 2\bar{u}'v + \frac{2i}{\bar{z}z}(\bar{z}v) \operatorname{Im}(\bar{z}u') - \frac{1}{\bar{z}z}[(\bar{z}v)(\bar{k}v' + \bar{v}'k) + 2(\bar{v}'z)(\bar{k}v)] + \\
 + \frac{2}{\bar{z}z}(\bar{z}k)(\bar{v}'v) - \frac{2i}{(\bar{z}z)^2}(\bar{z}v' + \bar{v}'z)(\bar{z}v) \operatorname{Im}(\bar{z}k).
 \end{aligned} \quad (33)$$

Вычитая формулу (33) из (32), учитывая, что

$$(\bar{z}v')(\bar{k}v + \bar{v}k) - 2(\bar{v}'z)(\bar{k}v) = 2i(\bar{k}v) \operatorname{Im}(\bar{z}v') + 2i \operatorname{Im}((\bar{z}v')(\bar{v}k)),$$

и взяв вещественную часть, мы заключаем, что $s_j w'^j - s'_j w^j$ дает правую часть выражения (26), за исключением членов, содержащих произведение зарядов $e\mu$. Остается убедиться, что

$$e\epsilon_{ijk}B^i w^j w'^k = \frac{4e\mu}{(\bar{z}z)^2}[(\bar{z}z) \operatorname{Im}(\bar{v}v') - \operatorname{Im}((\bar{v}z)(\bar{z}v'))]. \quad (34)$$

Подставляя выражение (29) и аналогичное выражение для w' в левую часть (34), мы замечаем, что

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}(\bar{z}\sigma_i z)(\bar{z}\sigma_j v)(\bar{z}\sigma_k v') \equiv 0,$$

поскольку этот антисимметричный, билинейный по v и v' функционал обращается в нуль при $v' = z$ (и при $v = z$). Члены с $\bar{v}$, $\bar{v}'$, получаемые комплексным сопряжением, также дают нулевой вклад. Поэтому достаточно показать, что

$$\epsilon_{ijk}(\bar{z}\sigma_i z)(\bar{v}\sigma_j z)(\bar{z}\sigma_k v') = -2i(\bar{z}z)[(\bar{z}z)(\bar{v}v') - (\bar{z}v')(\bar{v}z)]. \quad (35)$$

Тогда равенство (34) получается из (35) взятием его вещественной части и умножением на $2e\mu/(\bar{z}z)^3$. Эрмитово-билинейные функционалы в левой и правой частях (35) обращаются в нуль при $v' = z$ и, как легко видеть, совпадают при $\bar{v} = (1, 0)$, $v' = (\frac{1}{0})$. Поэтому они совпадают тождественно, что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Прообраз $\pi_c^* \omega$ симплектической формы ω относительно проекции $\pi_c: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ совпадает с прообразом $i_c^* \Omega = \Omega|_{\mathcal{C}}$ канонической симплектической формы Ω относительно вложения $i_c: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть, как и прежде, $c(z, k) = \text{Im}(\bar{z}k) - \epsilon\mu$ есть вещественная функция, определяющая поверхность связи (13). Выражение $\text{Im}(\bar{z}u - \bar{k}v)$ в правой части (26) есть не что иное, как $(\text{grad } c, \xi) = dc_{(z,k)}(\xi)$, и оно обращается в нуль на векторах, касательных к поверхности связи. Поэтому

$$(\pi^*\omega)(\xi, \xi') = 2 \text{Re}(\bar{u}v' - \bar{u}'v) = \Omega(\xi, \xi') \quad \text{при всех } \xi, \xi' \in T_{(z,k)}\mathcal{C}.$$

Таким образом, теорема 2 показывает, что исходное симплектическое многообразие $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3, \omega)$, рассмотренное в разделе 2, совпадает с редуцированным многообразием для предсимплектического многообразия $(\mathcal{C}, \Omega|_{\mathcal{C}})$.

6. КВАНТОВАНИЕ ЗАРЯДОВ И ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Поскольку расширенное фазовое пространство $\mathcal{P}$ имеет каноническую симплектическую структуру, мы определим соответствие Вейля для функций на $\mathcal{P}$ обычным образом, предполагая сначала, что они интегрируемы по Лебегу и имеют интегрируемое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = \pi^{-4} \int f(z, \bar{z}, k, \bar{k}) e^{-i(\bar{z}v + \bar{v}z + \bar{k}u + \bar{u}k)} d\lambda(z, k), \quad (36)$$

где

$$d\lambda(z, k) = \prod_{\alpha=1}^2 d\text{Re } z_{\alpha} d\text{Im } z_{\alpha} d\text{Re } k_{\alpha} d\text{Im } k_{\alpha}$$

есть лебегова мера на $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Соответствие Вейля сопоставляет функции f оператор A_f , действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{C}^2)$:

$$f \longrightarrow A_f = \pi^{-4} \int \tilde{f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) e^{i(v\bar{Z} + \bar{v}Z + u\bar{K} + \bar{u}K)} d\lambda(u, v), \quad (37)$$

где $Z_{\alpha}, \bar{Z}_{\alpha}$ – операторы умножения на $z_{\alpha}, \bar{z}_{\alpha}$ соответственно, $\hbar$ – постоянная Планка, $K^{\alpha} = -i\hbar\partial/\partial\bar{z}_{\alpha}, \bar{K}^{\alpha} = -i\hbar\partial/\partial z_{\alpha}$.

При квантовании надо последовательно учесть условие связи (13). Преобразование Фурье его левой части дает равенства

$$\widetilde{\bar{z}k} = -\pi^4 \partial_v \partial_{\bar{u}} \delta(v) \delta(\bar{v}) \delta(u) \delta(\bar{u}), \quad \widetilde{\bar{k}z} = -\pi^4 \partial_u \partial_{\bar{v}} \delta(v) \delta(\bar{v}) \delta(u) \delta(\bar{u}).$$

Подставляя эти выражения в (37) и используя соотношение

$$e^{i(v\bar{Z} + \bar{v}Z + u\bar{K} + \bar{u}K)} = e^{i\hbar(\bar{v}u + \bar{u}v)/2} e^{i(v\bar{Z} + \bar{v}Z)} e^{i(u\bar{K} + \bar{u}K)}, \quad (38)$$

мы получаем на формальном уровне, что вещественнозначной функции $2 \text{Im } \bar{z}k$, задающей поверхность связи, соответствует оператор

$$\frac{1}{i}(\bar{Z}K - Z\bar{K}) = \frac{1}{i}(\bar{Z}_{\alpha}K^{\alpha} - Z_{\alpha}\bar{K}^{\alpha}). \quad (39)$$

Поскольку здесь мы имеем дело с обобщенными функциями, строгое рассмотрение подразумевает, что первоначально оператор (39) должен быть определен на гладких, быстро убывающих функциях из пространства Шварца $S(\mathbb{C}^2) = S(\mathbb{R}^4)$ (см.

книгу [19]). Очевидно, что на этой области определения он симметричен. Если использовать полярные координаты, полагая $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то оператор (39) записывается как

$$-\hbar \left(\bar{z}_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} - z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right). \quad (40)$$

Пространство Шварца содержит все функции вида

$$e^{i(n_1\varphi_1+n_2\varphi_2)}\psi_1(r_1)\psi_2(r_2), \quad (41)$$

где n_1, n_2 – целые числа, а ψ_1, ψ_2 принадлежат пространству $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ гладких функций с компактным носителем на открытой положительной полуоси. Функции (41) являются собственными для оператора (40) и образуют тотальное множество в $L^2(\mathbb{C}^2)$. Поэтому оператор (40) в существенном самосопряжен на пространстве $S(\mathbb{C}^2)$, т. е. имеет одно и только одно самосопряженное расширение, а любое его собственное значение имеет вид $\hbar n$, где n – целое число. Таким образом, магнитный и электрический заряды должны удовлетворять условию квантования Дирака:

$$e\mu = \frac{1}{2}\hbar n. \quad (42)$$

К этому же выводу приводит рассмотрение представления группы $U(1)$, реализуемого унитарными операторами U_θ , действующими в $L^2(\mathbb{C}^2)$ по формуле

$$(U_\theta\Psi)(z, \bar{z}) = \Psi(ze^{i\theta}, \bar{z}e^{-i\theta}). \quad (43)$$

Стандартное рассуждение, использующее плотность C_0^∞ в L^2 и унитарность U_θ , показывает, что это представление непрерывно. Действительно, если функция Φ непрерывна и имеет компактный носитель, то очевидно, что $\|U_\theta\Phi - U_{\theta_0}\Phi\|_{L^2}$ при $\theta \rightarrow \theta_0$, а для любого $\Psi \in L^2$ мы имеем

$$\|U_\theta\Psi - U_{\theta_0}\Psi\| \leq \|U_\theta(\Psi - \Phi)\| + \|U_\theta\Phi - U_{\theta_0}\Phi\| + \|U_{\theta_0}(\Psi - \Phi)\| = 2\|\Psi - \Phi\| + \|U_\theta\Phi - U_{\theta_0}\Phi\|.$$

Функции (41) являются собственными для операторов U_θ , поэтому самосопряженное расширение оператора $-i(\partial_{\varphi_1} + \partial_{\varphi_2})$ является инфинитезимальным генератором этой непрерывной однопараметрической унитарной группы и его спектральному разложению соответствует разложение унитарного представления $\{U_\theta\}$. А именно, $L^2(\mathbb{C}^2)$ разлагается в ортогональную прямую сумму замкнутых подпространств E_n , инвариантных относительно всех операторов U_θ , и сужение представления (43) на E_n есть унитарное представление группы $U(1)$, кратное ее одномерному представлению с характером $e^{in\theta}$. Иными словами, элементы E_n обладают свойством эквивариантности [6], [20]:

$$\Psi(ze^{i\theta}, \bar{z}e^{-i\theta}) = e^{in\theta}\Psi(z, \bar{z}). \quad (44)$$

Ортогональные проекторы $L^2(\mathbb{C}^2)$ на E_n выражаются формулой

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} U_\theta d\theta$$

и удовлетворяют соотношениям $P^\dagger = P$, $P^2 = P$, $P_n P_m = 0$ при $n \neq m$.

Практически очевидно, что ограниченные операторы, полученные посредством применения преобразования Вейля к $U(1)$ -инвариантным функциям, коммутируют с операторами U_θ . Это верно и для неограниченных операторов при некотором уточнении формулировки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если A_f – оператор в $L^2(\mathbb{R}^4)$ с областью определения $S(\mathbb{R}^4)$, являющийся преобразованием Вейля $U(1)$ -инвариантного распределения умеренного роста $f \in S'(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$, то

$$U_\theta A_f U_\theta^{-1} \Psi = A_f \Psi \quad \text{для всех } \Psi \in S(\mathbb{R}^4). \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим оператор (38) как $T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}}$. Общая схема [19] распространения соответствия Вейля на распределения умеренного роста в данном случае конкретизируется с применением удобной для нас модификации [21] следующим образом. Если $\Phi, \Psi \in S(\mathbb{R}^4)$, то матричный элемент $\langle \Phi, T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} \Psi \rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$, поскольку из (38) следует равенство

$$\langle \Phi, T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} \Psi \rangle = e^{i\hbar(\bar{v}u + \bar{u}v)/2} \int \Phi^*(z, \bar{z}) e^{i(\bar{z}v + \bar{v}z)} \Psi(z + \hbar u, \bar{z} + \hbar \bar{u}) d\lambda(z) \quad (46)$$

и поскольку линейные преобразования координат и частичное преобразование Фурье являются автоморфизмами этого пространства, а функция $e^{i\hbar(\bar{v}u + \bar{u}v)/2}$ является его мультипликатором. Следовательно, выражение

$$\pi^{-4} \int \tilde{f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) \langle \Phi, T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} \Psi \rangle d\lambda(u, v), \quad (47)$$

представляющее в случае интегрируемых функций $\tilde{f}$ матричный элемент $\langle \Phi, A_f \Psi \rangle$, сохраняет смысл для любого распределения $f \in S'(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$, если (47) понимать как значение распределения $\tilde{f}$ на пробной функции

$$\chi_{\Phi, \Psi} = \pi^{-4} \langle \Phi, T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} \Psi \rangle. \quad (48)$$

При фиксированном $\tilde{f}$ зависимость $(\tilde{f}, \chi_{\Phi, \Psi})$ от Φ^* и от Ψ линейна и непрерывна. Поэтому каждое распределение $f \in S'(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$ порождает оператор A_f , действующий из пространства $S(\mathbb{R}^4)$ в $S'(\mathbb{R}^4)$, который переводит функцию Ψ в распределение $A_f \Psi \in S'(\mathbb{R}^4)$ такое, что

$$(A_f \Psi)(\Phi) = (\tilde{f}, \chi_{\Phi^*, \Psi}).$$

Если оператор A_f переводит $S(\mathbb{R}^4)$ в $L^2(\mathbb{R}^4)$, то он естественно отождествляется с оператором в $L^2(\mathbb{R}^4)$ с областью определения $S(\mathbb{R}^4)$.

Инвариантность распределения $\tilde{f}$ вытекает из инвариантности f и означает, что оно принимает то же самое значение на преобразованной пробной функции. Поэтому для доказательства (45) достаточно заметить, что

$$\langle \Phi, U_\theta T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} U_\theta^{-1} \Psi \rangle = \langle \Phi, T_{ue^{-i\theta}, \bar{u}e^{i\theta}, ve^{-i\theta}, \bar{v}e^{i\theta}} \Psi \rangle. \quad (49)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \Phi, U_\theta T_{u, \bar{u}, v, \bar{v}} U_\theta^{-1} \Psi \rangle &= \\ &= e^{i\hbar(\bar{v}u + \bar{u}v)/2} \int \Phi^*(ze^{-i\theta}, \bar{z}e^{i\theta}) e^{i(v\bar{z} + \bar{v}z)} \Psi((z + \hbar u)e^{-i\theta}, (\bar{z} + \hbar \bar{u})e^{i\theta}) d\lambda(z). \end{aligned} \quad (50)$$

Правая часть (50) совпадает с правой частью (49) после замены $z' = ze^{-i\theta}$, $\bar{z}' = \bar{z}e^{i\theta}$ переменных интегрирования, что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всякого оператора, являющегося преобразованием Вейля $U(1)$ -инвариантного распределения умеренного роста и отображающего $S(\mathbb{R}^4)$ в $L^2(\mathbb{R}^4)$, корректно определено ограничение на подпространство E_n эквивариантных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, это ограничение имеет плотную область определения $S(\mathbb{R}^4) \cap E_n$ в E_n .

Таким образом, для функций на фазовом пространстве $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ естественно определить соответствие Вейля как суперпозицию трех отображений: подъема функции f на пространство $\mathcal{P}$ посредством проекции (19), обычного преобразования Вейля (37) и последующего ограничения полученного оператора на гильбертово пространство E_n с $n = 2\epsilon\mu/\hbar$,

$$f \longrightarrow \int \widetilde{\pi^* f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) e^{i(v\bar{Z} + \bar{v}Z + u\bar{K} + \bar{u}K)} d\lambda(u, v) \upharpoonright_{E_n}. \quad (51)$$

Отображение (51) вполне определено для тех f , преобразование Фурье подъема которых интегрируемо на $\mathcal{P}$, а также для широкого класса таких функций, что $\pi^* f$ принадлежит алгебре мойаловских мультипликаторов пространства $S(\mathbb{R}^4)$, описание которой имеется, например, в работах [22], [23].

Ясно, что координатная функция x^i преобразуется посредством отображения (51) в оператор $X^i: \Psi \rightarrow (\bar{z}\sigma_i z)\Psi$, и легко проверяется, что функции p_j соответствует оператор

$$P_j = \frac{1}{2\bar{z}z} \bar{z}\sigma_j K + \bar{K}\sigma_j z \frac{1}{2\bar{z}z}. \quad (52)$$

Отметим, что две инвариантные гладкие функции на $\mathcal{P}$ порождают один и тот же оператор на E_n , если они совпадают на поверхности связи $\bar{z}k - \bar{k}z = i\hbar n$. Можно сформулировать более общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если верно равенство $f = (\bar{z}k - \bar{k}z - i\hbar n)g$, где $g \in S'(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$ и является $U(1)$ -инвариантным, то $A_f \upharpoonright_{E_n} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}_{z \rightarrow v}$ и $\mathcal{F}_{k \rightarrow u}$ — это частичные преобразования Фурье функций из $S(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{z \rightarrow v}\chi)(v, \bar{v}, k, \bar{k}) &= \pi^{-2} \int \chi(z, \bar{z}, k, \bar{k}) e^{-i(\bar{z}v + \bar{v}z)} d\lambda(z), \\ (\mathcal{F}_{k \rightarrow u}\chi)(z, \bar{z}, u, \bar{u}) &= \pi^{-2} \int \chi(z, \bar{z}, k, \bar{k}) e^{-i(\bar{k}u + \bar{u}k)} d\lambda(k). \end{aligned}$$

Преобразование Фурье для распределений определяется по дуальности и, следовательно,

$$(\tilde{f}, \chi) = (f, \tilde{\chi}) = (\mathcal{F}_{k \rightarrow u}f, \mathcal{F}_{v \rightarrow z}\chi) \quad \text{для всех } \chi \in S(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4).$$

Из равенства (46) видно, что для функции (48) мы имеем соотношение

$$(\mathcal{F}_{v \rightarrow z}\chi_{\Phi, \Psi})(z, \bar{z}, u, \bar{u}) = \frac{1}{\pi^2} \Phi^* \left(z - \frac{\hbar}{2}u, \bar{z} - \frac{\hbar}{2}\bar{u} \right) \Psi \left(z + \frac{\hbar}{2}u, \bar{z} + \frac{\hbar}{2}\bar{u} \right). \quad (53)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{F}_{k \rightarrow u} f = i(\bar{z} \partial_{\bar{u}} - z \partial_u - \hbar n) \mathcal{F}_{k \rightarrow u} g$$

и, значит,

$$(\tilde{f}, \chi) = (\mathcal{F}_{k \rightarrow u} g, i(-\bar{z} \partial_{\bar{u}} + z \partial_u - \hbar n) \mathcal{F}_{v \rightarrow z} \chi).$$

Если $\Phi, \Psi \in E_n$, из формулы (53) следует равенство

$$i(-\bar{z} \partial_{\bar{u}} + z \partial_u - \hbar n) \mathcal{F}_{v \rightarrow z} \chi_{\Phi, \Psi} = 0,$$

которое и завершает доказательство.

7. ЗВЕЗДОЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Порождаемое соответствием (37) звездочное произведение Вейля–Мойала функций на пространстве $\mathcal{P}$ имеет вид

$$(f \star g)(z, \bar{z}, k, \bar{k}) = f(z, \bar{z}, k, \bar{k}) e^{(i\hbar/2)(\overrightarrow{\partial_z \partial_{\bar{k}}} - \overrightarrow{\partial_{\bar{k}} \partial_z} + \overrightarrow{\partial_{\bar{z}} \partial_k} - \overrightarrow{\partial_k \partial_{\bar{z}}})} g(z, \bar{z}, k, \bar{k}). \quad (54)$$

Если функция f является $U(1)$ -инвариантной, то ее ограничение на поверхность связи $\mathcal{C}$ постоянно на $U(1)$ -орбитах. Пусть $f_{\mathcal{B}}$ – соответствующую функцию на базе расслоения $\mathcal{B} = \mathcal{C}/U(1)$. Ее подъем $\pi^* f_{\mathcal{B}}$ на $\mathcal{P}$ не совпадает, вообще говоря, с f , но имеет то же ограничение на $\mathcal{C}$. Поэтому, определяя звездочное произведение функций на $\mathcal{B}$ формулой

$$f \star g = (\pi^* f \star \pi^* g)_{\mathcal{B}}, \quad (55)$$

заключаем, что соответствие (51) переводит его в произведение операторов $A_{\pi^* f} \upharpoonright_{E_n}$ и $A_{\pi^* g} \upharpoonright_{E_n}$.

Пусть $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{B}}$ и $\{\cdot, \cdot\}$ – скобки Пуассона, отвечающие соответственно симплектической структуре (4) с $B^i = \mu x^i / |\mathbf{x}|^3$ на $\mathcal{B}$ и канонической симплектической структуре на $\mathcal{P}$. Чтобы доказать, что квантование (51) удовлетворяет принципу соответствия

$$f \star g - g \star f = i\hbar \{f, g\}_{\mathcal{B}} + O(\hbar^2), \quad (56)$$

вычислим линейный член разложения звездочного произведения (55) по степеням $\hbar$. Вспоминая определение (19) и дифференцируя $\pi^* f = f \circ \pi$ и $\pi^* g = g \circ \pi$ как составные отображения, мы находим, что

$$\begin{aligned} (\pi^* f)(\overrightarrow{\partial_z \partial_{\bar{k}}} - \overrightarrow{\partial_{\bar{k}} \partial_z} + \overrightarrow{\partial_{\bar{z}} \partial_k} - \overrightarrow{\partial_k \partial_{\bar{z}}})(\pi^* g) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \{x^i, p_j\} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{p_i, p_j\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Используя формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial z} &= \bar{z} \sigma_i, & \frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}} &= \sigma_i z, & \frac{\partial p_j}{\partial k} &= \frac{\bar{z} \sigma_j}{2 \bar{z} z}, & \frac{\partial p_j}{\partial \bar{k}} &= \frac{\sigma_j z}{2 \bar{z} z}, \\ \frac{\partial p_j}{\partial z} &= \frac{1}{2 \bar{z} z} (\bar{k} \sigma_j - 2 p_j \bar{z}), & \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2 \bar{z} z} (\sigma_j k - 2 p_j z), \end{aligned}$$

мы получаем равенства

$$\{x^i, p_j\} = \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{k}} + \frac{\partial p_j}{\partial k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{z} \sigma_i \sigma_j z}{2 \bar{z} z} + \frac{\bar{z} \sigma_j \sigma_i z}{2 \bar{z} z} = \delta_j^i \quad (58)$$

и

$$\begin{aligned}\{p_i, p_j\} &= \frac{\partial p_i}{\partial z} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{k}} - \frac{\partial p_j}{\partial z} \frac{\partial p_i}{\partial \bar{k}} + \frac{\partial p_j}{\partial k} \frac{\partial p_i}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial p_i}{\partial k} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}} = \\ &= \frac{1}{(2\bar{z}z)^2} [(\bar{k}\sigma_i - 2p_i\bar{z})\sigma_j z - (\bar{k}\sigma_j - 2p_j\bar{z})\sigma_i z + \bar{z}\sigma_j(\sigma_i k - 2p_i z) - \bar{z}\sigma_i(\sigma_j k - 2p_j z)].\end{aligned}$$

При $i \neq j$ матрицы σ_i и σ_j антикоммутируют и выражение в квадратных скобках можно записать как

$$\begin{aligned}2(\bar{k}\sigma_i\sigma_j z + \bar{z}\sigma_j\sigma_i k - 2p_i\bar{z}\sigma_j z + 2p_j\bar{z}\sigma_i z) &= \\ &= \frac{4}{\bar{z}z} \operatorname{Re}[(\bar{z}\sigma_j\sigma_i k)(\bar{z}z) - (\bar{z}\sigma_i k)(\bar{z}\sigma_j z) + (\bar{z}\sigma_j k)(\bar{z}\sigma_i z)].\end{aligned}$$

Теперь заметим, что имеет место тождество

$$(\bar{z}\sigma_j\sigma_i k)(\bar{z}z) - (\bar{z}\sigma_i k)(\bar{z}\sigma_j z) + (\bar{z}\sigma_j k)(\bar{z}\sigma_i z) = (\bar{z}\sigma_j\sigma_i z)(\bar{z}k),$$

которое, очевидно, верно при $k = z$ и при $k = \sigma_i z$ и, следовательно, верно при всех $k \in \mathbb{C}^2$. Поскольку $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, $i \neq j$, мы заключаем, что

$$\{p_i, p_j\} = \frac{1}{(\bar{z}z)^3} \epsilon_{ijk} (\bar{z}\sigma_k z) \operatorname{Im}(\bar{z}k),$$

а ограничение этой скобки на поверхность связи (13) имеет вид

$$\{p_i, p_j\} \upharpoonright_c = \frac{e\mu}{(\bar{z}z)^3} \epsilon_{ijk} (\bar{z}\sigma_k z). \quad (59)$$

Из определения (55) и формул (54), (57)–(59) следует, что

$$f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) + e\mu\epsilon_{ijk} \frac{x^k}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right] + O(\hbar^2),$$

и, тем самым, доказательство соотношения (56) завершено.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы заключаем, что описание системы заряд–монополю как калибровочно-инвариантной системы со связью на пространстве расслоения приводит естественным образом к реализации соответствия Вейля с операторным представлением в комплексном гильбертовом пространстве $U(1)$ -эквивариантных функций. Отметим, что в работах [6], [20], где впервые уравнение Шредингера для электрона в поле магнитного монополя рассматривалось на эквивариантных функциях, их скалярное произведение определялось с мерой, отличающейся (в используемых нами обозначениях) от лебеговой меры $d\lambda$ на весовой множитель $\bar{z}z$. Переход от пространства $L^2(\mathbb{C}^2, \bar{z}z d\lambda)$ к $L^2(\mathbb{C}^2, d\lambda)$ осуществляется посредством унитарного оператора $\Psi \rightarrow \Psi\sqrt{\bar{z}z}$. Условие связи имеет в $L^2(\mathbb{C}^2, \bar{z}z d\lambda)$ прежний вид $(z_\alpha \partial_{z_\alpha} - \bar{z}_\alpha \partial_{\bar{z}_\alpha})\Psi = n\Psi$, а гамильтониан записывается как

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m\bar{z}z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} + \frac{n^2}{4\bar{z}z} \right).$$

Отметим также, что при $n \neq 1$ условие (44), строго говоря, является условием эквивариантности не для расслоения, рассмотренного в разделе 3, а для другого тесно связанного с ним главного расслоения. В силу этого условия волновые функции фактически определены на фактор-пространстве $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}_n$, которое гомотопически эквивалентно линзе $L(3, n)$, а при $n = 2$ – проективному пространству RP^3 . Действие группы $U(1)$ на $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}_n$, имеющее вид $[z_1, z_2]e^{i\theta} = [z_1 e^{i\theta/n}, z_2 e^{i\theta/n}]$, является свободным и поэтому определяет структуру главного расслоения. Связь линзовых пространств с квантованием заряда монополя впервые была отмечена в статье [24] и также обсуждалась в работах [8], [25].

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **133**:821 (1931), 60–72.
- [2] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev. (2)*, **74**:7 (1948), 817–830.
- [3] И. В. Тютин, *Рассеяние электрона на соленоиде*, Препринт ФИАН № 27, ФИАН, М., 1974, arXiv:0801.2167.
- [4] T. T. Wu, C. N. Yang, *Phys. Rev. D*, **12**:12 (1975), 3845–3857.
- [5] T. T. Wu, C. N. Yang, *Nucl. Phys. B*, **107**:3 (1976), 365–380.
- [6] W. Greub, H. R. Petry, *J. Math. Phys.*, **16**:6 (1975), 1347–1351.
- [7] H. Hopf, *Math. Ann.*, **104**:1 (1931), 637–665.
- [8] H. K. Urbantke, *J. Geom. Phys.*, **46**:2 (2003), 125–150.
- [9] Б. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: методы и приложения*, Наука, М., 1986.
- [10] М. Даниэль, С. М. Виалле, *УФН*, **136**:3 (1982), 377–419.
- [11] K. A. Milton, *Rep. Progr. Phys.*, **69**:6 (2006), 1637–1711, arXiv:hep-ex/0602040.
- [12] J. F. Carinena, J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, G. Marmo, P. Vitale, *Phys. Lett. A*, **374**:35 (2010), 3614–3618, arXiv:0912.2197.
- [13] G. G. Emch, A. Z. Jadczyk, *On quaternions and monopoles*, arXiv:quant-ph/9803002.
- [14] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern, *Nucl. Phys. B*, **162**:3 (1980), 385–396.
- [15] М. А. Соловьев, *Письма в ЖЭТФ*, **39**:12 (1984), 582–584.
- [16] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Texts in Applied Mathematics, **17**, Springer, New York, 1999.
- [17] P. Kustaanheimo, E. Stiefel, *J. Reine Angew. Math.*, **218** (1965), 204–219.
- [18] S. Bates, A. Weinstein, *Lectures on the Geometry of Quatization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, **8**, AMS, Providence, RI, 1997.
- [19] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies, **122**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [20] H.-R. Petry, “Electron scattering on magnetic monopoles”, *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Lecture Notes in Mathematics, **836**, Berlin, Springer, 1980, 406–419.
- [21] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **181**:3, 568–596.
- [22] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, *J. Math. Phys.*, **29**:4 (1988), 869–879.
- [23] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker, J. C. Várilly, *Commun. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 569–623, arXiv:hep-th/0307241.
- [24] A. Trautman, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **16**:78 (1977), 561–565.
- [25] М. А. Соловьев, *Письма в ЖЭТФ*, **35**:12 (1982), 540–542.