Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Рождение пар фермионов сильным кулоновским полем в $2 + 1$ измерениях, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 277–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:42:37

© 1998 г.

В. Р. Халилов*

РОЖДЕНИЕ ПАР ФЕРМИОНОВ СИЛЬНЫМ КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Изучается эффект образования пар заряженных фермионов сильным внешним кулоновским полем в двух пространственных измерениях. Найдены точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле в $2 + 1$ измерениях. Получено уравнение для определения критического заряда, которое решено численно для одной простой модели. Показано, что величина критического заряда в $2 + 1$ измерениях существенно меньше его значения для той же модели в $3 + 1$ измерениях. Изучено влияние эффекта поляризации вакуума на величину критического заряда в однопетлевом приближении $(2 + 1)$ -мерной квантовой электродинамики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные системы нерелятивистских заряженных фермионов, связанные с калибровочными электромагнитными полями и полями Черна–Саймонса, вызывают интерес в последние годы в связи с их весьма необычными свойствами, которые позволили применить эти модели к изучению таких квантовых макроскопических явлений, как дробный квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [1, 2]. Некоторые эффекты в физике конденсированных сред указывают, что, по-видимому, существуют [3–5] не только $(2 + 1)$ -мерные нерелятивистские фермионные системы, но также $(2 + 1)$ -мерные системы со спектром энергий, который определяется гамильтонианом уравнения Дирака. В связи с этим привлекает серьезное внимание изучение физических эффектов, которые могут протекать в $(2 + 1)$ -мерных системах заряженных частиц и античастиц в присутствии сильных внешних полей в области релятивистских энергий частиц в пространствах различных размерностей. Свойства квантовых $(2 + 1)$ -мерных систем частиц вызывают и чисто теоретический интерес в связи с теорией анионов – частиц, подчиняющихся дробной статистике в $2 + 1$ измерениях [6]. Это и является причиной написания настоящей работы.

К настоящему времени достаточно полно изучено поведение релятивистского электрон-позитронного газа в присутствии постоянного и однородного магнитного поля (см., например, [7] и цитированную там литературу).

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Здесь мы изучим некоторые эффекты, связанные с поведением релятивистских заряженных фермионов в присутствии сильного кулоновского поля в $2 + 1$ измерениях. Мы найдем точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле для электрона, считая, что его движение ограничено в плоскости, и обсудим эффект рождения пар заряженных фермионов (т.е. электронов и позитронов) из вакуума сильным кулоновским полем в $2 + 1$ измерениях. Этот эффект предсказан в [8] и всесторонне исследован в [9–20] для случая $3 + 1$ измерений.

Нелишне напомнить, что в трех пространственных измерениях выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда $Z|e|$ теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$. Это фактически означает, что следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [20]. С точки зрения физики рассмотрение обрезанного кулоновского потенциала эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала впервые был исследован в [20]. Оказалось, что с ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии электрона становятся отрицательными и продолжают опускаться до границы нижнего континуума $-m$. Значение $Z = Z_{\text{сг}}$, при котором нижний уровень энергии электрона достигает границы нижнего континуума, называют критическим для основного состояния [17–19]. Если $Z > Z_{\text{сг}}$, то основной уровень энергии электрона “погружается” в нижний континуум. Если этот уровень не был заполнен, то в результате возникшего квазистационарного состояния рождаются два позитрона, которые под действием кулоновского отталкивания уходят на бесконечность, а вакуум квантовой электродинамики (КЭД), возмущенный сверхкритическим кулоновским полем, приобретает заряд $2e$ [17–19]. Действительно, в картине Дирака все состояния нижнего континуума уже были заняты электронами с отрицательной энергией, так что рожденные (в нижнем континууме) кулоновским полем с $Z > Z_{\text{сг}}$ электроны нельзя описать с помощью обычной волновой функции и для их описания вводится понятие заряженного вакуума [17].

Таким образом, явления, которые становятся возможными при $Z > Z_{\text{сг}}$, имеют многочастичный характер. Для их описания необходимо использовать формализм квантовой теории поля. Однако в рамках теоретико-полевого подхода свойства $(2 + 1)$ - и $(3 + 1)$ -мерной систем принципиально отличаются, т.к. на квантовом уровне в лагранжиане $(2 + 1)$ -мерной системы, помещенной во внешнее электромагнитное поле, возникает порождаемый полем член Черна–Саймонса [21], что позволяет применить модель анионов для описания $(2 + 1)$ -мерных квантовых систем во внешнем поле. Мы полагаем, что в рассматриваемой нами задаче модель анионов в $2 + 1$ измерениях также применима, однако возникающий член Черна–Саймонса, по-видимому, порождается в результате появления при $Z > Z_{\text{сг}}$ реального заряда вакуума $(2 + 1)$ -мерной КЭД.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЯДРА

Квантово-механическая задача о движении релятивистского электрона массы m и заряда $e = -e_0$, $e_0 > 0$, в двух пространственных измерениях во внешнем кулоновском поле, моделирующем поле тяжелого ядра, может быть решена точно. Вектор-потенциал кулоновского поля в декартовых координатах зададим как

$$A^0(r) = -Ze_0/r, \quad A^x = A^y = 0. \quad (1)$$

Поскольку (см., например, [3]) в $2 + 1$ измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена в терминах матриц Паули, выберем представление $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^k = i\sigma^k$ и запишем уравнение Дирака в виде

$$(i\partial_t - H_D)\Psi = 0, \quad (2)$$

где

$$H_D = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \sigma^1 P_2 - \sigma^2 P_1 + \sigma^3 m + eA^0, \quad (3)$$

а $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ — оператор обобщенного импульса электрона.

Решение уравнения (2) в поле (1) будем искать в полярных координатах r, φ в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\varepsilon Et + il\varphi) \psi(r, \varphi), \quad (4)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ — знак, $E > 0$ — абсолютное значение энергии, l — целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (2) и учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -ie^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (6)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l}{r}f + \left(\varepsilon E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right) g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1+l}{r}g - \left(\varepsilon E - m + \frac{Z\alpha}{r} \right) f &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычисления по нахождению точного решения уравнения Дирака и дискретного спектра энергий $\varepsilon E < m$ можно провести в полной аналогии с вычислениями, приведенными, например, в [22, 23]. Для этого будем искать функции f и g в виде

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m + \bar{E}} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{m - \bar{E}} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \alpha \equiv e^2. \quad (9)$$

Нелишне отметить, что величину γ мы нашли, рассматривая поведение волновых функций при малых r , и что справедливо равенство $(\gamma - 1/2)^2 - (Z\alpha E/\lambda)^2 = (l + 1/2)^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$.

Далее, проводя преобразования системы уравнений (7) в соответствии со случаем трех пространственных измерений, нетрудно выразить их решение, конечное при $\rho = 0$, через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF\left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma; \rho\right), \\ Q_2 &= BF\left(\gamma + \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma; \rho\right), \end{aligned} \quad (10)$$

причем связь между постоянными A и B определяется соотношением

$$B = \frac{\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda}}{l + \frac{1}{2} + \frac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \quad (11)$$

Спектр энергий определяется из уравнения

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} = -n_r, \quad (12)$$

причем нетрудно показать, что допустимы следующие значения квантового числа n_r : $0, 1, 2, \dots$ при $l \geq 0$ и $1, 2, 3, \dots$ при $l < 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий электрона в поле (1) имеет вид

$$E = m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n_r + \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (13)$$

Этот спектр энергий похож на спектр энергий бесспиновой заряженной частицы в кулоновском поле [23] в трех пространственных измерениях, что, по-видимому, можно было ожидать, т.к. в $(2 + 1)$ -мерной квантовой теории электрон фактически ведет себя подобно бесспиновому фермиону. Однако между спектрами истинного бозона и бесспинового электрона есть существенное отличие. В частности, энергия электрона на низшем уровне ($l = n_r = 0$) равна

$$E_0 = m\sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}. \quad (14)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом нами случае энергия E_0 нижнего уровня обращается в нуль при $Z\alpha = 1/2$. Напомним, что в трех пространственных измерениях энергия фермиона E_0 обращается в нуль при $Z\alpha = 1$, а энергия бесспиновой заряженной частицы на нижнем уровне при $Z\alpha = 1/2$ равна $m/\sqrt{2}$.

Как в $(2+1)$ -мерной, так и в $(3+1)$ -мерной квантовых теориях выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Соответствующие волновые функции осциллируют при $r \rightarrow 0$, вследствие чего отсутствует граничное условие в начале координат [17–19].

Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, а это фактически означает, что следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [20]. С точки зрения физики рассмотрение обрезанного кулоновского потенциала эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

3. КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала был исследован в [20]. Предполагая, что в случае двух пространственных измерений с ростом Z в области $2Z > 137$ поведение уровней энергии электрона аналогично трехмерному случаю, т.е. они становятся отрицательными и опускаются до границы нижнего континуума $-m$, покажем, что такая ситуация действительно имеет место.

Для этого рассмотрим решения и спектр уравнения Дирака в области $2Z > 137$ и определим соответствующее значение Z_{cr} . Поскольку для определения Z_{cr} следует рассматривать энергии вблизи границы нижнего континуума $-m$, уравнение Дирака запишем с учетом того, что $\varepsilon E \approx -m$. Вводя функции $F(r) = rf(r)$ и $G(r) = rg(r)$ и исключая $G(r)$ из системы (7), приходим к уравнению, определяющему функцию F вблизи границы нижнего континуума $-m$ в виде

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left(E^2 - m^2 + \frac{2\varepsilon EZ\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l(l+1)}{r^2} \right) F(r) = 0. \quad (15)$$

Заметим, что вблизи границы верхнего континуума, т.е. при $\varepsilon E \approx m$, уравнением (15) после замены $F(r)$ на $G(r)$ определяется функция $G(r)$.

Решение уравнения (15), убывающее при $r \rightarrow \infty$, выражается через функцию Уиттекера вида (см. также [24])

$$F(r) = DW_{\beta, i\nu}(2\lambda r), \quad (16)$$

где

$$\beta = \frac{\varepsilon EZ\alpha}{\lambda}, \quad \nu = \sqrt{(Z\alpha)^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}. \quad (17)$$

Решение для $G(r)$ вблизи $\varepsilon E = -m$ находится из равенства

$$G(r) = \frac{1}{Z\alpha} \left((1+l)F - \frac{dF}{dr} \right) \quad (18)$$

с использованием рекуррентных соотношений для функций Уиттекера.

Вблизи границы верхнего континуума решение (16) с $\varepsilon E = m$ описывает функцию $G(r)$, а функцию $F(r)$ можно найти из равенства

$$F(r) = \frac{1}{Z\alpha} \left(lG + \frac{dG}{dr} \right). \quad (19)$$

Связанное состояние электрона, т.е. при $|E| < m$ или $\lambda > 0$, всегда локализовано в пространстве независимо от того, находится ли это связанное состояние вблизи верхнего или нижнего континуума. Это легко установить, используя асимптотическое представление для функций Уиттекера для больших значений аргумента $|z|$ в виде

$$W_{\beta, \nu}(z) \sim e^{-z/2} z^{\beta}. \quad (20)$$

Такое поведение волновых функций связанного состояния электрона легко объяснить, если рассматривать уравнение (15) как одномерное уравнение Шредингера, описывающее некоторую частицу с эффективной энергией $E' = (E^2 - m^2)/2m$ в поле с эффективным потенциалом

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\varepsilon E Z \alpha}{mr} - \frac{(Z\alpha)^2}{2mr^2}.$$

Отметим, что в случае $\varepsilon E = -m$ эффективный потенциал является потенциалом с широким барьером (о поведении эффективного потенциала в $(3+1)$ -мерном случае см., например, [19]). Отметим, что в $2+1$ измерениях эффективный потенциал не содержит члена $-s(s+1) \equiv -3/4$, зависящего от спина электрона. Заметим также, что волновые функции осциллируют при $|E| > m$.

Решение уравнения (15) при $\varepsilon E = -m$ можно выразить через функцию Макдональда мнимого индекса [25]

$$F(r) = \sqrt{r} K_{i\theta}(\sqrt{8mZ\alpha r}), \quad (21)$$

где

$$\theta = 2\sqrt{(Z\alpha)^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (22)$$

Функция $G(r)$ при $\varepsilon E = -m$ определяется соотношением (18). Значение Z_{cr} можно найти с помощью полученных точных решений. Сделаем это для простой модели, задавая потенциал в виде

$$A_0^Z(r) = -\frac{Ze_0}{r}, \quad r \geq R; \quad A_0^Z(r) = -\frac{Ze_0}{R}, \quad r \leq R. \quad (23)$$

В области $r \leq R$ уравнение для функции $F(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{dF}{rdr} + \left(\left(\varepsilon E + \frac{Z\alpha}{R} \right)^2 - m^2 + \frac{1-l^2}{r^2} \right) F(r) = 0. \quad (24)$$

Решение этого уравнения выражается через функции Бесселя $J_n(z)$ и функции Неймана $N_n(z)$ целочисленного индекса n следующим образом [25]:

$$F(r) = r(A_1 J_{|\mu|}(\kappa r) + B_1 N_{|\mu|}(\kappa r)), \quad (25)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\left(\varepsilon E + \frac{Z\alpha}{R}\right)^2 - m^2}. \quad (26)$$

Условием конечности $F(r)$ при $r = 0$ является равенство нулю B_1 .

Для нахождения спектра уравнения Дирака следует сшить решения в точке $r = R$:

$$\left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R-0} = \left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R+0}. \quad (27)$$

В частности, в случае основного состояния $l = 0$ при $\varepsilon E = -m$ с учетом того, что параметр R мал по сравнению с комптоновской длиной электрона $1/m$ (так что можно полагать $\kappa \approx Z\alpha/R$), получим трансцендентное уравнение, определяющее (при фиксированном R) критический заряд,

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \left(1 - \frac{z W'_{\beta, i\nu/2}(x)}{W_{\beta, i\nu/2}(x)}\right) \quad (28)$$

или

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \frac{1}{2X} - \sqrt{\frac{2mR}{X}} \frac{K'_{i\nu}(z)}{K_{i\nu}(z)}, \quad (29)$$

где $X = Z_{\text{cr}}\alpha$, $\nu = \sqrt{(2X)^2 - 1}$, $\beta = -mZ\alpha/\lambda$, $x = \lambda R$, штрих означает производную по аргументу функции Уиттекера x в (28) или по аргументу функции Макдональда $z = \sqrt{8mRX}$ в (29).

Уравнения (29) или (28) удастся решить лишь численно. Покажем это на примере решения уравнения (29). Используем представление для функций Макдональда в виде [25]

$$K_\mu(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\mu\pi)} [I_{-\mu}(z) - I_\mu(z)], \quad (30)$$

где

$$I_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\mu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu + 2k}. \quad (31)$$

При малых значениях аргумента функция Макдональда принимает вид [26]

$$K_\mu(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\mu\pi)} \left\{ \frac{z^{-\mu}}{2^{-\mu} \Gamma(1 - \mu)} \left[1 + \frac{z^2}{4(1 - \mu)} + \dots \right] - \frac{z^\mu}{2^\mu \Gamma(1 + \mu)} \left[1 + \frac{z^2}{4(1 + \mu)} + \dots \right] \right\}. \quad (32)$$

Эта формула получается, если мы подставим (31) в (30) и сохраним только члены ряда с $k = 0, 1$. Далее, после несложных преобразований нетрудно получить следующую формулу:

$$K_{i\nu}(z) = -\left(\frac{\pi}{\nu \sinh(\pi\nu)}\right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{z^2}{4(1+\nu^2)}\right) \sin(P) - \frac{\nu z^2}{4(1+\nu^2)} \cos(P) \right], \quad (33)$$

где

$$P = \nu \ln(|z|/2) + \arg \Gamma(1 - i\nu).$$

С учетом лишь ведущих членов в разложении функции Макдональда и ее производной уравнение (29) принимает вид

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \frac{1}{2X} + \frac{\nu}{2X} \operatorname{ctg}(P). \quad (34)$$

Численное решение последнего уравнения при $Rm = 0.02$ дает $Z_{\text{cr}} \approx 108$. Напомним, что в $(3+1)$ -мерной квантовой механике значение критического заряда для аналогичной модели значительно больше: например, $Z_{\text{cr}} \approx 170$ при $Rm = 0.03$ [17–19]. Следовательно, вакуум $(2+1)$ -мерной КЭД в сильном кулоновском поле должен проявлять неустойчивость по отношению к образованию электрон-позитронных пар при существенно меньших значениях критического заряда, чем в $(3+1)$ -мерной КЭД.

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА ЗАРЯЖЕННЫХ ФЕРМИОНОВ КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ

Поляризация вакуума заряженных фермионов должна проявлять себя как изменение кулоновского потенциала на малых расстояниях от ядра. При этом, помимо постоянной тонкой структуры α , поляризационная добавка к кулоновскому потенциалу должна также определяться параметром $Z\alpha$, в котором $Z \approx 100$. Отметим, что в случае двух пространственных измерений $Z\alpha < 1$ даже для сверхкритических ядер, что позволяет для (грубых оценок) учета влияния поляризации вакуума на критический заряд ядра ограничиться при вычислении поляризационной добавки к кулоновскому потенциалу первым порядком теории возмущений по параметру $Z\alpha$. Поскольку для нашей задачи наибольший интерес представляет область малых расстояний от кулоновского центра, при вычислениях будем использовать модель точечного ядра. В трех пространственных измерениях для точечного ядра в первом порядке теории возмущений по параметру $Z\alpha$ поляризационная добавка к кулоновскому потенциалу есть известный потенциал Юлинга [22]. Однопетлевая радиационная поправка к потенциалу поля точечного ядра в двух пространственных измерениях определяется поляризационным оператором или точнее поляризационным вакуумным током, вычисленным в первом порядке теории возмущений в рамках $(2+1)$ -мерной КЭД. Простые вычисления, проведенные в полной аналогии

со случаем $(3 + 1)$ -мерной КЭД, приводят к следующей формуле для плотности вакуумного тока, вычисленной в однопетлевом приближении $(2 + 1)$ -мерной КЭД:

$$j_0(x) = -\frac{Ze_0\alpha}{(2\pi)^3} \int d^2k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \times \\ \times \left(\frac{2}{3} \int_0^\infty ds \frac{\exp(-m^2s)}{s} - \frac{k^2}{2} \int_0^1 dz \frac{z^2 - z^4/3}{m^2 + k^2(1 - z^2)/4} \right). \quad (35)$$

Логарифмически расходящийся (первый) член в правой части (35) определяет (расходящуюся) константу перенормировки заряда и поля; вторым членом определяется искомый конечный вклад в вакуумный ток, который необходимо вычислить. При вычислении интеграла по двумерному вектору $\mathbf{k}$ используем полярные координаты, направив полярную ось вектора $\mathbf{k}$ по двумерному вектору $\mathbf{x}$. Записав скалярное произведение $\mathbf{k}\mathbf{x}$ как $kr \cos \vartheta$, где ϑ – угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{x}$, а также заменив переменную z переменной $v = (1 - z^2)^{-1/2}$, вычисляемый интеграл приведем к виду

$$\int d^2k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \frac{k^2}{2} \int_0^1 dz \frac{z^2 - z^4/3}{m^2 + k^2(1 - z^2)/4} = \\ = \frac{2}{3} \int dk d\vartheta \int_1^\infty \frac{k^3(2v^2 + 1)\sqrt{v^2 - 1} \exp(ikr \cos \vartheta)}{v^4((2mv)^2 + k^2)}. \quad (36)$$

Далее используем формулы [25]

$$\exp(ikr \cos \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) i^n \exp(i\vartheta) \quad (37)$$

и

$$\int_0^\infty dk \frac{k J_0(kr)}{(2mv)^2 + k^2} = K_0(2mrv). \quad (38)$$

После простых вычислений формула для заряда точечного ядра с учетом поляризации вакуума в первом порядке теории возмущений по параметру $Z\alpha$ принимает вид

$$Z_{\text{tot}} e_0 = Ze_0 \left(1 + \frac{2\alpha}{3\pi} I(mr) \right), \quad (39)$$

здесь

$$I(mr) = \int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^4} (2x^2 + 1) K_0(2rmx). \quad (40)$$

Интеграл (40) может быть вычислен в двух предельных случаях.

В случае малых r ($mr \ll 1$) интеграл можно разбить на области от 1 до x_1 и от x_1 до ∞ , причем $1/mr \gg x_1 \gg 1$. В результате вычислений получим (при $mr \ll 1$)

$$I(mr) = \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(\ln \frac{1}{mr} - C \right), \quad (41)$$

где $C = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера. При $mr \gg 1$ в интеграле существенна область $x - 1 \sim 1/mr \ll 1$. Учитывая это, получим (при $mr \gg 1$)

$$I(mr) = \frac{3\pi}{16(mr)^{3/2}} \exp(-2mr). \quad (42)$$

Из формул (39) и (41) следует, что даже на малых расстояниях от кулоновского центра вклад однопетлевой радиационной поправки в суммарный потенциал поля точечного ядра мал.

5. О ВАКУУМЕ $(2 + 1)$ -МЕРНОЙ КЭД ПРИ $Z > Z_{\text{сг}}$

При $Z > Z_{\text{сг}}$ в низшем электронном состоянии дискретного спектра $n_r \neq 0$. Если уровень энергии с $n_r = 0$ не был заполнен, то в картине Дирака в верхнем континууме появляется вакансия, которую может занять электрон из дираковского моря, а в нижнем континууме появится дырка (положительно заряженный фермион), которая вдали от кулоновского центра должна вести себя как реальная частица с положительным зарядом. С точки зрения КЭД кулоновское поле с $Z > Z_{\text{сг}}$ рождает позитрон и изменяет вакуум КЭД так, что он приобретает заряд, в точности равный заряду электрона e . Распределение вакуумного заряда в пространстве подобно распределению заряда электрона на уровне с $n_r = 0$ в атоме с $Z < Z_{\text{сг}}$. Однако эти распределения принципиально различны по смыслу, т.к. для атома распределение заряда электрона имеет смысл вероятности найти заряд, равный заряду электрона в данной точке пространства, в то время как вакуумный заряд распределен в пространстве. Что касается появления классического вакуумного заряда, свойства вакуума КЭД в $2 + 1$ и $3 + 1$ измерениях, по существу, одинаковы, а приведенная выше картина заимствована из [19].

Однако свойства вакуума КЭД принципиально различны в $3 + 1$ и $2 + 1$ измерениях в следующем отношении. Согласно [21] на квантовом уровне в лагранжиане $(2 + 1)$ -мерной системы, помещенной во внешнее электромагнитное поле, должен возникать порождаемый внешним полем член Черна–Саймонса вида

$$L_{\text{CS}} = \frac{\theta}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho, \quad (43)$$

где a_μ – потенциал поля Черна–Саймонса. Следовательно, в $2 + 1$ измерениях появляющийся вакуумный заряд будет порождать поле Черна–Саймонса, в то время как это поле не будет возникать естественным образом в $3 + 1$ измерениях.

Это принципиальное отличие свойств вакуума КЭД в присутствии сверхкритического кулоновского поля в пространствах различных размерностей имеет смысл рассмотреть подробно в отдельной работе. Задача может стать особенно актуальной для области значений $Z|e|^3 \geq 1$, когда, как было показано в [18] для случая $3 + 1$ измерений, в нижний континуум может погрузиться так много электронных уровней, что заряд порожденной из вакуума электронной оболочки ядра станет порядка Ze . Можно ожидать, что в случае $2 + 1$ измерений заряд вакуумной оболочки такой величины будет возникать при значительно меньших значениях Z .

Список литературы

- [1] The Quantum Hall Effect. 2nd ed. Eds R.E. Prange, S.M. Girvin. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] *F. Wilczek*. Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
- [3] *A. Neagu, A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
- [4] *A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1428.
- [5] *A. M. J. Schakel, C. W. Semenoﬀ*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
- [6] *J. M. Leinaas, J. Myrheim*. Nuovo Cimento B. 1977. V. 37. P. 1; *G. A. Goldin, R. Menikoff, D. H. Sharp*. J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1664; *F. Wilczek*. Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1144; V. 49. P. 957.
- [7] *А. В. Борисов, А. С. Вишневцев, В. Ч. Жукковский, П. А. Эминов*. УФН. 1997. Т. 167. С. 247.
- [8] *С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович*. ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 654.
- [9] *J. Reinhardt, W. Greiner*. Rep. Progr. Phys. 1977. V. 40. P. 219.
- [10] *J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein*. Phys. Rep. C. 1978. V. 38. P. 227.
- [11] *M. Soffel, B. Müller, W. Greiner*. Phys. Rep. C. 1982. V. 85. P. 51.
- [12] *W. Pieper, W. Greiner*. Z. Phys. 1969. Bd 218. S. 327.
- [13] *В. С. Попов*. ЯФ. 1970. Т. 12. С. 429; ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1228.
- [14] *В. С. Попов*. Электродинамика сверхсильных кулоновских полей ($Z > 137$). Препринт ИТЭФ-169. М.: ИТЭФ, 1980.
- [15] *А. Б. Мигдал, А. М. Переломов, В. С. Попов*. ЯФ. 1971. Т. 14. С. 874.
- [16] *T. Cowan et. all*. Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1761; 1986. V. 56. P. 444.
- [17] *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов*. УФН. 1971. Т. 105. С. 403.
- [18] *А. Б. Мигдал*. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
- [19] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко*. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [20] *I. Poteranchuk, Ya. Smorodinsky*. J. Phys. USSR. 1945. V. 9. P. 97.
- [21] *A. S. Goldhaber, R. Mackenzie, F. Wilczek*. Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 21.
- [22] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лишиц, Л. П. Питаевский*. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [23] *А. А. Соколов, И. М. Тернов*. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
- [24] *V. R. Khalilov*. Electrons in Strong Electromagnetic Fields: an Advanced Classical and Quantum Treatment. Amsterdam: Gordon & Breach, 1996.
- [25] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [26] *З. Флюгге*. Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 29.XII.1997 г.