Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Мецаев, БРСТ-БВ-подход к безмассовым полям,
адаптированный для АдС/КТП-соответствия, *ТМФ*,
2016, том 187, номер 2, 323–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 05:48:17

© 2016 г.

Р. Р. Мецаев*

БРСТ-БВ-ПОДХОД К БЕЗМАССОВЫМ ПОЛЯМ, АДАПТИРОВАННЫЙ ДЛЯ АДС/КТП-СООТВЕТСТВИЯ

В рамках БРСТ-БВ-подхода к формулировке релятивистской динамики рассмотрены безмассовые и массивные поля произвольного спина, распространяющиеся в плоском пространстве, а также безмассовые поля произвольного спина, распространяющиеся в пространстве АдС. Для таких полей получены БРСТ-БВ-лагранжианы, инвариантные относительно калибровочных преобразований. Лагранжианы и калибровочные преобразования построены в терминах бесследовых калибровочных полей и бесследовых параметров калибровочных преобразований. Поля в пространстве АдС рассмотрены с применением пуанкаре-параметризации этого пространства, что приводит к простому виду БРСТ-БВ-лагранжиана. Показано, что в калибровке Зигеля лагранжиан безмассовых полей АдС приводит к расщепляющимся уравнениям движения и это существенно упрощает исследование АдС/КТП-соответствия. В базе конформной алгебры найдена реализация релятивистских симметрий на полях и антиполях в пространстве АдС.

Ключевые слова: БРСТ-симметрия, поля высших спинов, АдС/КТП-соответствие.

DOI: 10.4213/tmf9030

1. ВВЕДЕНИЕ

БРСТ-подход [1] возник как метод, который упростил анализ тождеств Славнова–Тейлора [2] в калибровочных теориях. В настоящее время БРСТ-подход является основным методом исследования ультрафиолетовых расходимостей и построения релятивистски-инвариантной перенормированной S -матрицы в калибровочных теориях. Более того, расширенная версия БРСТ-подхода, которая включает антиполя, стала мощным средством исследования не только теорий квантованных калибровочных полей, но и эффективным методом построения теорий классических калибровочных полей [3]. В настоящей работе именно расширенную версию БРСТ-подхода мы называем БРСТ-БВ-подходом к формулировке релятивистской динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-011171).

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: metsaev@lpi.ru

Теория безмассовых полей высших спинов [4] в пространстве анти-де Ситтера (АдС) является, с одной стороны, интересным кандидатом на роль теории фундаментальных взаимодействий. С другой стороны, гипотеза дуальности Малдасены не только привела к новому всплеску активного интереса к теории струн, но и открыла новые интересные приложения теорий безмассовых полей высших спинов для изучения конформных теорий. Основным объектом, который устанавливает связь между теориями полей в пространстве АдС и конформными теориями, является так называемое эффективное действие, определяемое как континуальный интеграл по полям в пространстве АдС с заданными граничными значениями для полей на границе пространства АдС. Граничные значения полей определяются как источники, а вариационные производные эффективного действия по источникам задают корреляционные функции конформной теории, которая дуальна теории поля в пространстве АдС. Таким образом, проблема вычисления эффективного действия является актуальной для изучения гипотезы дуальности Малдасены, которую часто называют АдС/КТП-соответствием.

Проблеме вычисления эффективного действия уделялось много внимания в силу ее важности при исследовании АдС/КТП-соответствия. В квадратичном приближении по источникам древесное эффективное действие для безмассовых полей спина $s = 1$, $s = 2$ и произвольного спина было вычислено в работах [5]–[7] соответственно, а древесное эффективное действие для массивных полей спина $s = 1$, $s = 2$ и произвольного спина было исследовано в статьях [8]–[10] соответственно (см. также работу [11]). Исследование теоретико-групповых аспектов, связанных с проблемой вычисления эффективного действия, можно найти в статьях [12]–[14]. Вычисление n -точечных древесных корреляторов безмассовых полей высших спинов обсуждается в работах [15] (см. также недавние работы [16]). Различные аспекты однопетлевого квантового эффективного действия изучаются в статьях [17].

В работе [18] мы начали исследование эффективного действия с помощью БРСТ-подхода. А именно, используя метрический формализм полей высших спинов в пространстве АдС, а также модифицированную калибровку де Дондера, найденные в статьях [19], [20], и применив в работе [18] стандартную процедуру Фаддеева–Попова, мы получили простое действие полей высших спинов, инвариантное относительно глобальных БРСТ-преобразований, и использовали данное действие для исследования АдС/КТП-соответствия. В настоящей статье мы получаем простое БРСТ-БВ-действие безмассовых полей высших спинов, которое инвариантно относительно локальных калибровочных симметрий и адаптировано для изучения АдС/КТП-соответствия. Действие, рассмотренное в работе [18], получено из БРСТ-БВ-действия, найденного в данной работе с применением калибровки Зигеля.

Разрабатываемые далее БРСТ-БВ-формулировки полей в пространствах $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и АдС $_{d+1}$ имеют некоторые общие черты. Поэтому в разделе 2 мы начинаем обсуждение БРСТ-БВ-формулировок для безмассовых и массивных полей произвольного спина на примере более простого случая пространства Минковского. В разделе 3, используя пуанкаре-параметризацию пространства АдС, мы получаем БРСТ-БВ-действие безмассовых полей произвольного спина в пространстве АдС, адаптированное для изучения АдС/КТП-соответствия. Также мы получаем реализацию релятивистских симметрий алгебры $so(d, 2)$ на калибровочных полях и антиполях в рамках БРСТ-БВ-подхода.

2. БЕЗМАССОВЫЕ И МАССИВНЫЕ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^{d-1,1}$

В настоящем разделе мы рассматриваем БРСТ-БВ-формулировки на примерах безмассовых и массивных полей, распространяющихся в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$.

Безмассовые поля. Состав полей, необходимый для построения БРСТ-БВ-формулировки, удобно ввести, используя генерирующую форму описания полей. Чтобы определить генерирующую форму полей, введем грассманову переменную θ , грассманово-четные осцилляторы α^a и нечетные осцилляторы η, ρ . Осцилляторы α^a преобразуются как векторы алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$, а переменная θ и осцилляторы η, ρ являются скалярами этой алгебры. С помощью θ и осцилляторов введем кет-вектор

$$|\Phi\rangle = \Phi(x, \theta, \alpha, \eta, \rho)|0\rangle, \quad (2.1)$$

где x – обозначение для координат x^a пространства $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Обычные поля, зависящие от x^a , получаются разложением грассманово-четного поля Φ (2.1) в ряд Тейлора по грассмановой координате θ и осцилляторам α^a, η, ρ . Для описания безмассового поля спина s мы налагаем следующие алгебраические ограничения на кет-вектор $|\Phi\rangle$ (2.1):

$$(N_\alpha + N_\eta + N_\rho - s)|\Phi\rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\bar{\alpha}^2|\Phi\rangle = 0. \quad (2.3)$$

Определение операторов N_α, N_η, N_ρ и $\bar{\alpha}^2$ можно найти в приложении настоящей статьи (см. формулы (П.1), (П.2)). Ограничение (2.2) означает, что кет-вектор $|\Phi\rangle$ является однородным полиномом степени s относительно осцилляторов α^a, η, ρ , а ограничение (2.3) означает, что поля, которые получаются при разложении генерирующего поля Φ (2.1) в ряд Тейлора по осцилляторам α^a , являются бесследовыми тензорными полями алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$.

Чтобы прояснить состав тензорных полей, включенных в кет-вектор $|\Phi\rangle$ (2.1), заметим, что разложение кет-вектора $|\Phi\rangle$ в ряд Тейлора по грассмановой переменной θ и грассманово-нечетным осцилляторам η, ρ можно представить следующим образом:

$$|\Phi\rangle = |\phi\rangle + \theta|\phi_*\rangle, \quad (2.4)$$

$$|\phi\rangle = |\phi_I\rangle + \rho|c\rangle + \eta|\bar{c}\rangle + \rho\eta|\phi_{II}\rangle, \quad (2.5)$$

$$|\phi_*\rangle = |\phi_{I*}\rangle + \rho|\bar{c}_*\rangle + \eta|c_*\rangle + \rho\eta|\phi_{II*}\rangle. \quad (2.6)$$

Кет-векторы, появляющиеся в правых частях соотношений (2.5), (2.6), зависят от векторных осцилляторов α^a . Рассмотрим подробнее кет-векторы в формуле (2.5). Учитывая равенство (2.2), находим, что кет-векторы (2.5) зависят от осцилляторов α^a следующим образом:

$$|\phi_I\rangle = \frac{1}{s!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_s} \phi_I^{a_1 \dots a_s}(x)|0\rangle, \quad (2.7)$$

$$|c\rangle = \frac{1}{(s-1)!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s-1}} c^{a_1 \dots a_{s-1}}(x)|0\rangle, \quad (2.8)$$

$$|\bar{c}\rangle = \frac{1}{(s-1)!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s-1}} \bar{c}^{a_1 \dots a_{s-1}}(x) |0\rangle, \quad (2.9)$$

$$|\phi_{\Pi}\rangle = \frac{1}{(s-2)!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s-2}} \phi_{\Pi}^{a_1 \dots a_{s-2}}(x) |0\rangle. \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.7)–(2.10) получим тензорные поля, которые определяют кет-векторы (2.5). А именно, мы видим, что есть одно тензорное поле $\phi_1^{a_1 \dots a_s}$ ранга s , два тензорных поля $c^{a_1 \dots a_{s-1}}$, $\bar{c}^{a_1 \dots a_{s-1}}$ ранга $s-1$ и одно тензорное поле $\phi_{\Pi}^{a_1 \dots a_{s-2}}$ ранга $s-2$. Эти тензорные поля симметричны относительно перестановок своих тензорных индексов. Ограничение (2.3) означает, что данные тензорные поля являются бесследовыми. Заметим, что кет-вектор $|\phi_*\rangle$ (2.6) можно представить с помощью тензорных антиполей в виде, аналогичном соотношениям (2.7)–(2.10). Итак, рассматриваемые кет-векторы представимы в терминах бесследовых симметричных тензорных полей алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$.

БРСТ-БВ-лагранжиан. При использовании БРСТ-БВ-подхода общее представление для калибровочно-инвариантного действия для полей в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$ имеет вид [3]

$$S = \int d^d x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\theta \langle \Phi | Q | \Phi \rangle. \quad (2.11)$$

БРСТ-оператор Q , задающий лагранжиан (2.11), допускает следующее представление:

$$Q = \theta(\square - M^2) + M^{\eta a} \partial^a + M^{\eta} + M^{\eta\eta} \partial_{\theta}, \quad (2.12)$$

где $\square = \partial^a \partial_a$ – оператор Даламбера в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$, а ∂_{θ} означает левую производную по грассмановой переменной: $\partial_{\theta} = \partial/\partial\theta$. Как видно из формулы (2.12), БРСТ-оператор Q определяется операторами M^2 , $M^{\eta a}$, M^{η} и $M^{\eta\eta}$. Эти операторы зависят от осцилляторов и не зависят от грассмановой координаты θ , координат x^a пространства $\mathbb{R}^{d-1,1}$ и производных ∂_{θ} , ∂^a . Оператор M^2 является квадратом оператора массы. Операторы $M^{\eta a}$, M^{η} и $M^{\eta\eta}$ назовем спинowymi операторами. Условие $Q^2 = 0$ приводит к (анти)коммутаторам для спинowych операторов и оператора M^2 :

$$\begin{aligned} \{M^{\eta a}, M^{\eta b}\} &= -2\eta^{ab} M^{\eta\eta}, & \{M^{\eta}, M^{\eta}\} &= 2M^2 M^{\eta\eta}, \\ [M^2, M^{\eta a}] &= 0, & [M^2, M^{\eta}] &= 0, & [M^2, M^{\eta\eta}] &= 0, \\ \{M^{\eta a}, M^{\eta}\} &= 0, & [M^{\eta a}, M^{\eta\eta}] &= 0, & [M^{\eta}, M^{\eta\eta}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Калибровочные преобразования, относительно которых действие (2.11) инвариантно, задаются соотношением

$$\delta|\Phi\rangle = Q|\Xi\rangle, \quad (2.14)$$

где кет-вектор $|\Xi\rangle$ определяет генерирующую форму параметров этих преобразований. Данный кет-вектор зависит от грассмановой координаты θ , осцилляторов α^a , η , ρ и удовлетворяет тем же алгебраическим соотношениям, что и кет-вектор $|\Phi\rangle$:

$$|\Xi\rangle = \Xi(x, \theta, \alpha, \eta, \rho) |0\rangle, \quad (2.15)$$

$$(N_{\alpha} + N_{\eta} + N_{\rho} - s) |\Xi\rangle = 0, \quad (2.16)$$

$$\bar{\alpha}^2 |\Xi\rangle = 0, \quad (2.17)$$

где Ξ в формуле (2.15) является грассманово-нечетным. Так как $|\Phi\rangle$ и $|\Xi\rangle$ удовлетворяют одним и тем же алгебраическим ограничениям, представление $|\Xi\rangle$ в терминах параметров калибровочных преобразований, которые суть симметричные бесследовые тензоры алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$, имеет тот же вид, что и представление $|\Phi\rangle$ в терминах тензорных калибровочных полей (см. соотношения (2.4)–(2.10)).

Итак, построение калибровочно-инвариантного действия и соответствующих калибровочных преобразований сводится к проблеме построения БРСТ-оператора. В свою очередь, построение БРСТ-оператора сводится к проблеме поиска реализации спинных операторов, удовлетворяющих соотношениям (2.13). В рамках рассматриваемого подхода безмассовое поле описывается кет-вектором (2.1), который удовлетворяет ограничениям (2.2) и (2.3). Это означает, что мы должны построить реализацию спинных операторов на пространстве кет-вектора (2.1). Получаем следующую реализацию для спинных операторов и оператора M^2 :

$$M^{\eta a} = \eta g_\rho \bar{\alpha}^a + A^a \bar{g}_\eta \bar{\eta}, \quad (2.18)$$

$$M^{\eta\eta} = \eta \bar{\eta}, \quad (2.19)$$

$$M^\eta = 0, \quad (2.20)$$

$$M^2 = 0, \quad (2.21)$$

где использованы обозначения

$$A^a \equiv \alpha^a - \alpha^2 \frac{1}{2N_\alpha + d} \bar{\alpha}^a, \quad g_\rho \equiv \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\rho}{2s + d - 4} \right]^{1/2}, \quad \bar{g}_\eta \equiv - \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\eta}{2s + d - 4} \right]^{1/2}.$$

Справедливо следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Ограничение (2.2) хорошо известно в литературе. Ранее в ней вместо (2.3) использовалось ограничение (см., например, работы [21])

$$(\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\eta}\bar{\rho})|\Phi\rangle = 0. \quad (2.22)$$

При использовании формулы (2.22) соотношения (2.19)–(2.21) не меняются, в то время как оператор $M^{\eta a}$ принимает вид $M^{\eta a} = \eta \bar{\alpha}^a - \alpha^a \bar{\eta}$. В данной статье мы предлагаем использовать ограничение (2.3), так как оно представляется нам удобным для построения БРСТ-БВ-формулировки полей в пространстве АдС, адаптированной для исследования АдС/КТП-соответствия. Изучение БРСТ-формулировок без использования условий бесследовости можно найти в работах [22]. Игнорирование условий бесследовости для кет-вектора (2.1) приводит к БРСТ-формулировке так называемых приводимых триплетных мультиплетов высших спинов [23].

Массивные поля. Для построения БРСТ-БВ-действия мы используем генерирующую форму описания полей, которую мы введем с помощью грассмановой переменной θ , грассманово-четных осцилляторов α^a , ζ и нечетных осцилляторов η , ρ . Осцилляторы α^a преобразуются как векторы алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$, а θ и осцилляторы ζ , η , ρ являются скалярами алгебры Лоренца. С помощью грассмановой переменной и осцилляторов определим кет-вектор

$$|\Phi\rangle = \Phi(x, \theta, \alpha, \zeta, \eta, \rho)|0\rangle, \quad (2.23)$$

который удовлетворяет следующим алгебраическим ограничениям:

$$(N_\alpha + N_\zeta + N_\eta + N_\rho - s)|\Phi\rangle = 0, \quad (2.24)$$

$$\bar{\alpha}^2|\Phi\rangle = 0. \quad (2.25)$$

По определению поле Φ (2.23) является грассманово-четным. Отметим, что ограничение (2.25) имеет тот же вид, что и ограничение (2.3) для безмассовых полей.

Чтобы прояснить состав тензорных полей, включенных в кет-вектор $|\Phi\rangle$ (2.23), заметим, что разложение $|\Phi\rangle$ в ряд по θ , η , ρ можно записать так же, как это сделано в соотношениях (2.4)–(2.6). Заметим однако, что для массивных полей кет-векторы, появляющиеся в правых частях соотношений (2.5), (2.6), зависят не только от векторных осцилляторов α^a , но также и от осциллятора ζ . Для примера рассмотрим кет-векторы в формуле (2.5). Учитывая соотношение (2.24), находим, что кет-векторы (2.5) зависят от осцилляторов α^a , ζ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\phi_I\rangle &= \sum_{s'=0}^s \frac{\zeta^{s-s'}}{\sqrt{(s-s')!}} |\phi_I^{s'}\rangle, & |\phi_I^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \phi_I^{a_1 \dots a_{s'}}(x) |0\rangle, \\ |c\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-1} \frac{\zeta^{s-1-s'}}{\sqrt{(s-1-s')!}} |c^{s'}\rangle, & |c^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} c^{a_1 \dots a_{s'}}(x) |0\rangle, \\ |\bar{c}\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-1} \frac{\zeta^{s-1-s'}}{\sqrt{(s-1-s')!}} |\bar{c}^{s'}\rangle, & |\bar{c}^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \bar{c}^{a_1 \dots a_{s'}}(x) |0\rangle, \\ |\phi_{II}\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-2} \frac{\zeta^{s-2-s'}}{\sqrt{(s-2-s')!}} |\phi_{II}^{s'}\rangle, & |\phi_{II}^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \phi_{II}^{a_1 \dots a_{s'}}(x) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Кет-вектор $|\phi_*\rangle$ (2.6), отвечающий массивным полям, представим в терминах тензорных антиполей в виде, аналогичном соотношениям (2.26).

Для построения БРСТ-оператора следует найти реализацию спинных операторов, удовлетворяющих соотношениям (2.13). В рамках предлагаемого подхода массивное поле описывается кет-вектором (2.23), который удовлетворяет соотношениям (2.24), (2.25). Таким образом, мы должны построить реализацию спинных операторов на пространстве кет-вектора (2.23). Получим следующую реализацию для спинных операторов и оператора M^2 :

$$M^{\eta a} = \eta g_{\rho\zeta} \bar{\alpha}^a + A^a \bar{g}_{\eta\zeta} \bar{\eta}, \quad (2.27)$$

$$M^{\eta\eta} = \eta \bar{\eta}, \quad (2.28)$$

$$M^\eta = \eta l_{\rho\zeta} \bar{\zeta} + \zeta \bar{l}_{\eta\zeta} \bar{\eta}, \quad (2.29)$$

$$M^2 = m^2, \quad (2.30)$$

где m в (2.30) – параметр массы, и мы используем обозначения

$$\begin{aligned} A^a &\equiv \alpha^a - \alpha^2 \frac{1}{2N_\alpha + d} \bar{\alpha}^a, & g_{\rho\zeta} &\equiv \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\zeta - 2N_\rho}{2s + d - 4 - 2N_\zeta} \right]^{1/2}, \\ \bar{g}_{\eta\zeta} &\equiv - \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\zeta - 2N_\eta}{2s + d - 4 - 2N_\zeta} \right]^{1/2}, & l_{\rho\zeta} &\equiv m e_\zeta \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\zeta - 2N_\rho}{2s + d - 4 - 2N_\zeta} \right]^{-1/2}, \\ \bar{l}_{\eta\zeta} &\equiv m e_\zeta \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_\zeta - 2N_\eta}{2s + d - 4 - 2N_\zeta} \right]^{-1/2}, & e_\zeta &\equiv \left[\frac{2s + d - 4 - N_\zeta}{2s + d - 4 - 2N_\zeta} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Калибровочные преобразования массивных полей, относительно которых инвариантно действие (2.11), задаются тем же соотношением, что и преобразование (2.14), где кет-вектор $|\Xi\rangle$ определяет генерирующую форму параметров калибровочных преобразований. Для массивных полей этот кет-вектор зависит от грассмановой координаты θ , осцилляторов α^a , ζ , η , ρ и удовлетворяет тем же алгебраическим соотношениям, что и кет-вектор $|\Phi\rangle$ (2.24), (2.25):

$$|\Xi\rangle = \Xi(x, \theta, \alpha, \zeta, \eta, \rho)|0\rangle, \quad (N_\alpha + N_\zeta + N_\eta + N_\rho - s)|\Xi\rangle = 0, \quad \bar{\alpha}^2|\Xi\rangle = 0.$$

3. БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АД C_{d+1}

В настоящем разделе мы строим БРСТ-БВ-формулировку безмассового поля спина s в пространстве Ад C_{d+1} . Мы используем пуанкаре-параметризацию пространства Ад C_{d+1} :

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx^a dx^a + dz dz), \quad a = 0, 1, \dots, d-1. \quad (3.1)$$

Из соотношения (3.1) видно, что при использовании пуанкаре-параметризации только симметрии алгебры $so(d-1, 1)$ реализованы в явном виде.

Состав полей. Состав полей удобно ввести, используя генерирующую форму описания полей, которую мы определим с помощью грассмановой переменной θ , грассманово-четных осцилляторов α^a , α^z и нечетных осцилляторов η , ρ . Осцилляторы α^a преобразуются как векторы алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$, а грассманова переменная θ и осцилляторы α^z , η , ρ являются скалярами алгебры Лоренца. С помощью грассмановой переменной и осцилляторов введем кет-вектор

$$|\Phi\rangle = \Phi(x, z, \theta, \alpha, \alpha^z, \eta, \rho)|0\rangle, \quad (3.2)$$

где переменные x , z – суть координаты Пуанкаре x^a , z пространства Ад C_{d+1} (3.1). По определению поле Φ (3.2) является грассманово-четным. Тензорные поля, зависящие от координат x^a , z , можно получить с помощью разложения $|\Phi\rangle$ (3.2) в ряд Тейлора по θ и осцилляторам α^a , α^z , η , ρ . Для описания безмассового поля спина s мы налагаем следующие алгебраические ограничения на кет-вектор $|\Phi\rangle$ (3.2):

$$(N_\alpha + N_z + N_\eta + N_\rho - s)|\Phi\rangle = 0, \quad (3.3)$$

$$\bar{\alpha}^2|\Phi\rangle = 0. \quad (3.4)$$

Определение операторов N_α , N_z , N_η , N_ρ и $\bar{\alpha}^2$ можно найти в приложении настоящей статьи (см. формулы (П.1), (П.2)). Соотношение (3.3) означает, что кет-вектор $|\Phi\rangle$ является однородным полиномом степени s относительно осцилляторов α^a , α^z , η , ρ , а соотношение (3.4) – что поля, которые получаются при разложении $|\Phi\rangle$ (3.2) в ряд Тейлора по осцилляторам α^a , являются бесследовыми тензорными полями алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$.

Чтобы прояснить состав тензорных полей, включенных в кет-вектор $|\Phi\rangle$ (3.2), заметим, что, во-первых, разложение кет-вектора $|\Phi\rangle$ (3.2) в ряд по θ , η , ρ имеет вид, аналогичный соотношениям (2.4)–(2.6). Во вторых, ограничение (3.3) для безмассового поля в пространстве Ад C_{d+1} получается из ограничения (2.24) для массивного поля в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$ простой заменой осциллятора ζ на осциллятор α^z . Это

означает, что кет-векторы (2.5) для безмассового поля можно найти с помощью простой замены ζ на α^z в формулах (2.26):

$$\begin{aligned}
 |\phi_I\rangle &= \sum_{s'=0}^s \frac{\alpha_z^{s-s'}}{\sqrt{(s-s')!}} |\phi_I^{s'}\rangle, & |\phi_I^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \phi_I^{a_1 \dots a_{s'}}(x, z) |0\rangle, \\
 |c\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-1} \frac{\alpha_z^{s-1-s'}}{\sqrt{(s-1-s')!}} |c^{s'}\rangle, & |c^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} c^{a_1 \dots a_{s'}}(x, z) |0\rangle, \\
 |\bar{c}\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-1} \frac{\alpha_z^{s-1-s'}}{\sqrt{(s-1-s')!}} |\bar{c}^{s'}\rangle, & |\bar{c}^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \bar{c}^{a_1 \dots a_{s'}}(x, z) |0\rangle, \\
 |\phi_{II}\rangle &= \sum_{s'=0}^{s-2} \frac{\alpha_z^{s-2-s'}}{\sqrt{(s-2-s')!}} |\phi_{II}^{s'}\rangle, & |\phi_{II}^{s'}\rangle &= \frac{1}{s'!} \alpha^{a_1} \dots \alpha^{a_{s'}} \phi_{II}^{a_1 \dots a_{s'}}(x, z) |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Кет-вектор $|\phi_*\rangle$ (2.6), отвечающий безмассовому полю в пространстве AdC_{d+1} , представим в терминах тензорных антиполей в виде, аналогичном соотношениям (3.5).

БРСТ-БВ-лагранжиан. При применении БРСТ-БВ-подхода общее представление для калибровочно-инвариантного действия имеет вид

$$S = \int d^d x dz \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\theta \langle \Phi | Q | \Phi \rangle. \tag{3.6}$$

БРСТ-оператор Q , задающий лагранжиан (3.6), допускает следующее представление:

$$Q = \theta(\square - M^2) + M^{\eta a} \partial^a + M^\eta + M^{\eta\eta} \partial_\theta, \tag{3.7}$$

где $\square = \partial^a \partial_a$ – оператор Даламбера в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$, а ∂_θ означает левую производную по грассмановой переменной: $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$. Как видно из равенства (3.7), БРСТ-оператор определяется операторами M^2 , $M^{\eta a}$, M^η и $M^{\eta\eta}$. Все эти операторы зависят от осцилляторов, в то время как операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$ не зависят от грассмановой переменной θ , координат x^a , z и производных ∂_θ , ∂^a , ∂_z . Операторы M^2 , M^η также не зависят от грассмановой переменной θ , координат x^a и производных ∂_θ , ∂^a , но зависят от радиальной координаты z и производной ∂_z . Условие $Q^2 = 0$ приводит к (анти)коммуляторам (2.13).

Сравнивая формулы (2.11), (2.12) с равенствами (3.6), (3.7), отметим, что БРСТ-БВ-действие, которое в настоящей работе мы предлагаем использовать для описания полей в пространстве AdC_{d+1} , по своей общей структуре совпадает с действием для полей в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$, предложенным в работах [3]. Заметим также, что именно использование пуанкаре-параметризации в пространстве AdC (3.1) позволяет получить БРСТ-БВ-действие в виде формул (3.6), (3.7).

Для построения БРСТ-оператора Q (3.7) следует найти спинорные операторы, удовлетворяющие соотношениям (2.13). В предлагаемом подходе безмассовое поле описывается кет-вектором (3.2), который удовлетворяет соотношениям (3.3), (3.4). Итак, мы должны построить реализацию спинорных операторов на пространстве

кет-вектора (3.2). Находим следующую реализацию для спинных операторов и оператора M^2 :

$$M^{\eta a} = \eta g_{\rho z} \bar{\alpha}^a + A^a \bar{g}_{\eta z} \bar{\eta}, \quad (3.8)$$

$$M^{\eta \eta} = \eta \bar{\eta}, \quad (3.9)$$

$$M^{\eta} = \eta l_{\rho z} \bar{\alpha}^z + \alpha^z \bar{l}_{\eta z} \bar{\eta}, \quad (3.10)$$

$$M^2 = -\partial_z^2 + \frac{1}{z^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (3.11)$$

где операторы A^a , $g_{\rho z}$, $\bar{g}_{\eta z}$, $l_{\rho z}$, $\bar{l}_{\eta z}$, ν определяются соотношениями

$$A^a \equiv \alpha^a - \alpha^2 \frac{1}{2N_\alpha + d} \bar{\alpha}^a, \quad (3.12)$$

$$g_{\rho z} \equiv \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\rho}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{1/2}, \quad \bar{g}_{\eta z} \equiv - \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\eta}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{1/2},$$

$$l_{\rho z} \equiv \mathcal{T}_{-\nu+1/2} e_z \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\rho}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{-1/2},$$

$$\bar{l}_{\eta z} \equiv -\mathcal{T}_{\nu-1/2} e_z \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\eta}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{-1/2},$$

$$\nu \equiv s + \frac{d-4}{2} - N_z, \quad (3.13)$$

$$e_z \equiv \left[\frac{2s + d - 4 - N_z}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{T}_\nu \equiv \partial_z + \frac{\nu}{z}. \quad (3.15)$$

Калибровочные преобразования безмассовых полей, относительно которых действие (3.6) инвариантно, определяются тем же соотношением, что и преобразование (2.14), где кет-вектор $|\Xi\rangle$ задает генерирующую форму параметров калибровочных преобразований. Для безмассовых полей в пространстве AdS_{d+1} этот кет-вектор зависит от грассмановой координаты θ , осцилляторов α^a , α^z , η , ρ и удовлетворяет тем же алгебраическим соотношениям, что и кет-вектор $|\Phi\rangle$ (3.3), (3.4):

$$|\Xi\rangle = \Xi(x, z, \theta, \alpha, \alpha^z, \eta, \rho) |0\rangle, \quad (N_\alpha + N_z + N_\eta + N_\rho - s) |\Xi\rangle = 0, \quad \bar{\alpha}^2 |\Xi\rangle = 0.$$

Справедливы следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как видно из формулы (3.11), оператор M^2 диагонален на пространстве кет-вектора $|\Phi\rangle$. Именно это обстоятельство является основной привлекательной чертой рассматриваемого в настоящей статье подхода, так как такое представление для M^2 позволяет легко решать уравнения движения, вычислять эффективное действие и тем самым исследовать АдС/КТП-соответствие. Например, применяя калибровку Зигеля $|\phi_*\rangle = 0$ и интегрируя по грассмановой переменной θ , мы приводим лагранжиан (3.6) к виду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \phi_I | (\square - M^2) | \phi_I \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi_{II} | (\square - M^2) | \phi_{II} \rangle + \langle \bar{c} | (\square - M^2) | c \rangle. \quad (3.16)$$

Лагранжиан (3.16) получен в работе [18] с помощью стандартной процедуры Фаддеева–Попова. Данный лагранжиан приводит к расщепляющимся уравнениям движения, что существенно упрощает исследование АдС/КТП-соответствия (см. работу [18]). Заметим, что при переходе от лагранжиана $\mathcal{L}$ (3.6) к лагранжиану $\mathcal{L}$ в выражении (3.16) мы применили замену $|\bar{c}\rangle \rightarrow -|\bar{c}\rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В работе [24] показано, что при использовании калибровки светового конуса безмассовое поле произвольного спина в пространстве АдС_{d+1} представимо в виде бесконечной прямой суммы массивных полей в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Применение построенной нами БРСТ-БВ-формулировки позволяет достаточно просто продемонстрировать справедливость этого факта для калибровочных безмассовых и массивных полей. С этой целью введем для кет-вектора $|\Phi\rangle$ (3.2) безмассового поля новое обозначение $|\Phi_{\text{АдС}_{d+1}}(x, z)\rangle$, а кет-вектор $|\Phi\rangle$ (2.23) массивного поля массы m после замены осциллятора ζ на α^z обозначим $|\Phi_{\mathbb{R}^{d-1,1}}(x, m)\rangle$. Теперь попытаемся связать кет-векторы $|\Phi_{\text{АдС}_{d+1}}(x, z)\rangle$ и $|\Phi_{\mathbb{R}^{d-1,1}}(x, m)\rangle$, используя следующее преобразование Бесселя по радиальной переменной z :

$$|\Phi_{\text{АдС}_{d+1}}(x, z)\rangle = \int_0^\infty dm Z_\nu(mz)(-1)^{N_z} |\Phi_{\mathbb{R}^{d-1,1}}(x, m)\rangle, \quad Z_\nu(z) \equiv \sqrt{z} J_\nu(z). \quad (3.17)$$

Докажем соотношение (3.17) следующим образом. Обозначим $G_{\text{АдС}_{d+1}}$ операторы, приведенные в выражениях (3.8)–(3.11), а операторы, приведенные в выражениях (2.27)–(2.30), после замены осциллятора ζ на α^z обозначим $G_{\mathbb{R}^{d-1,1}}$. Для доказательства формулы (3.17) мы должны убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$G_{\text{АдС}_{d+1}} |\Phi_{\text{АдС}_{d+1}}(x, z)\rangle = \int_0^\infty dm Z_\nu(mz)(-1)^{N_z} G_{\mathbb{R}^{d-1,1}} |\Phi_{\mathbb{R}^{d-1,1}}(x, m)\rangle. \quad (3.18)$$

Для операторов $M^{\eta a}$, $M^{\eta \eta}$, приведенных в формулах (2.27), (2.28) и (3.8), (3.9), соотношения (3.18) выполняются очевидным образом. Для операторов M^η , M^2 , приведенных в формулах (2.29), (2.30) и (3.10), (3.11), соотношения (3.18) можно легко доказать, если использовать следующие тождества для функции Z_ν (3.17):

$$\alpha^z \mathcal{T}_{\nu-1/2} Z_\nu = Z_\nu \alpha^z, \quad \mathcal{T}_{-\nu+1/2} \tilde{\alpha}^z Z_\nu = -Z_\nu \tilde{\alpha}^z, \quad \mathcal{T}_{\nu-1/2} Z_\nu = Z_{\nu-1}, \quad \mathcal{T}_{-\nu-1/2} Z_\nu = -Z_{\nu+1},$$

где операторы ν , $\mathcal{T}_\nu$ определены в выражениях (3.13), (3.15). Заметим, что оператор M^2 (3.11) допускает представление $M^2 = -\mathcal{T}_{-\nu+1/2} \mathcal{T}_{\nu-1/2}$.

Реализация релятивистских симметрий. Релятивистские симметрии полей в пространстве АдС_{d+1} описываются алгеброй $so(d, 2)$. В рамках предлагаемого подхода только симметрии алгебры $so(d-1, 1)$ реализованы в явном виде, поэтому следует построить реализацию симметрий алгебры $so(d, 2)$ на пространстве калибровочных полей $|\Phi\rangle$ (3.2), а также представить генераторы алгебры $so(d, 2)$ в базисе алгебры $so(d-1, 1)$. В этом базисе алгебра $so(d, 2)$ порождается суммой генераторов трансляций P^a , дилатации D , конформных бустов K^a и генераторов алгебры $so(d-1, 1)$, J^{ab} . Применим следующие коммутационные соотношения для данных генераторов:

$$\begin{aligned} [D, P^a] &= -P^a, & [P^a, J^{bc}] &= \eta^{ab} P^c - \eta^{ac} P^b, & [D, K^a] &= K^a, \\ [K^a, J^{bc}] &= \eta^{ab} K^c - \eta^{ac} K^b, & [P^a, K^b] &= \eta^{ab} D - J^{ab}, & [J^{ab}, J^{ce}] &= \eta^{bc} J^{ae} + 3 \text{ члена.} \end{aligned}$$

Получим общую реализацию генераторов алгебры $so(d, 2)$ на пространстве кет-векторов в рамках БРСТ-БВ-формализма:

$$P^a = \partial^a, \quad J^{ab} = x^a \partial^b - x^b \partial^a + M^{ab}, \quad D = x^a \partial^a + \Delta, \quad (3.19)$$

$$K^a = -\frac{1}{2}x^2 \partial^a + x^a D + M^{ab} x^b + R^a, \quad (3.19)$$

$$\Delta \equiv z \partial_z + 2\theta \partial_\theta + M^{\eta\rho} + \frac{d-1}{2}, \quad (3.20)$$

$$R^a = -\frac{1}{2}z^2 \partial^a - M^{za} z + 2\theta M^{\rho a}. \quad (3.21)$$

Операторы M^{ab} , M^{za} , $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$ в формулах (3.19)–(3.21) не зависят от грассмановой переменной θ , координат x^a , z пространства АдС и производных ∂_θ , ∂^a , ∂_z . Эти операторы зависят только от осцилляторов. Выпишем следующую реализацию операторов M^{ab} , M^{za} , $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$ на пространстве кет-вектора (3.2):

$$M^{ab} = \alpha^a \bar{\alpha}^b - \alpha^b \bar{\alpha}^a, \quad (3.22)$$

$$M^{za} = A^z \bar{\alpha}^a + A^a \bar{A}^z, \quad (3.23)$$

$$M^{\eta\rho} = N_\eta - N_\rho, \quad (3.24)$$

$$M^{\rho a} = \rho f_{\eta z} \bar{\alpha}^a + A^a \bar{f}_{\rho z} \bar{\rho}, \quad (3.25)$$

где оператор A^a определен соотношением (3.12). В выражениях (3.23)–(3.25) использованы обозначения

$$A^z \equiv \alpha^z e_{\eta\rho z} + h_z \rho \eta \bar{\alpha}^z, \quad \bar{A}^z \equiv -e_{\eta\rho z} \bar{\alpha}^z - \alpha^z \bar{\eta} \bar{\rho} h_z,$$

$$f_{\rho z} \equiv \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\rho}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{1/2}, \quad \bar{f}_{\eta z} \equiv \left[\frac{2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\eta}{2s + d - 4 - 2N_z} \right]^{1/2},$$

$$e_{\eta\rho z} \equiv e_z \left[\frac{(2s + d - 4 - 2N_z)(2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\eta - 2N_\rho)}{(2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\eta)(2s + d - 4 - 2N_z - 2N_\rho)} \right]^{1/2},$$

$$h_z \equiv 2e_z ((2s + d - 4 - 2N_z)(2s + d - 6 - 2N_z))^{-1/2},$$

где оператор e_z определен формулой (3.14).

(. Симметрии алгебры $\$osp(d-1, 1|2)\$$ Симметрии алгебры $osp(d-1, 1|2)$ Из соотношений (3.10), (3.11) видно, что операторы M^2 , M^η зависят от радиальной координаты z и от производной ∂_z , помимо осцилляторов. Поэтому, с одной стороны, рассмотрим спинные операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$ (3.8), (3.9), которые зависят только от осцилляторов. С другой стороны, мы видим, что в выражениях (3.19)–(3.21) для генераторов релятивистских симметрий появляются другие спинные операторы $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$ и M^{ab} . Наше наблюдение состоит в том, что если к спинным операторам $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$, которые появляются в выражении (3.7) для БРСТ-оператора, и спинным операторам $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$, M^{ab} , которые появляются в выражениях (3.19)–(3.21), добавить спинный оператор $M^{\rho\rho}$, определяемый соотношением $M^{\rho\rho} = \rho \bar{\rho}$, то полученное множество спинных операторов образует супералгебру $osp(d-1, 1|2)$. Иначе говоря, мы имеем спинные операторы, которые представимы следующим образом:

$$\underbrace{M^{ab}}_{so(d-1,1)}, \quad \underbrace{M^{\eta\rho}, M^{\eta\eta}, M^{\rho\rho}}_{sp(2)}, \quad \underbrace{M^{\eta a}, M^{\rho a}}_{\text{косет}}$$

и удовлетворяют (анти)коммутационным соотношениям супералгебры $osp(d-1, 1|2)$:

$$\begin{aligned}
 [M^{ab}, M^{ce}] &= \eta^{bc} M^{ae} + 3 \text{ члена,} & [M^{\eta\rho}, M^{\eta\eta}] &= 2M^{\eta\eta}, \\
 [M^{\eta\rho}, M^{\rho\rho}] &= -2M^{\rho\rho}, & [M^{\eta\eta}, M^{\rho\rho}] &= M^{\eta\rho}, \\
 [M^{\eta\rho}, M^{\eta a}] &= M^{\eta a}, & [M^{\eta\rho}, M^{\rho a}] &= -M^{\rho a}, \\
 [M^{\eta\eta}, M^{\rho a}] &= M^{\eta a}, & [M^{\rho\rho}, M^{\eta a}] &= M^{\rho a}, \\
 [M^{\eta a}, M^{bc}] &= \eta^{ab} M^{\eta c} - \eta^{ac} M^{\eta b}, & [M^{\rho a}, M^{bc}] &= \eta^{ab} M^{\rho c} - \eta^{ac} M^{\rho b},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\{M^{\rho a}, M^{\eta b}\} = \eta^{ab} M^{\eta\rho} + M^{ab}, \quad \{M^{\eta a}, M^{\eta b}\} = -2\eta^{ab} M^{\eta\eta}, \quad \{M^{\rho a}, M^{\rho b}\} = 2\eta^{ab} M^{\rho\rho}. \tag{3.27}$$

Напомним, что при использовании (анти)коммутационных соотношений (3.26), (3.27) и понятия заряда q для генератора X супералгебры $osp(d-1, 1|2)$, введенного соотношением $[M^{\eta\rho}, X] = qX$, супералгебра $osp(d-1, 1|2)$ допускает разложение Кантора:

$$\underbrace{M^{\rho\rho}}_{q=-2}, \quad \underbrace{M^{\rho a}}_{q=-1}, \quad \underbrace{M^{\eta\rho}, M^{ab}}_{q=0}, \quad \underbrace{M^{\eta a}}_{q=1}, \quad \underbrace{M^{\eta\eta}}_{q=2}.$$

Поля, необходимые для построения БРСТ-БВ-формулировки, можно классифицировать по представлениям супералгебры $osp(d-1, 1|2)$. Этот факт хорошо известен для полей в пространстве $\mathbb{R}^{d-1,1}$, и он остается в силе для полей в пространстве АдС_{d+1} . Также хорошо известно, что при построении БРСТ-БВ-формулировки полей в $\mathbb{R}^{d-1,1}$ используются спинные операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$, которые появляются в выражении (3.7) для БРСТ-оператора, и операторы M^{ab} , которые появляются в выражении (3.22) для генераторов алгебры Лоренца $so(d-1, 1)$. Операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$, M^{ab} образуют подалгебру супералгебры $osp(d-1, 1|2)$.

Как показывает наше исследование, ситуация в пространстве АдС_{d+1} выглядит более интересной. В этом случае при построении БРСТ-БВ-формулировки используются спинные операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$, которые появляются в выражении (3.12) для БРСТ-оператора, и операторы $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$, M^{ab} , которые появляются в выражениях (3.19)–(3.21) для генераторов алгебры релятивистских симметрий $so(d, 2)$. Сами по себе спинные операторы $M^{\eta a}$, $M^{\eta\eta}$, $M^{\eta\rho}$, $M^{\rho a}$, M^{ab} не образуют супералгебру. Однако если к множеству этих спинных операторов добавить оператор $M^{\rho\rho} = \rho\bar{\rho}$, который появляется в антикоммутаторе $M^{\rho a}$ (3.27), то мы получим супералгебру $osp(d-1, 1|2)$. Заметим, что в выражении (3.21) для генераторов алгебры $so(d, 2)$ оператор $M^{\rho a}$ появляется вместе с грассмановой переменной θ . Поэтому последний антикоммутатор в (3.27) не дает вклада в коммутационные соотношения алгебры $so(d, 2)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в настоящей статье мы построили БРСТ-БВ-формулировку свободных симметричных безмассовых полей в пространстве АдС . Предлагаемый подход может иметь интересные приложения при исследовании различных проблем теорий высших спинов в пространстве АдС . В частности, отметим проблему построения БРСТ-БВ-формулировки полей со смешанным типом симметрии [25].

Другая интересная проблема – построение БРСТ-БВ-формулировки теорий взаимодействующих полей высших спинов [26]–[28]. Применение БРСТ-БВ-подхода к конформным полям в пространстве АдС [29] также представляется интересной задачей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список принятых обозначений

Мы считаем, что векторные индексы алгебры $so(d-1, 1)$ принимают следующие значения: $a, b, c, e = 0, 1, \dots, d-1$. Чтобы упростить формулы, мы опускаем обозначение для плоской метрики $\eta^{ab} = (-, +, \dots, +)$ в выражении для скалярного произведения: $X^a Y^a \equiv \eta_{ab} X^a Y^b$. Также мы используем грассманову переменную θ , $\theta^2 = 0$. Ее левая производная и интеграл определяются как $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$, $\int d\theta \theta = 1$. Осцилляторами в настоящей работе названы операторы рождения α^a , α^z , ζ , η , ρ и соответствующие операторы уничтожения $\bar{\alpha}^a$, $\bar{\alpha}^z$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\eta}$.

(Анти)коммутационные соотношения, вакуум $|0\rangle$ и правила эрмитова сопряжения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}^a, \alpha^b] &= \eta^{ab}, & [\bar{\alpha}^z, \alpha^z] &= 1, & [\bar{\zeta}, \zeta] &= 1, & \{\bar{\rho}, \eta\} &= 1, & \{\bar{\eta}, \rho\} &= 1, \\ \bar{\alpha}^a |0\rangle &= 0, & \bar{\alpha}^z |0\rangle &= 0, & \bar{\zeta} |0\rangle &= 0, & \bar{\eta} |0\rangle &= 0, & \bar{\rho} |0\rangle &= 0, \\ \alpha^{a\dagger} &= \bar{\alpha}^a, & \alpha^{z\dagger} &= \bar{\alpha}^z, & \zeta^\dagger &= \bar{\zeta}, & \eta^\dagger &= \bar{\eta}, & \rho^\dagger &= \bar{\rho}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом осцилляторы α^a , $\bar{\alpha}^a$ и α^z , $\bar{\alpha}^z$, ζ , $\bar{\zeta}$, η , $\bar{\rho}$, ρ , $\bar{\eta}$ преобразуются в векторных и скалярных представлениях алгебры $so(d-1, 1)$. Производные координат x^a , z обозначаются как $\partial^a \equiv \eta^{ab} \partial/\partial x^b$, $\partial_z \equiv \partial/\partial z$ соответственно. Мы используем следующие сокращения для скалярных произведений осцилляторов и производных:

$$\square \equiv \partial^a \partial^a, \quad \alpha^2 \equiv \alpha^a \alpha^a, \quad \bar{\alpha}^2 \equiv \bar{\alpha}^a \bar{\alpha}^a, \quad (\text{П.1})$$

$$N_\alpha \equiv \alpha^a \bar{\alpha}^a, \quad N_z \equiv \alpha^z \bar{\alpha}^z, \quad N_\zeta \equiv \zeta \bar{\zeta}, \quad N_\eta \equiv \eta \bar{\rho}, \quad N_\rho \equiv \rho \bar{\eta}. \quad (\text{П.2})$$

Правила эрмитова сопряжения координат и производных определяются соотношениями $(x^a, z, \theta)^\dagger = (x^a, z, \theta)$, $(\partial^a, \partial_z, \partial_\theta)^\dagger = (-\partial^a, -\partial_z, \partial_\theta)$. Правило эрмитова сопряжения произведения двух операторов независимо от их грассмановой четности задается соотношением $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Духовые числа кет-векторов в формулах (2.5), (2.6) определяются как собственные значения внешнего оператора Фаддеева–Попова $\mathbf{N}_{\text{FP}}^{\text{ext}}$ на основе соотношения $(N_{\text{FP}}^{\text{int}} + \mathbf{N}_{\text{FP}}^{\text{ext}})|\Phi\rangle = 0$, где реализация внутреннего оператора Фаддеева–Попова $N_{\text{FP}}^{\text{int}}$ на кет-векторе $|\Phi\rangle$ (2.4) задается соотношением $N_{\text{FP}}^{\text{int}} = \theta \partial_\theta + N_\eta - N_\rho$. Применяя его, получаем духовые числа кет-векторов в (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} \text{gh}(|\phi_I\rangle) &= 0, & \text{gh}(|c\rangle) &= 1, & \text{gh}(|\bar{c}\rangle) &= -1, & \text{gh}(|\phi_{\text{II}}\rangle) &= 0, \\ \text{gh}(|\phi_{I*}\rangle) &= -1, & \text{gh}(|c_*\rangle) &= -2, & \text{gh}(|\bar{c}_*\rangle) &= 0, & \text{gh}(|\phi_{\text{II}*}\rangle) &= -1. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Так как духовые числа осцилляторов α^a , α^z , ζ и вакуума $|0\rangle$ считаются равными нулю, духовые числа кет-векторов (П.3) совпадают с духовыми числами тензорных полей, которые получаются при разложении кет-векторов (2.5), (2.6) в ряд по осцилляторам α^a , α^z , ζ . Отметим, что духовые числа параметров калибровочных преобразований можно найти из соотношения $(N_{\text{FP}}^{\text{int}} + \mathbf{N}_{\text{FP}}^{\text{ext}} + 1)|\Xi\rangle = 0$.

Бра-векторы $\langle \Phi |$, $\langle \phi_{I,II} |$ и кет-векторы $|\Phi\rangle$, $|\phi_{I,II}\rangle$ связаны операцией эрмитова сопряжения: $\langle \Phi | = (|\Phi\rangle)^\dagger$, $\langle \phi_{I,II} | = (|\phi_{I,II}\rangle)^\dagger$. Бра-векторы и кет-векторы полей Фаддеева–Попова связаны соотношениями $\langle c | = |c\rangle^\dagger$, $\langle \bar{c} | = -|\bar{c}\rangle^\dagger$, а для тензорных полей Фаддеева–Попова мы используем следующие правила эрмитова сопряжения: $c^{a_1 \dots a_{s'}}{}^\dagger = \bar{c}^{a_1 \dots a_{s'}}$, $\bar{c}^{a_1 \dots a_{s'}}{}^\dagger = -c^{a_1 \dots a_{s'}}$.

Список литературы

- [1] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett. B*, **52** (1974), 344–346; И. В. Тютин, *Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке*, Препринт ФИАН № 39, ФИАН, М., 1975, arXiv:0812.0580.
- [2] А. А. Славнов, *ТМФ*, **10:2** (1972), 153–161; J. C. Taylor, *Nucl. Phys. B*, **33:2** (1971), 436–444.
- [3] W. Siegel, *Phys. Lett. B*, **149:1–3** (1984), 157–161; *Phys. Lett. B*, **151:5–6** (1985), 391–395; A. Neveu, P. C. West, *Phys. Lett. B*, **168:3** (1986), 192–200; H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo, K. Ogawa, *Phys. Rev. D*, **34:8** (1986), 2360–2429.
- [4] M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **243:4** (1990), 378–382; M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **567:1–2** (2003), 139–151, arXiv:hep-th/0304049.
- [5] D. Z. Freedman, S. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli, *Nucl. Phys. B*, **546:1–1** (1999), 96–118, arXiv:hep-th/9804058.
- [6] H. Liu, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **533:1–3** (1998), 88–108, arXiv:hep-th/9804083.
- [7] R. R. Metsaev, *Phys. Rev. D*, **81:10** (2010), 106002, 29 pp., arXiv:0907.4678.
- [8] W. Mück, K. S. Viswanathan, *Phys. Rev. D*, **58:10** (1998), 106006, 7 pp., arXiv:hep-th/9805145.
- [9] A. Polishchuk, *JHEP*, **07** (1999), 007, 12 pp., arXiv:hep-th/9905048.
- [10] R. R. Metsaev, *Phys. Rev. D*, **85:12** (2012), 126011, 20 pp., arXiv:1110.3749.
- [11] R. R. Metsaev, *Phys. Rev. D*, **83:10** (2011), 106004, 28 pp., arXiv:1011.4261.
- [12] V. K. Dobrev, *Nucl. Phys. B*, **553:3** (1999), 559–582, arXiv:hep-th/9812194; N. Aizawa, V. K. Dobrev, *Rep. Math. Phys.*, **75:2** (2015), 179–197, arXiv:1406.2129.
- [13] R. R. Metsaev, *Phys. Rev. D*, **78:10** (2008), 106010, 31 pp., arXiv:0805.3472.
- [14] R. R. Metsaev, *JHEP*, **10** (2015), 110, 52 pp., arXiv:1507.06584.
- [15] V. E. Didenko, E. D. Skvortsov, *JHEP*, **04** (2013), 158, 27 pp., arXiv:1210.7963; O. A. Gel'fond, M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **876:3** (2013), 871–917, arXiv:1301.3123.
- [16] I. Florakis, D. Sorokin, M. Tsulaia, *Nucl. Phys. B*, **890** (2014), 279–301, arXiv:1408.6675; *JHEP*, **07** (2014), 105, 24 pp., arXiv:1401.1645; X. Bekaert, J. Erdmenger, D. Ponomarev, C. Sleight, *JHEP*, **03** (2015), 170, 52 pp., arXiv:1412.0016; *JHEP*, **11** (2015), 149, 57 pp., arXiv:1508.04292; N. Boulanger, P. Kessel, E. D. Skvortsov, M. Taronna, *Higher spin interactions in four dimensions: Vasiliev vs. Fronsdal*, arXiv:1508.04139.
- [17] A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **877:2** (2013), 598–631, arXiv:1309.0785; M. Beccaria, A. A. Tseytlin, *J. Phys. A*, **48:27** (2015), 275401, 33 pp., arXiv:1503.08143; *JHEP*, **11** (2014), 114, 46 pp., arXiv:1410.3273.
- [18] Р. Р. Мецаев, *ТМФ*, **181:3** (2014), 495–514, arXiv:1407.2601.
- [19] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **671:1** (2009), 128–134, arXiv:0808.3945.
- [20] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **682:4–5** (2010), 455–461, arXiv:0907.2207.
- [21] A. K. H. Bengtsson, *Class. Quantum Grav.*, **5:3** (1988), 437–452; *Nucl. Phys. B*, **333:2** (1990), 407–418.
- [22] I. L. Buchbinder, A. Pashnev, M. Tsulaia, *Phys. Lett. B*, **523:3–4** (2001), 338–346, arXiv:hep-th/0109067; I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, *Nucl. Phys. B*, **727:3** (2005), 537–563, arXiv:hep-th/0505092; I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, P. M. Lavrov, *Nucl. Phys. B*, **762:3** (2007), 344–376, arXiv:hep-th/0608005.

- [23] A. Sagnotti, M. Tsulaia, *Nucl. Phys. B*, **682**:1 (2004), 83–116, arXiv: hep-th/0311257; K. B. Alkalaev, M. Grigoriev, I. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **823**:3 (2009), 509–545, arXiv: 0811.3999.
- [24] R. R. Metsaev, *Nucl. Phys. B*, **563**:1–2 (1999), 295–348, arXiv: hep-th/9906217.
- [25] K. B. Alkalaev, M. Grigoriev, *Nucl. Phys. B*, **835**:1 (2010), 197–220, arXiv: 0910.2690; *Nucl. Phys. B*, **853**:3 (2011), 663–687, arXiv: 1105.6111; A. A. Reshetnyak, *Phys. Part. Nucl.*, **41**:6 (2010), 976–979, arXiv: 1002.0124; I. L. Buchbinder, A. Reshetnyak, *Nucl. Phys. B*, **862**:1 (2012), 270–326, arXiv: 1110.5044; Č. Burdik, A. Reshetnyak, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **343**:1 (2012), 012102, 27 pp., arXiv: 1111.5516.
- [26] N. Boulanger, S. Cnockaert, *JHEP*, **03** (2004), 031, 16 pp., arXiv: hep-th/0402180; X. Bekaert, N. Boulanger, S. Cnockaert, *J. Math. Phys.*, **46**:1 (2005), 012303, 33 pp., arXiv: hep-th/0407102.
- [27] R. R. Metsaev, *Phys. Lett. B*, **720**:1–3 (2013), 237–243, arXiv: 1205.3131.
- [28] M. Henneaux, G. L. Gomez, R. Rahman, *JHEP*, **01** (2014), 087, 44 pp., arXiv: 1310.5152; *JHEP*, **08** (2012), 093, 43 pp., arXiv: 1206.1048; P. Dempster, M. Tsulaia, *Nucl. Phys. B*, **865**:2 (2012), 353–375, arXiv: 1203.5597; M. Taronna, *JHEP*, **04** (2012), 029, 75 pp., arXiv: 1107.5843; I. Buchbinder, P. Dempster, M. Tsulaia, *Nucl. Phys. B*, **877**:2 (2013), 260–289, arXiv: 1308.5539; I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, *Eur. Phys. J. C*, **75** (2015), 454, 10 pp., arXiv: 1507.03723.
- [29] R. R. Metsaev, *Nucl. Phys. B*, **885** (2014), 734–771, arXiv: 1404.3712.

Поступила в редакцию 24.08.2015